1. Halmazok, halmazműveletek. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben

Vázlat:

I. Halmazok, részhalmazok
n elemű halmaz részhalmazainak száma
II. Halmazműveletek (komplementer, unió, metszet, különbség, Descartes-szorzat), műveletek tulajdonságai
III. Nevezetes ponthalmazok: kör (gömb), párhuzamos egyenespár (hengerfelület), szakaszfelező merőleges egyenes (sík), középpárhuzamos, szögfelező, parabola
IV. Egyéb ponthalmazok: ellipszis, hiperbola, 3 ponttól, illetve 3 egyenestől egyenlő távolágra lévő pontok, látókörív
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

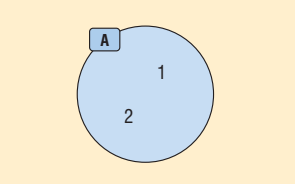
Kidolgozás:

I. Halmazok, részhalmazok

A halmaz és a halmaz eleme alapfogalom, ezeket a kifejezéseket nem definiáljuk. De a halmaz megadásának szigorú követelménye van: egy halmazt úgy kell megadnunk, hogy minden szóba jöhető dologról egyértelműen eldönthető legyen, hogy az adott halmazhoz tartozik vagy sem.
A halmazokat nyomtatott nagybetűvel, a halmaz elemeit kisbetűvel jelöljük a következő módon:
$A = \{a; b; c\}$, ebben az esetben $a \in A$, $x \notin A$.

Halmaz megadási módjai:

- Elemeinek felsorolásával: $A = \{0; 2; 4; 6\}$
- Az elemeit egyértelműen meghatározó utasítással: $B = \{\text{egyjegyű páratlan számok}\}$
- Szimbólumokkal: $A = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 > 9\}$
- Venn-diagrammal:



DEFINÍCIÓ: Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák.

DEFINÍCIÓ: Az elem nélküli halmazt **üres halmaz**nak nevezzük.
Jele: { } vagy ∅.

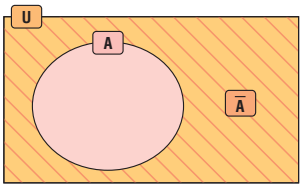
DEFINÍCIÓ: Az A halmaz **részhalmaz**a a B halmaznak, ha A minden eleme a B halmaznak is eleme.
Jele: $A \subseteq B$.

DEFINÍCIÓ: Az A halmaz **valódi részhalmaz**a a B halmaznak, ha A részhalmaza a B-nek, de nem egyenlő vele.
Jele: $A \subset B$.

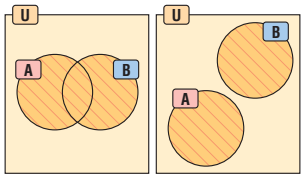
DEFINÍCIÓ: Két halmaz **diszjunkt**, ha nincs közös elemük, vagyis a metszetük üres halmaz. $A \cap B = \emptyset$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B halmaz **különbsége** az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei. Jele: $A \setminus B$.

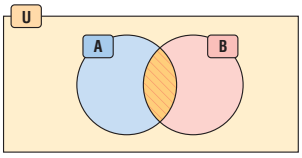
DEFINÍCIÓ: Az A és B halmaz **Descartes-féle szorzata** az a halmaz, amelynek elemei az összes olyan rendezett $(a; b)$ pár, amelynél $a \in A$ és $b \in B$. Jele: $A \times B$.



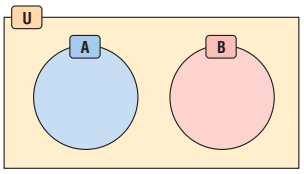
Komplementer halmaz



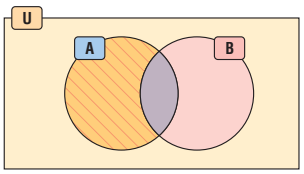
Két halmaz uniója



Két halmaz metszete



Diszjunkt halmazok



A és B halmaz $A \setminus B$ különbsége

Halmazműveletek tulajdonságai

Kommutatív (felcserélhető)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asszociatív (csoportosítható)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Disztributív (széttagolható)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De-Morgan azonosságok	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	
További azonosságok	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup A = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cup U = U$ $\overline{\overline{A}} = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap A = A$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cap U = A$

III. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben

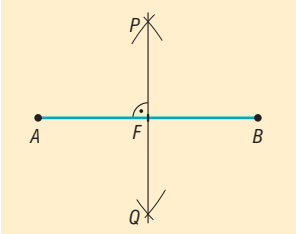
DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra vannak, egy O középpontú, r sugarú **kör.**

DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek a tér adott O pontjától adott r távolságra vannak, egy O középpontú, r sugarú **gömb.**

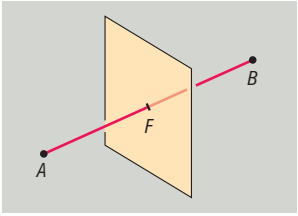
DEFINÍCIÓ: Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a síkon az egyenessel **párhuzamos egyenespár.**

DEFINÍCIÓ: Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a térben olyan **hengerfelület**, amelynek tengelye az adott egyenes.

DEFINÍCIÓ: Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban a **szakasz felezőmerőleges egyenese.**

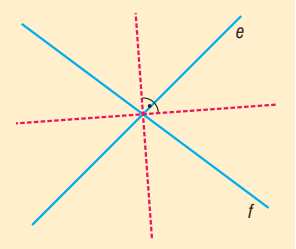


DEFINÍCIÓ: Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben a **szakasz felezőmerőleges síkja.**

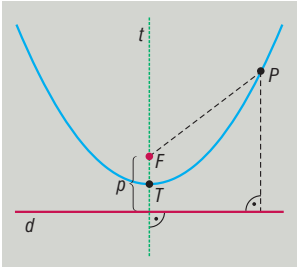


DEFINÍCIÓ: Két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban olyan egyenes, amely a két adott egyenessel párhuzamos és távolságukat felezi **(középpárhuzamos).**

DEFINÍCIÓ: Két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az általuk bezárt szögek **szögfelező egyenesei**. Két ilyen egyenes van, ezek merőlegesek egymásra.



DEFINÍCIÓ: Egy egyenestől és egy rajta kívül lévő ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon: a **parabola.**
Az adott pont a parabola fókuszpontja, az adott egyenes a parabola vezéregyenese (direktrixe), a pont és az egyenes távolsága a parabola paramétere.



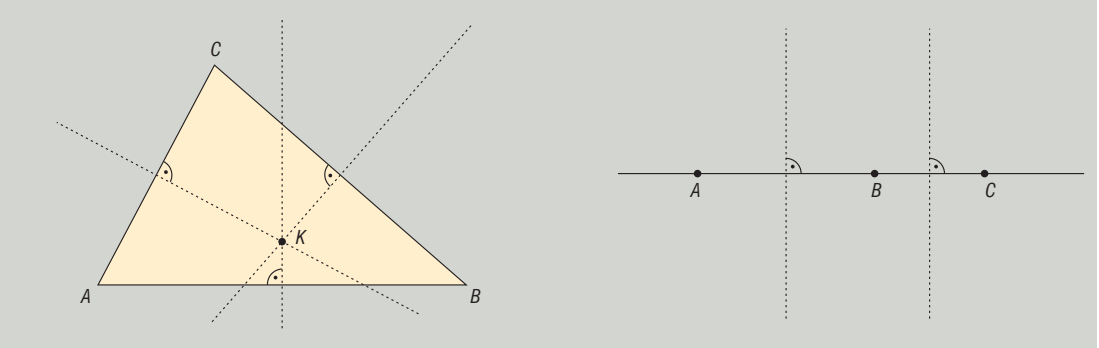
IV. Egyéb ponthalmazok

DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyeknek a sík két különböző adott pontjától mért távolságösszege az adott pontok távolságánál nagyobb állandó: **ellipszis.**
A két adott pont (F_1 és F_2) az ellipszis fókuszpontjai. Az adott távolság az ellipszis nagyten-

gelye, az F_1F_2 szakasz felezőmerőlegesének az ellipszis tartományába eső szakasza az ellipszis kistengelye.

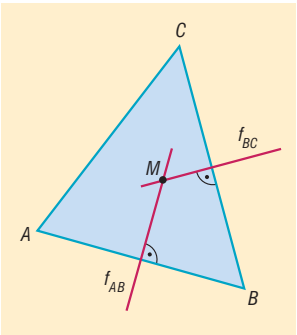
DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyeknek a sík két különböző adott pontjától mért távolságkülönbségének abszolút értéke a két adott pont távolságánál kisebb állandó: **hiperbola.**
A két adott pont (F_1 és F_2) a hiperbola fókuszpontjai, az adott távolság a hiperbola főtengelye.

TÉTEL: Három adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon egy pont (ha a 3 pont nem esik egy egyenesre), vagy üres halmaz (ha a 3 pont egy egyenesre esik).



TÉTEL: A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást.

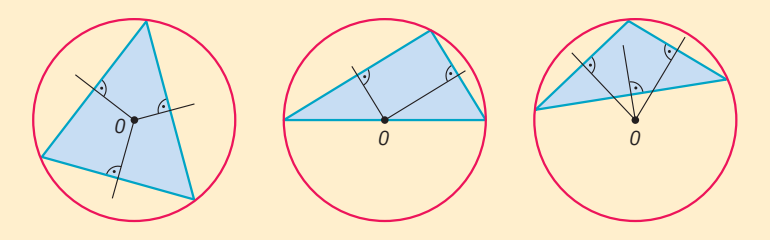
BIZONYÍTÁS: Tekintsük az ABC háromszög AB és BC oldalának oldalfelező merőlegesét. Ezek az egyenesek metszik egymást, mert a háromszög oldalai nem lehetnek párhuzamosak egymással. Jelöljük a két oldalfelező merőleges metszéspontját M-mel. Ekkor M pont egyenlő távolságra van A és B csúcsoktól (mert M illeszkedik AB szakaszfelező merőlegesére), illetve B és C csúcsoktól (mert M illeszkedik BC szakaszfelező merőlegesére). Ebből következik, hogy M egyenlő távolságra van A és C csúcsoktól, tehát M-n áthalad AC oldalfelező merőlegese. Tehát a három oldalfelező merőleges egy pontban metszi egymást.



TÉTEL: A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja **a háromszög köré írt kör középpontja.**

BIZONYÍTÁS: Az előbbi bizonyítás szerint M egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től. Legyen ez a távolság $MA = MB = MC = r$. Ekkor A, B és C pontok r távolságra vannak M-től, azaz illeszkednek egy M középpontú, r sugarú körre.

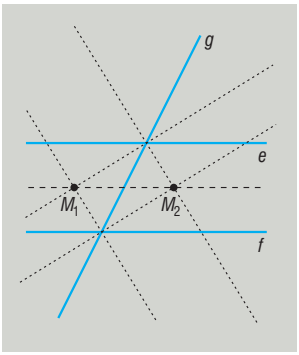
A háromszög köré írt kör középpontja hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül, derékszögű háromszög esetén az átfogó felezőpontjába, tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívülre esik.



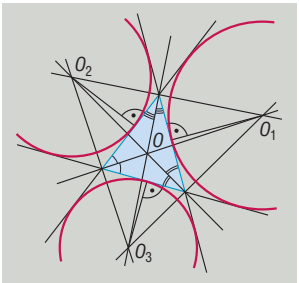
TÉTEL: Három adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben egy olyan egyenes, amely áthalad a három pont, mint háromszög köré írható kör középpontján, és merőleges a 3 pont síkjára (ha a 3 pont nem esik egy egyenesbe), vagy üres halmaz (ha a 3 pont egy egyenesbe esik).

TÉTEL: Három egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon:

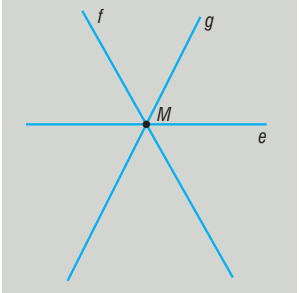
- Ha a 3 egyenes párhuzamos, akkor üres halmaz.
- Ha 2 egyenes párhuzamos ($e \parallel f$), egy pedig metszi őket (g), akkor a 2 párhuzamos egyenes középpárhuzamosán két olyan pont, amelyek illeszkednek két metsző egyenes (pl. e és g) szögfelezőire.



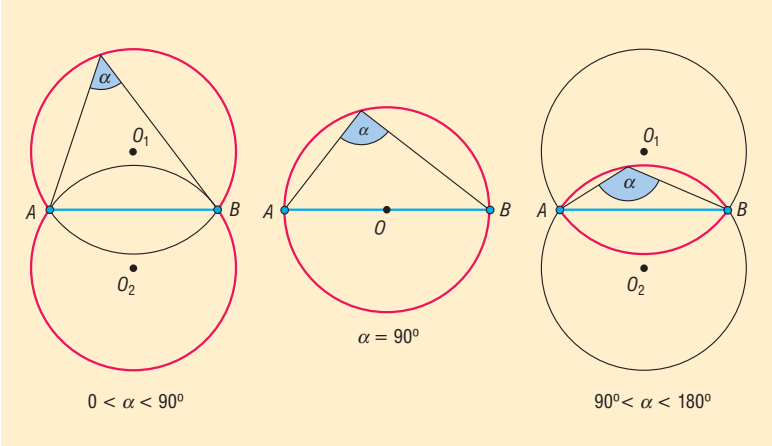
- Ha a 3 egyenes 3 különböző pontban metszi egymást, akkor szögfelező egyeneseik metszéspontjai. 4 ilyen pont van, az egyik **a háromszög beírt köré**nek, 3 pedig **a háromszög hozzáírt körei**nek középpontja.



- Ha a 3 egyenes egy pontban metszi egymást, akkor egyetlen pont, a 3 egyenes metszéspontja.

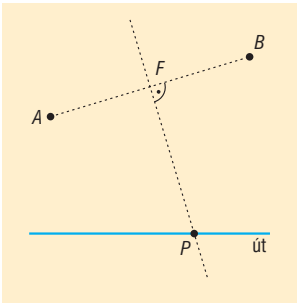


DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyekből egy adott szakasz adott α szögben ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) látszik két, a szakasz egyenesére szimmetrikusan elhelyezkedő körív **(látókörívek).**



V. Alkalmazások

- Biológiában a rendszertan, kémiában a periódusos rendszerbeli csoportosítás is halmazelméleti fogalmak. Műveletek: melyik csoport melyiknek részhalmaza?
- Vércsoport szerint az emberek különböző halmazokba sorolhatók. Műveletek: ki kinek adhat vért?
- Európa országai hivatalos nyelvük alapján halmazokba sorolhatók. Műveletek: melyik országban hivatalos nyelv az angol vagy a német?
- Az érettségin a nem kötelező tárgyak választása szerint is halmazokba sorolhatók a vizsgázók. Műveletek: ki vizsgázik kémiából és biológiából is?
- A függvényekkel kapcsolatban is használjuk a halmazokat (értelmezési tartomány, értékkészlet).
- Egyenletek értelmezési tartományának vizsgálatakor számhalmazok metszetét képezzük.
- Koordináta-geometriában a kör, a parabola, az ellipszis és a hiperbola egyenletének felírásakor az adott görbe definícióját használjuk fel.
- Látókörívek: egy téglalap egyik oldala a szomszédos oldal mely pontjából látszik a legnagyobb szögben (színház, sportpálya).
- Szerkesztési feladatokban: háromszög szerkesztése egy oldal, a vele szemközti szög és az oldalhoz tartozó magasság ismeretében, vagy adott. egy pont és egy egyenes, szerkesszük meg az egyenest érintő, a ponton áthaladó, adott sugarú köröket.
- Parabolaantennák.
- Két tanya közös postaládát kap az országút mentén. Hova helyezzék, hogy mindkét tanyától egyenlő távolságra legyen?

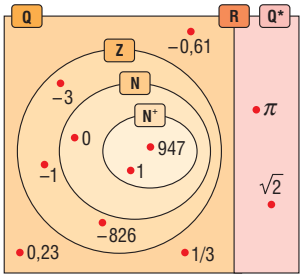


Az egyenlet jobb oldalán szereplő (a^2) szám prímtényezős felbontásában a 2 mindenféleképpen páros kitevőn (akár a nulladikon) szerepel, míg a bal oldalon levő szám ($2 \cdot b^2$) prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páratlan (legkevesebb 1).
Ez azonban lehetetlen, hiszen a számelmélet alaptétele szerint egy pozitív egész számnak nincs két lényegesen különböző felbontása.
Tehát nem igaz az indirekt feltevésünk, vagyis igaz az eredeti állítás: $\sqrt{2}$ irracionális.

Tulajdonságok:

– Az irracionális számok halmaza nem zárt a 4 alapműveletre $\left(\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)\right)=0\notin\mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\notin\mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2}:\sqrt{2}=1\notin\mathbb{Q}^*$.
– Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört.

DEFINÍCIÓ: A racionális és az irracionális számok halmaza diszjunkt halmazok ($\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}^*=\varnothing$), a két halmaz egyesítése a valós számok halmaza: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^*$.
A valós számok halmaza zárt a 4 alapműveletre.
A valós számok és részhalmazai:



II. Műveletek a racionális számok halmazán

Egy közönséges tört értéke nem, csak az alakja változik, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk (bővítés), vagy ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk (egyszerűsítés).
Ha a racionális számok közönséges tört alakúak, akkor a következő szabályokkal lehet elvégezni az alapműveleteket:

- **Összeadás és kivonás:**
  Csak azonos nevezőjű törteket lehet összeadni, kivonni, ezért a törteket bővítjük egy közös többszörösű nevezőre (legjobb, ha a legkisebb közös többszörösű nevezőre, mert így tudunk a legkisebb számokkal számolni):

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}\pm\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d\pm c\cdot b}{b\cdot d},\ \text{ahol}\ \ b,d\neq 0.$$

  Ha a nevezők (b és d) relatív prímek, akkor a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk.

- **Szorzás:**
  Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\ \text{ahol}\ \ b,d\neq 0.$$

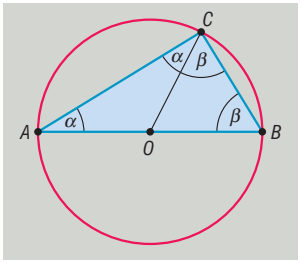
  Egész számmal úgy szorzunk törtet, hogy törtként írjuk fel a szorzót $\left(c=\frac{c}{1}\right)$, vagyis igazából a számlálót megszorozzuk, a nevezőt változatlanul hagyjuk.

- **Osztás:**
  Törtet törttel úgy osztunk, hogy a változatlan osztandót szorozzuk az osztó reciprokával:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\ \text{ahol}\ \ b,c,d\neq 0.$$

TÉTEL: Thalész-tétel: ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.

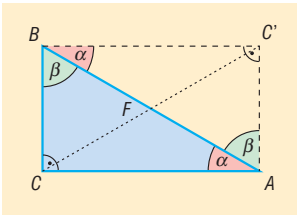
BIZONYÍTÁS: O középpontú kör, AB átmérő, C tetszőleges pont a körvonalon.



$OA = OC = r \Rightarrow OAC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OAC\sphericalangle = OCA\sphericalangle = \alpha$.
$OC = OB = r \Rightarrow OBC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OBC\sphericalangle = BCO\sphericalangle = \beta$.
Az ABC háromszög belső szögeinek összege $180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow ACB\sphericalangle = 90^\circ$.

TÉTEL: Thalész-tétel megfordítása: ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

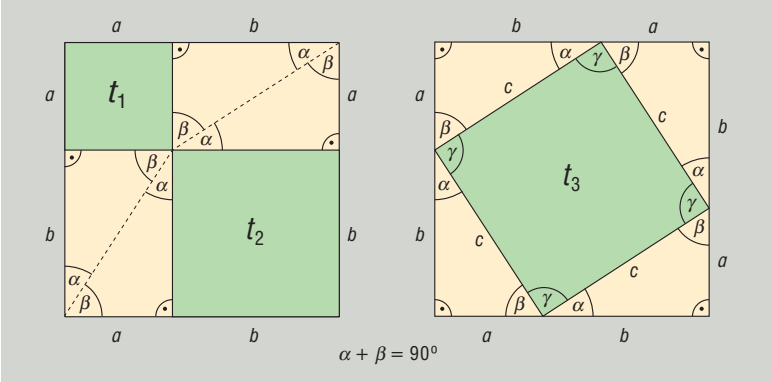
BIZONYÍTÁS: ABC derékszögű háromszöget tükrözzük az átfogó F felezőpontjára. A tükrözés tulajdonságai miatt $BC = AC'$ és $CA = BC'$ és $AC' = BC'$ szögei 90°-osak. A téglalap átlói egyenlők és felezik egymást $\Rightarrow FA = FB = FC \Rightarrow F$ az ABC háromszög köré írt kör középpontjával egyenlő.



TÉTEL: Thalész-tétel és megfordítása összefoglalva: a sík azon pontjainak halmaza, amelyekből egy megadott szakasz derékszögben látszik, a szakaszhoz, mint átmérőhöz tartozó kör, elhagyva belőle a szakasz végpontjait.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: ha egy háromszög derékszögű, akkor a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

BIZONYÍTÁS: (14. tétel)



$a^2 + b^2 + 4t = c^2 + 4t$
$a^2 + b^2 = c^2$

Ha mindkét oldal értelmes, vagyis nemnegatív, akkor a hatványozás azonosságából következik a két oldal egyenlősége.

TÉTEL: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ha a, b nemnegatív valós számok, $b \neq 0$.

Tört négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával.

TÉTEL: $\sqrt{a^k} = \left(\sqrt{a}\right)^k$, ha k egész, $a > 0$ valós szám.

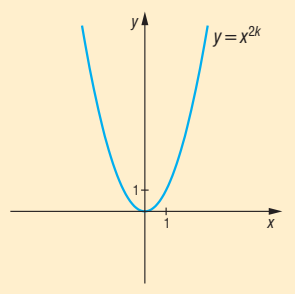
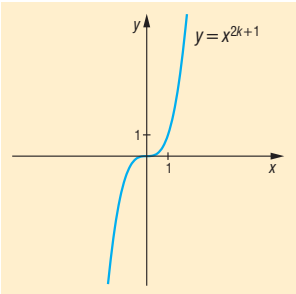
A hatványozás és a gyökvonás sorrendje felcserélhető egymással pozitív alap esetén.
Figyelni kell arra, hogy a négyzetre emelés és a négyzetgyökvonás sorrendje nem cserélhető fel, ha az alap negatív. Így általánosan: $\sqrt{a^2} = |a|$.

VI. Hatványfüggvények és azok tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvényt, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, hatványfüggvénynek nevezzük.

A hatványfüggvények értelmezhetőek $n = 0$ esetre is, de ettől most eltekintünk.
A hatványfüggvény vizsgálatát két részre kell bontanunk aszerint, hogy n páros-e vagy páratlan.

Jellemzés:

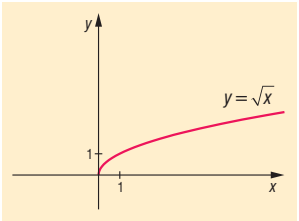
A függvény	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2k+1}$
ábrázolása:		
értelmezési tartománya:	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
értékkészlete:	nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
monotonitása:	ha $x < 0$, akkor szigorúan monoton csökken, ha $x > 0$, akkor szigorúan monoton nő	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	abszolút minimuma van az $x = 0$ helyen, a minimum értéke $f(x) = 0$.	nincs
görbülete:	alulról konvex	ha $x < 0$, akkor alulról konkáv, ha $x > 0$, akkor alulról konvex
zérushelye:	$x = 0$	$x = 0$
paritása:	páros: $f(-x) = f(x)$	páratlan, vagyis $g(-x) = -g(x)$
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos.	nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható, ha $x \geq 0$: inverze az $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ függvény	invertálható: inverze az $g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ függvény

Görbület szempontjából külön kell venni az $n = 1$ esetet: ekkor a függvény se nem konvex, se nem konkáv.
A hatványfüggvények folytonosak, minden pontban deriválhatóak, minden korlátos intervallumon integrálhatóak.

VII. Négyzetgyökfüggvény és tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Az $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ függvényeket négyzetgyökfüggvényeknek nevezzük.

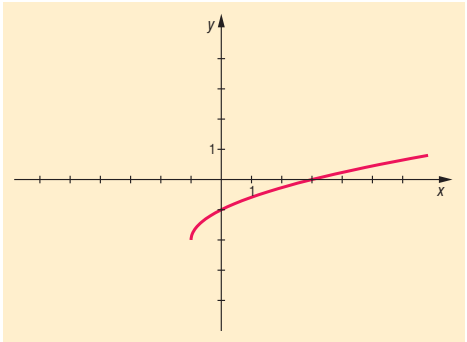
Jellemzés:

A függvény	$f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$
ábrázolása:	
értelmezési tartománya:	nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$
értékkészlete:	nemnegatív valós számok halmaza: $\mathbb{R}_0^+$
monotonitása:	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	abszolút minimuma van az $x = 0$ helyen, a minimum értéke $f(x) = 0$.
görbülete:	alulról konkáv
zérushelye:	$x = 0$
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az $f^{-1}\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = x^2$ függvény

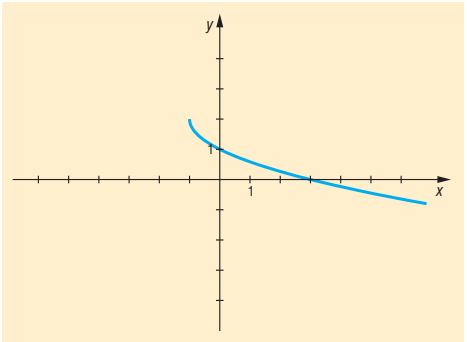
A gyökfüggvények folytonosak, differenciálhatóak, integrálhatóak.

Példák négyzetgyökfüggvényre:

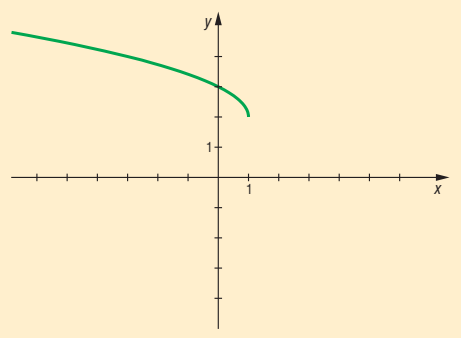
$f(x) = \sqrt{x+1} - 2$



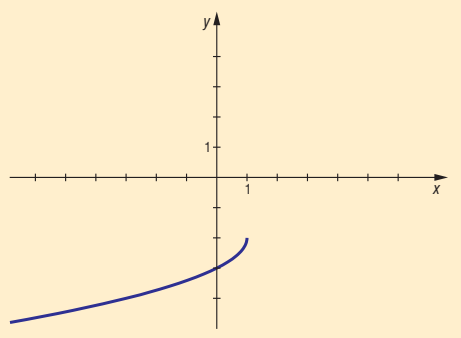
$f(x) = -\sqrt{x+1} + 2$



$f(x)=\sqrt{1-x}+2=\sqrt{-(x-1)}+2$



$f(x)=-\sqrt{1-x}-2=-\sqrt{-(x-1)}-2$



VIII. Alkalmazások:

Hatványozás:

- Prímtényezős felbontásban pozitív egész kitevőjű hatványok, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma
- Normálalakban: egyszerűbb a kicsi és a nagy számokkal való műveletek elvégzése
- A számrendszerek felépítése a hatványozáson alapul
- Mértani sorozat: a_n, S_n kiszámolása
- Ismétléses variációk száma: n^k
- Hasonló testek felszínének aránya λ^2, térfogatának aránya λ^3
- Kamatos kamat számítása
- Négyzetes úttörvény: $s=\frac{a}{2}\cdot t^2$
- Radioaktív bomlás
- Mértékegységváltás
- Binomiális eloszlás
- Nevezetes azonosságok

Gyökvonás:

- Magasabb fokú egyenletek megoldása
- Pitagorasz-tétel (négyzetre emelés, gyökvonás)
- Mértani közép (gyökvonás)
- Magasság-, illetve befogótétel (négyzetre emelés, gyökvonás)
- Kocka élének, vagy gömb sugarának kiszámolása a térfogatból
- l hosszúságú fonálinga lengésideje: $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
- h magasságból szabadon eső test sebessége: $v=\sqrt{2gh}$
- Kamatos kamatnál a kamattényező kiszámítása
- Harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciájának kiszámítása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Már időszámításunk kezdetén ismerték kínai matematikusok a négyzetgyök és köbgyök fogalmát, a mai jelölésrendszere a XVI. században alakult ki.
- A XIII. századi kínai matematikusok az egyenletet meg tudták oldani, azaz tetszőleges pozitív számból tudtak gyököt vonni.
- **Oresmicus** (1323–1382) francia matematikus foglalkozott először a törtkitevős hatványokkal.
- **Stifel** (1487–1567) német matematikus írta le a nulladik és a negatív egész kitevőjű hatványokat.

TÉTEL: Hatvány logaritmusa az alap logaritmusának és a kitevőnek a szorzata:

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x, \text{ ahol } x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

TÉTEL: Áttérés más alapú logaritmusra:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ ahol } a, b, c > 0,\ a, c \neq 1.$$

BIZONYÍTÁS: A logaritmus definíciója alapján: $b = a^{\log_a b}$.

Írjuk fel: $\log_c b = \log_c a^{\log_a b} = \log_a b \cdot \log_c a$,

a logaritmus definíciója és a hatvány logaritmusa miatt.

Kaptuk: $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$ /: $\log_c a \neq 0$ a feltételek miatt.

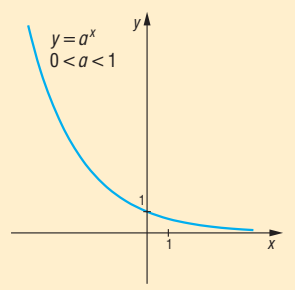
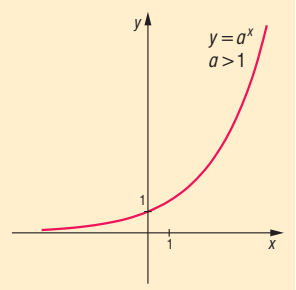
Így: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. Ez a bizonyítandó állítás.

III. Exponenciális függvény

DEFINÍCIÓ: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.

Az $a = 1$ esetén az exponenciális függvény konstans: $f(x) = 1^x = 1$.

Jellemzés:

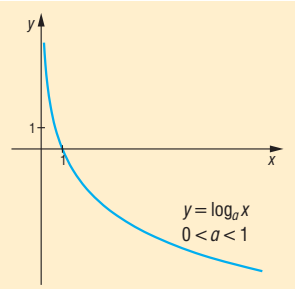
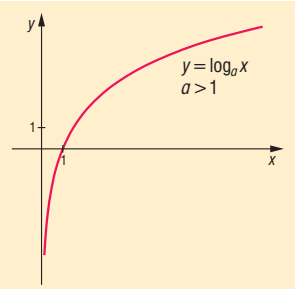
A függvény	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ esetben	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$, $1 < a$ esetben
ábrázolása:		
értelmezési tartománya:	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
értékkészlete:	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
monotonitása:	szigorúan monoton csökken	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	nincs	nincs
görbülete:	alulról konvex	alulról konvex
zérushelye:	nincs	nincs
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos	alulról korlátos, felülről nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ függvény	invertálható: inverze az $g^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \log_a x$ függvény

Az exponenciális függvény folytonos, differenciálható, integrálható.

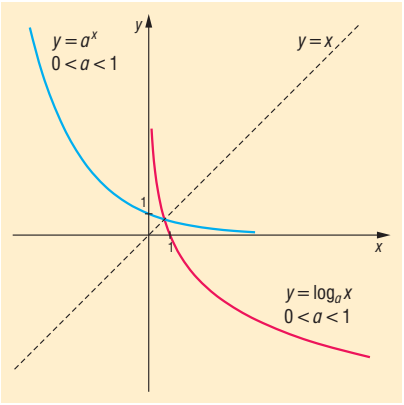
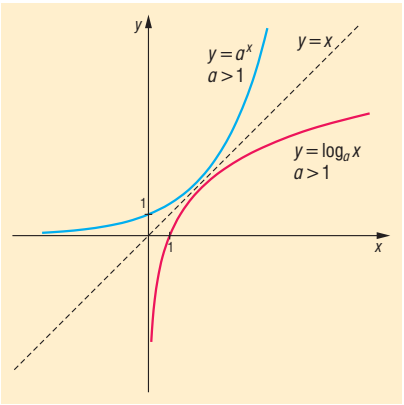
IV. Logaritmusfüggvény

DEFINÍCIÓ: Az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.

Jellemzés:

A függvény	$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$ esetben	$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$, $1 < a$ esetben
ábrázolása:		
értelmezési tartománya:	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
értékkészlete:	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
monotonitása:	szigorúan monoton csökken	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	nincs	nincs
görbülete:	alulról konvex	alulról konkáv
zérushelye:	$x = 1$	$x = 1$
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	nem korlátos	nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = a^x$ $(0 < a < 1)$ függvény	invertálható: inverze az $g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = a^x$ $(1 < a)$ függvény

A logaritmusfüggvény folytonos, differenciálható, integrálható.
Kapcsolat az exponenciális és a logaritmusfüggvények között:

$0 < a < 1$	**$1 < a$**
	

Az exponenciális függvény $a \neq 1$ esetén invertálható, inverze az $f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$ logaritmusfüggvény.

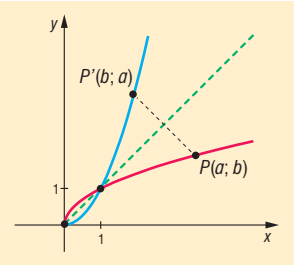
A logaritmusfüggvény invertálható, inverze az $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$ exponenciális függvény.

V. Inverzfüggvény

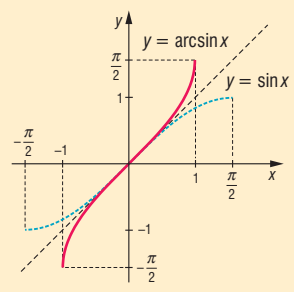
DEFINÍCIÓ: Az f függvény **inverze** a g függvény, ha az f értelmezési tartományának minden x elemére igaz, hogy $f(x)$ eleme a g értelmezési tartományának és $g(f(x)) = x$. Az inverz függvény jelölése: $g = f^{-1}$.
Ha az f és a g függvények egymásnak inverzei, akkor az f értelmezési tartománya a g értékkészlete, az f értékkészlete a g értelmezési tartománya.
Ha két függvény egymásnak inverzei, akkor grafikonjaik egymásnak tükörképei az $y = x$ egyenletű egyenesre.

A definícióból következik, hogy csak a kölcsönösen egyértelmű függvényeknek van inverze, azaz egy függvény pontosan akkor invertálható, ha az értékkészlet minden eleme az értelmezési tartomány pontosan egy eleméhez van hozzárendelve.
Például: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ függvény és a $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_2 x$ függvény egymás inverzei, ugyanis $g(f(x)) = \log_2 2^x = x$, illetve $f(g(x)) = 2^{\log_2 x}$, valamint az egyik függvény értelmezési tartománya a másik függvény értékkészlete és viszont.
A nem kölcsönösen egyértelmű függvényeknek nincs inverze. Ezek a függvények gyakran az értelmezési tartomány szűkítésével invertálhatóvá tehetők.
Például:

1. a másodfokú függvény értelmezési tartományának szűkítésével invertálható, ha $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ akkor inverze a $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = \sqrt{x}$.



2. a szinusz függvény inverze az értelmezési tartományának $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra való szűkítésén az arkusz szinusz függvény.

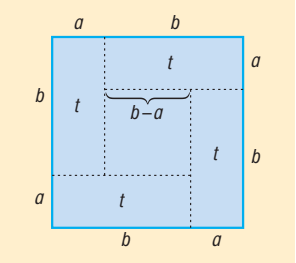


Inverz függvény előállítása:
Egy kölcsönösen egyértelmű függvény inverze algebrai úton előállítható a változók felcserélésével a következő módon:

1. $f(x) = 2x - 3$ függvény inverzének előállítása: $y = 2x - 3$ kifejezésben a változókat felcseréljük: $x = 2y - 3$, majd ebből az egyenletből az y változót kifejezzük: $y = \frac{x+3}{2}$, ebből

BIZONYÍTÁS II.: Legyen $0 < a \le b$.

Vegyünk fel egy $a + b$ oldalú négyzetet, és az oldalait osszuk fel az ábrán látható módon!



A nagy négyzet területe egyenlő a keletkező részek területének összegével:

$$(a + b)^2 = 4t + (b - a)^2$$

A kis téglalap területe: $t = ab$.

Mivel $(b - a)^2 \ge 0$, ezért ezt a tagot elhagyva az $(a + b)^2 \ge 4t$ egyenlőtlenséghez jutunk.

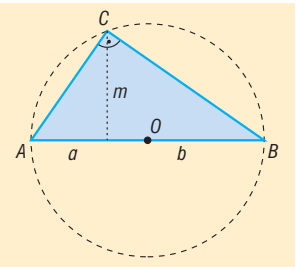
Behelyettesítve t helyére: $(a + b)^2 \ge 4ab$.

Mivel a feltétel miatt mindkét oldal pozitív, ezért gyököt vonhatunk: $a + b \ge 2\sqrt{ab}$.

Amiből $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

BIZONYÍTÁS III.: Legyen $a, b > 0$, $2r = a + b$.

Vegyünk fel egy r sugarú kört, benne egy AB átmérőt, a körvonalon egy A, B-től különböző C pontot.



A Thalész-tétel miatt $ACB\sphericalangle = 90°$.

ABC háromszögre alkalmazva a magasságtételt: $m = \sqrt{ab}$.

De a körben $m \le r$, azaz $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$.

VI. Nevezetes középértékek alkalmazása szélsőérték-feladatokban

1. Összeg állandósága esetén a szorzatot tudjuk maximalizálni.

Pl.: Azon téglatestek közül, amelyek éleinek összege 60 cm, melyiknek a térfogata maximális?
Legyenek a téglatest élei: a, b és c.
Ekkor a téglatest térfogata $V = abc$, az élek összege: $4(a + b + c) = 60$.
Ebből $a + b + c = 15$.
A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget kihasználva:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc \Rightarrow \left(\frac{15}{3}\right)^3 \ge abc \Rightarrow 5^3 \ge abc \Rightarrow 125 \ge V.$$

Mivel egyenlőség csak $a = b = c$ esetén teljesül, így a térfogat az 5 cm élű kocka esetén maximális.

DEFINÍCIÓ: lokális (helyi) szélsőérték: Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **lokális maximum**a van, ha az x_0-nak van olyan I környezete, amelynek minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) \leq f(x_0)$. Az x_0 helyet lokális (helyi) maximumhelynek nevezzük.

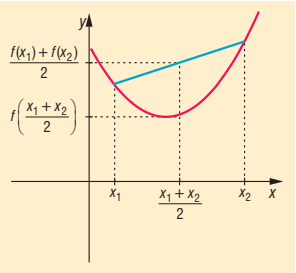
Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **lokális minimum**a van, ha az x_0-nak van olyan I környezete, amelynek minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) \geq f(x_0)$. Az x_0 helyet lokális (helyi) minimumhelynek nevezzük.

A monotonitás és a szélsőérték definíciójából következik, hogy ahol a függvény monotonitást vált, ott lokális szélsőértéke van.

DEFINÍCIÓ: görbület: A függvényt egy intervallumban **konvex**nek nevezzük, ha az intervallum bármely két x_1, x_2 pontjára teljesül az $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ egyenlőtlenség.

Ha az egyenlőtlenség fordított irányú, akkor a függvény **konkáv** az adott intervallumon.

Szemléletesen a konvex (illetve konkáv) görbékre jellemző, hogy a görbe bármely két pontját összekötő szakasz a görbe felett (illetve alatt) halad.



DEFINÍCIÓ: inflexió: A függvénygörbének azt a pontját, ahol a görbe konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe megy át, **inflexiós pont**nak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: pontbeli folytonosság: Az f függvény az értelmezési tartománynak egy x_0 pontjában **folytonos,** ha létezik az x_0 pontban határértéke és az megegyezik a helyettesítési értékkel, vagyis $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Globális függvénytulajdonságok: értelmezési tartomány, értékkészlet, globális (abszolút) szélsőérték, paritás, periodikusság, intervallumbeli folytonosság, korlátosság.

DEFINÍCIÓ: globális (abszolút) szélsőérték: Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **globális maximum**a van, ha minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) < f(x_0)$. Az x_0 helyet globális maximumhelynek nevezzük.

Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **globális minimum**a van, ha minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) > f(x_0)$. Az x_0 helyet globális minimumhelynek nevezzük.

Tehát a szélsőérték abszolút (globális) szélsőérték x_0-ban, ha az értelmezési tartomány minden pontjára igazak az egyenlőtlenségek.

DEFINÍCIÓ: paritás: Az f függvény **páros**, ha értelmezési tartományának minden x elemére $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) = f(-x)$.

Az f függvény **páratlan**, ha értelmezési tartományának minden x elemére $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) = -f(-x)$.

A páros függvénynek a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre. (pl. $x \mapsto x^{2n}$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \cos x$).

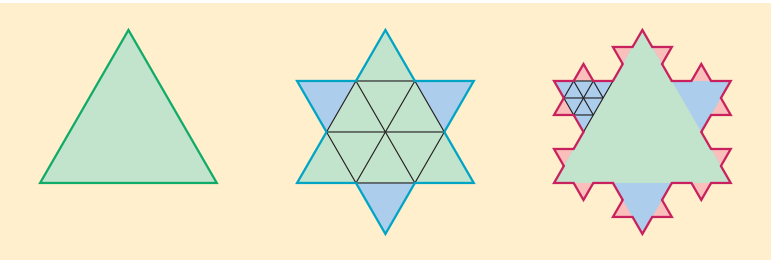
A páratlan függvények grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra. (pl. $x \mapsto x^{2n+1}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$).

VII. Alkalmazások:

- Végtelen szakaszos tizedes törtek közönséges tört alakra hozásakor a konvergens mértani sor tulajdonságait használjuk
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q|<1 \\ \infty, & \text{ha } q>1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q\le -1 \\ 1, & \text{ha } q=1 \end{cases}$. Ez a mértani sorozat
- Az $N = N_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$ bomlási törvényben, ahol N a még el nem bontott részecskék száma, N_0 a kezdeti részecskeszám, λ az anyagra jellemző bomlási állandó. A felezési idő alatt a radioaktív atomok száma a kezdeti érték felére csökken, akármelyik pillanat az idő mérésének kezdete
- Exponenciális függvénnyel írható le, azaz mértani sorozat szerint változó folyamatok pl a radioaktív izotópok bomlási egyenletei, vagy az oldódás folyamata, a kondenzátor feltöltődésének és kisülésének folyamata, baktériumok számának változása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A legrégebbi írásos emléken, a **Rhind-papíruszon** (~Kr. e. 1750 körül) található egy mértani sorozatos feladat: 7 ház mindegyikében 7 macska él, mindegyik macska 7 egeret őriz. Hány egér volt összesen? Valószínűleg az egyiptomiak ismerték a mértani sorozat összegképletének kiszámítási módját (nem magát a képletet, hanem a módszert).
- A mértani sorozat összegképletét az 1300-as években **Beldomandi** olasz matematikus találta ki.
- **Koch** (1870–1924) svéd matematikus megalkotta a **Koch-görbét**: egy szabályos háromszög oldalait harmadoljuk, a középső harmad fölé írjunk kifele egy újabb szabályos háromszöget, majd ezen a háromszögön hajtsuk végre az oldal harmadolását, a középső harmad fölé írjunk kifele egy újabb szabályos háromszöget, majd ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. Mekkora a kialakult alakzat kerülete, területe? Megoldás végtelen mértani sorral.



11. A differenciálhányados fogalma, deriválási szabályok. A differenciálszámítás alkalmazásai (érintő, függvényvizsgálat, szélsőértékfeladatok)

Vázlat:

I. Függvény fogalma, értelmezési tartomány, értékkészlet
II. Differenciálhányados
III. Deriválási szabályok
IV. A differenciálszámítás alkalmazásai:
Függvény érintője
Függvényvizsgálat
Szélsőérték-feladatok
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Függvény fogalma, értelmezési tartomány, értékkészlet

DEFINÍCIÓ: Legyen A és B két nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy megadunk egy A halmazon értelmezett B-beli értéket felvevő **függvény**t, ha A minden eleméhez hozzárendeljük a B egy és csakis egy elemét. Jele: $f\colon A \to B$.

DEFINÍCIÓ: Értelmezési tartománynak nevezzük az A halmazt. Jele D_f.

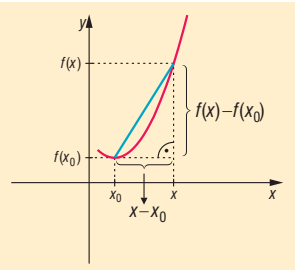
DEFINÍCIÓ: Értékkészlet a B halmaz azon elemeiből álló halmaz, amelyek a hozzárendelésnél fellépnek (vagyis az $f(x)$ értékek). Jele az R_f.

DEFINÍCIÓ: Ha $c \in D_f$, akkor a c helyen felvett függvényértéket $f(c)$-vel jelöljük, ez a helyettesítési vagy **függvényérték**.

DEFINÍCIÓ: Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet is számhalmaz, akkor a függvényt grafikonon tudjuk szemléltetni. A **grafikon** az $(x; f(x))$ pontok halmaza.

II. Differenciálhányados

DEFINÍCIÓ: Legyen f egy $]a, b[$ intervallumon értelmezett függvény és x_0 az értelmezési tartomány egy pontja. Ekkor a $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt az f függvény x_0 ponthoz tartozó különbségi hányados (**differenciahányados**) függvényének nevezzük.



12. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek. A hegyesszögek szögfüggvényei. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között. A szögfüggvények általánosítása

Vázlat:

I. Derékszögű háromszögek definíciója
II. Pitagorasz-tétel és megfordítása
A Thalész-tétel és megfordítása
Magasságtétel, befogótétel
Beírt kör sugarára vonatkozó tétel
III. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója
IV. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között
V. A szögfüggvények általános definíciója
VI. Kapcsolatok egyazon szög szögfüggvényei közt
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Derékszögű háromszögek

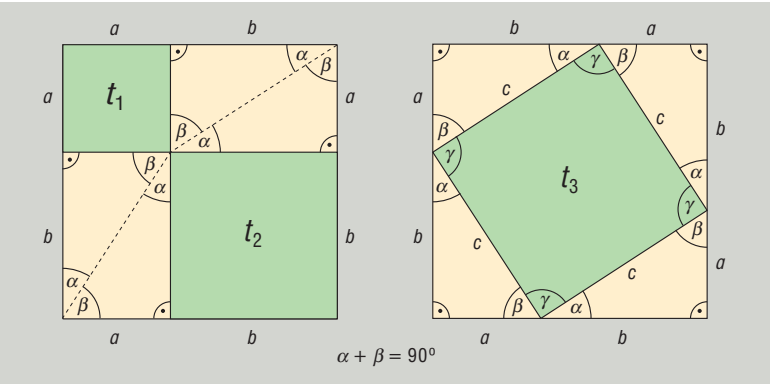
DEFINÍCIÓ: Azokat a háromszögeket, amelyeknek valamely szöge 90º, azaz derékszög, **derékszögű háromszög**eknek nevezzük.
A derékszöget bezáró két oldalt befogónak, a derékszöggel szemközti, egyben a leghosszabb oldalt átfogónak nevezzük.

II. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek

A derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek közül a Pitagorasz-tétel teremt kapcsolatot a háromszög oldalai között.

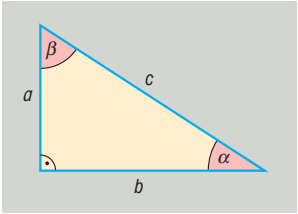
TÉTEL: Pitagorasz-tétel: Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

BIZONYÍTÁS I.: Bizonyítani kell: $a^2 + b^2 = c^2$.
Vegyünk fel két $a + b$ oldalú négyzetet. A két négyzet területe egyenlő.



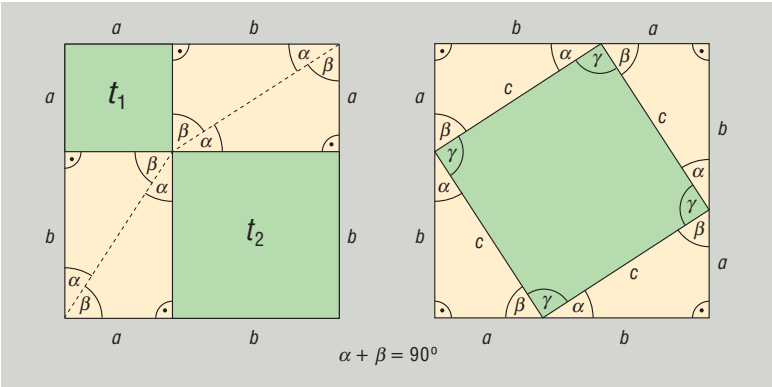
Az első négyzet felosztható egy $t_1 = a^2$ és egy $t_2 = b^2$ területű négyzetre (a felosztásából eredő párhuzamosság miatt), továbbá 4 olyan derékszögű háromszögre, amelynek befogói a, illetve b. Ez a 4 háromszög egybevágó egymással és az eredeti háromszöggel, tehát területük egyenlő.

A második négyzetben elhelyezkedő négyszög négyzet, mivel oldalai egyenlő hosszúak (egybevágó derékszögű háromszögek átfogói), szögei pedig 90°-osak (egybevágó derékszögű háromszögben $\alpha + \beta = 90°$). Ha a derékszögű háromszögek átfogója c, akkor területe $t_3 = c^2$.



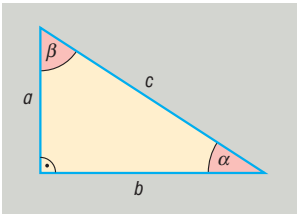
Mindkét nagy négyzet területéből kivonva a 4-4 egybevágó háromszög területét, a fennmaradó területek egyenlők lesznek.

BIZONYÍTÁS II.: Vegyünk fel egy derékszögű háromszöget, amelynek befogói a és b, és egy $a + b$ oldalú négyzetet. A négyzetben helyezzük el a háromszögeket:



ABCD négyszög négyzet, mert oldalai egyenlők (c), és szögei 90°-osak ($\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$), így az $a + b$ oldalú négyzet területe kétféleképpen: $t = (a + b)^2$, illetve $t = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$, azaz

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2 \;\Rightarrow\; a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = c^2 .$$

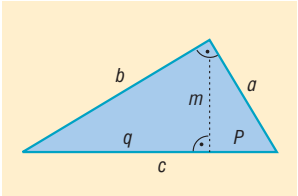


BIZONYÍTÁS III.: Befogótétellel

Befogótétel miatt:

$$a = \sqrt{p \cdot c}, \quad \text{illetve} \quad b = \sqrt{q \cdot c} = \sqrt{(c-p) \cdot c} .$$

Ebből $a^2 = p \cdot c$, illetve $b^2 = (c - p) \cdot c = c^2 - p \cdot c$.



Összeadva az utolsó két egyenlőséget:

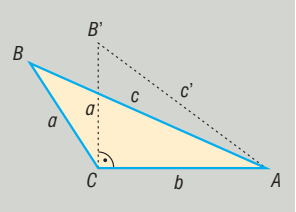
$$a^2 + b^2 = p \cdot c + c^2 - p \cdot c = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

BIZONYÍTÁS IV.: Koszinusztétellel

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\underbrace{\cos 90°}_{0} = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 .$$

TÉTEL: A Pitagorasz-tétel megfordítása: ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

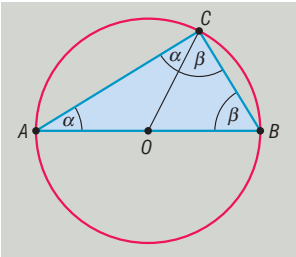
BIZONYÍTÁS:



Tudjuk, hogy az ABC háromszög oldalaira igaz: $a^2 + b^2 = c^2$. Az a, b befogókkal rajzolunk egy $AB'C$ derékszögű háromszöget, amelyre Pitagorasz tétele miatt $a^2 + b^2 = (c')^2 \Rightarrow c^2 = (c')^2 \Rightarrow c = c'$. Ekkor az ABC ill. $AB'C$ háromszög oldalai páronként megegyeznek $\Rightarrow$ a két háromszög egybevágó $\Rightarrow$ megfelelő szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ C-nél ABC háromszögben derékszög van.

TÉTEL: Thalész-tétel: ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.

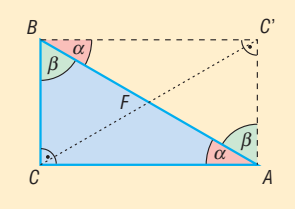
BIZONYÍTÁS: O középpontú kör, AB átmérő, C tetszőleges pont a körvonalon.



$OA = OC = r \Rightarrow$ Az OAC háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow$ $OAC\sphericalangle = OCA\sphericalangle = \alpha$.
$OC = OB = r \Rightarrow$ Az OBC háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow$ $OBC\sphericalangle = BCO\sphericalangle = \beta$.
Az ABC háromszög belső szögeinek összege $180°$ $\Rightarrow$ $2\alpha + 2\beta = 180°$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 90°$ $\Rightarrow$ $ACB\sphericalangle = 90°$.

TÉTEL: A Thalész-tétel megfordítása: ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

BIZONYÍTÁS: Az ABC derékszögű háromszöget tükrözzük az átfogó F felezőpontjára. A tükrözés tulajdonságai miatt $BC = AC'$ és $CA = BC'$ és $AC' = BC'$ szögei $90°$-osak. A téglalap átlói egyenlők és felezik egymást $\Rightarrow$ $FA = FB = FC \Rightarrow$ F az ABC háromszög köré írt kör középpontjával egyenlő.



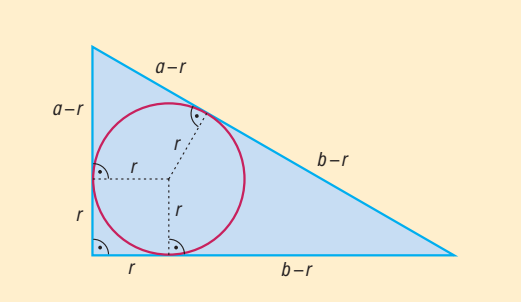
TÉTEL: Thalész-tétel és megfordítása összefoglalva: a sík azon pontjainak halmaza, amelyekből egy megadott szakasz derékszögben látszik, a szakaszhoz, mint átmérőhöz tartozó kör, elhagyva belőle a szakasz végpontjait.

TÉTEL: Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.

TÉTEL: Befogótétel: Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

TÉTEL: Beírt kör sugarára vonatkozó tétel: Derékszögű háromszög átfogója a két befogó összegével és a beírt kör sugarával kifejezve: $c = a + b - 2r$.

BIZONYÍTÁS: Körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $c = a - r + b - r = a + b - 2r$.



A Thalész-tétel miatt $c = 2R$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara. Ebből és az előző tételből következik: $2R = a + b - 2r \Rightarrow R + r = \frac{a+b}{2}$.

III. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója

A hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszögekkel is bevezethetjük. Kihasználjuk, hogy a két derékszögű háromszög hasonló, ha valamely hegyesszögük megegyezik. A hasonlóság következtében egy derékszögű háromszög oldalainak arányát a háromszög egyik hegyesszöge egyértelműen meghatározza. Erre a függvényszerű kapcsolatra vezetjük be a szögfüggvényeket:

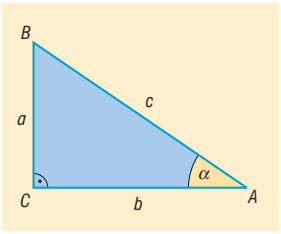
DEFINÍCIÓ: Az α hegyesszöget tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben

$\sin\alpha$ = az α-val szemközti befogó hosszának és az átfogó hosszának hányadosa;

$\cos\alpha$ = az α melletti befogó hosszának és az átfogó hosszának a hányadosa;

$\mathrm{tg}\alpha$ = az α-val szemközti befogó hosszának és az α melletti befogó hosszának a hányadosa;

$\mathrm{ctg}\alpha$ = az α melletti befogó hosszának és az α-val szemköztes befogó hosszának a hányadosa.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b},\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

IV. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között

A definíciók alapján könnyen igazolhatók a következő **azonosságok**, ahol $0° < \alpha < 90°$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

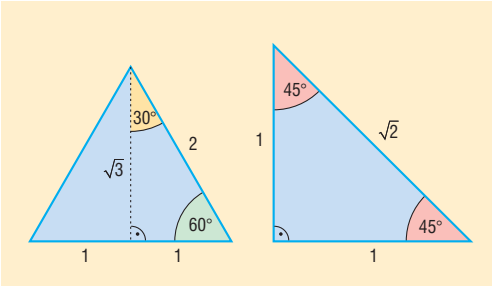
$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha),\quad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha),\quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

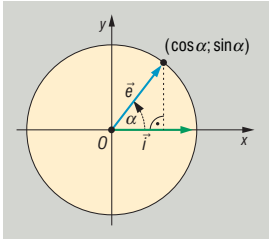
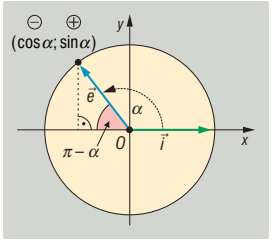
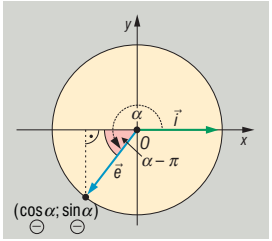
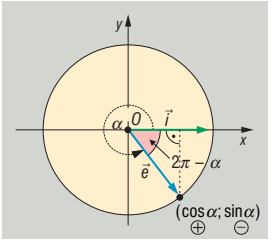
Nevezetes szögek szögfüggvényei:

	sin	**cos**	**tg**	**ctg**
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



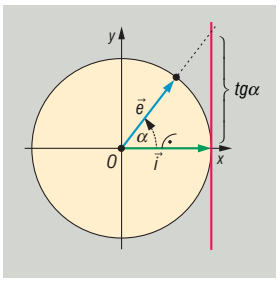
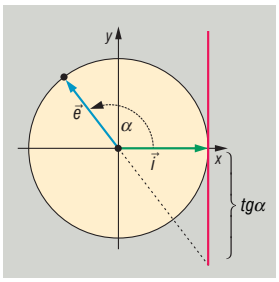
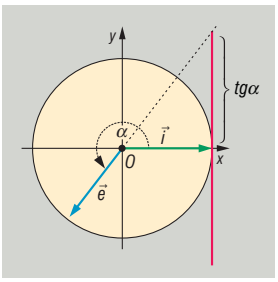
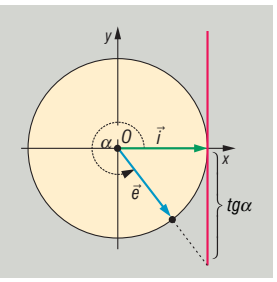
V. Szögfüggvények általánosítása

DEFINÍCIÓ: A **koordináta-rendszer**ben az $\underline{i}(1; 0)$ bázisvektor origó körüli α szöggel való elforgatásával keletkező $\underline{e}$ egységvektor első koordinátája az α **szög koszinusza**, második koordinátája az α **szög szinusza**.

$\alpha \in$ I.	$\alpha \in$ II.	$\alpha \in$ III.	$\alpha \in$ IV.
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
			
	$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$	$\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$ $\sin\alpha = -\sin(\alpha - \pi)$	$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$ $\sin\alpha = -\sin(2\pi - \alpha)$

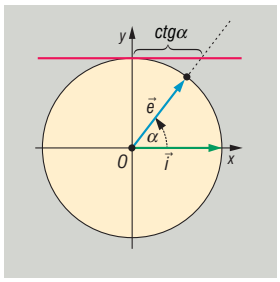
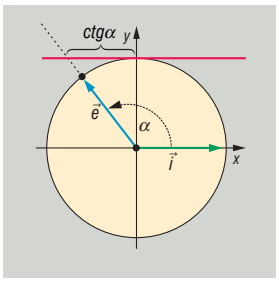
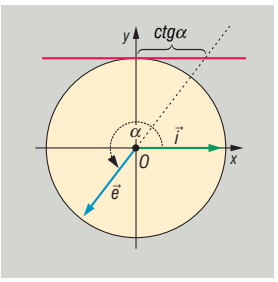
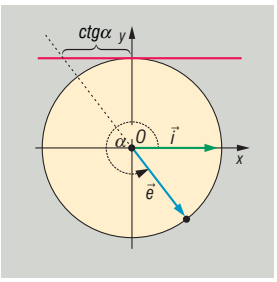
DEFINÍCIÓ: A $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ hányadost, ha $\cos\alpha \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, az α szög tangensének nevezzük.

A **koordináta-rendszer**ben az i vektortól α szöggel elforgatott e egységvektor egyenese által az origó középpontú, egységsugarú kör (1; 0) pontjában húzott érintőből kimetszett pont 2. koordinátája az α **szög tangense**.

$\alpha \in$ I.	$\alpha \in$ II.	$\alpha \in$ III.	$\alpha \in$ IV.
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
			
	$\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}(\pi - \alpha)$	$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\alpha - \pi)$	$\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}(2\pi - \alpha)$

DEFINÍCIÓ: A $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ hányadost, ha $\sin\alpha \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, az α szög kotangensének nevezzük.

A **koordináta-rendszer**ben az i vektortól α szöggel elforgatott e egységvektor egyenese által az origó középpontú, egységsugarú kör (0;1) pontjában húzott érintőből kimetszett pont 1. koordinátája az α **szög kotangense**.

$\alpha \in$ I.	$\alpha \in$ II.	$\alpha \in$ III.	$\alpha \in$ IV.
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
			
	$\mathrm{ctg}\alpha = -\mathrm{ctg}(\pi - \alpha)$	$\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha - \pi)$	$\mathrm{ctg}\alpha = -\mathrm{ctg}(2\pi - \alpha)$

VI. Kapcsolatok egyazon szög szögfüggvényei között

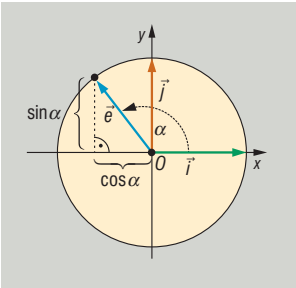
TÉTEL: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$, ha $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$, ha $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq k\frac{\pi}{2}\right)$

TÉTEL: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ minden valós α-ra (Pitagoraszi összefüggés).

BIZONYÍTÁS: A szögfüggvények definíciója szerint az α irányszögű $\underline{e}$ egységvektor koordinátái: $(\cos\alpha; \sin\alpha)$.



Egyrészt az egységvektor hossza 1: ($|\underline{e}| = 1$), másrészt az $\underline{e}$ vektor hossza: $|\underline{e}| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} =$ $= \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$.

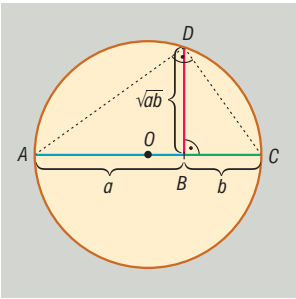
Ebből $1 = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$. Mivel nemnegatív számok állnak a két oldalon, négyzetre emeléssel: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

KÖVETKEZMÉNY: tetszőleges α szög esetén:

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \text{illetve} \quad |\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

VII. Alkalmazások:

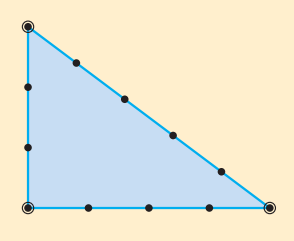
- Pitagorasz-tétel:
  - síkgeometria: háromszög, trapéz magasságának számolása
  - koordinátageometria: két pont távolsága, vektor hossza
- Thalész-tétel:
  - síkgeometria: körhöz külső pontból húzott érintők szerkesztése
  - koordinátageometria.: érintők egyenlete
- Magasságtétel:
  - mértani közép szerkesztése



- Forgásszögek szögfüggvényei:
  - Háromszög trigonometrikus területképlete
  - Szinusztétel, koszinusztétel
  - Négyszög területe: $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin\alpha}{2}$ (e, f átlók, α = átlók szöge)
  - Rezgőmozgás kitérés-idő, sebesség-idő, gyorsulás-idő függvénye trigonometrikus függvény

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A derékszögű háromszögekről fennmaradt első írásos emlékek a **Rhind-papírusz**on kb. Kr. e. 1750-ből találhatók: ismerték a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszöget.
- Kr. e. 2000 körül az **egyiptomi papok** derékszögszerkesztésre csomózott kötelet használtak, amihez ismerniük kellett a Pitagorasz-tételt: terepen a derékszög kitűzését 12 csomós kötél és 3 karó segítségével: végezték.



- **Kínában** Kr. e. 1200 és 1100 közötti naptárban olyan rajz látható, amely azt mutatja, hogy ismerték a Pitagorasz-tételt legalább a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszög esetében. Ezen a rajzon egy 3+4 egység oldalú négyzet kerületén van a belső 5 egység hosszúságú négyzet csúcspontjai (a Pitagorasz-tétel I. bizonyításában szereplő ábrához hasonlóan).
- **Pitagorasz** a Kr. e. VI. században az ókori Görögországban élt, tételét viszont már a babilóniaiak 4000 évvel ezelőtt is ismerték, Pitagoraszhoz csak azért fűződik a tétel, mert rájött egy új bizonyításra.
- **Thalész** szintén a Kr. e. VI. században élt az ókori Görögországban, az első olyan matematikus volt, akinek bizonyítási igénye volt. Neki tulajdonítják a szög fogalmának kialakítását.
- **Ptolemaiosz** görög csillagász a Kr. u. II. században 30 percenkénti beosztással készített „húrtáblázatokat”, ami a később kialakult trigonometrikus függvények elődei voltak.
- A trigonometrikus függvények közti összefüggések és azonosságok felfedésében nagy érdemei vannak **Viète** (1540–1603) francia matematikusnak.

13. Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei

Vázlat:

I. Oldalfelező merőlegesek, a háromszög köré írt kör középpontja
II. Szögfelezők, háromszögbe, illetve háromszöghöz írt kör középpontja
III. Magasságvonalak, a háromszög magasságpontja
IV. Súlyvonalak, a háromszög súlypontja
V. Középvonalak
VI. Euler-egyenes, Feuerbach-kör
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

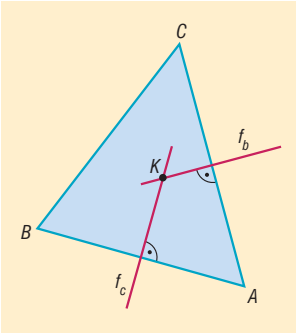
I. Oldalfelező merőlegesek, a háromszög köré írt kör középpontja

DEFINÍCIÓ: A síkon egy **szakasz felezőmerőlegese** az az egyenes, amely a szakasz felezőpontjára illeszkedik és merőleges a szakaszra.

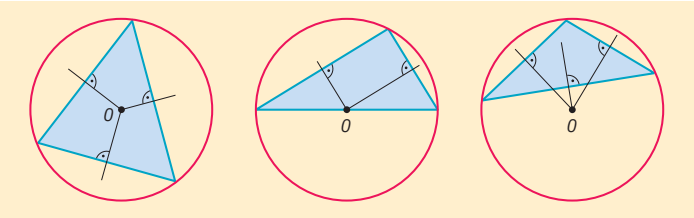
TÉTEL: A szakasz felezőmerőlegese a szakasz két végpontjától egyenlő távol lévő pontok halmaza.

TÉTEL: A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást. Ez a pont a **háromszög köré írt kör középpont**ja.

BIZONYÍTÁS: ABC háromszögben AB és AC oldalfelező merőlegeseit tekintsük. Ezek az egyenesek metszik egymást, mert a háromszög oldalai nem párhuzamosak egymással. Legyen a két oldalfelező merőleges metszéspontja K. Ekkor K egyenlő távolságra van A-tól és B-től (mert K illeszkedik f_c-re), illetve A-tól és C-től (mert K illeszkedik f_b-re) is. Következésképpen egyenlő távol van B-től és C-től is, azaz K illeszkedik BC szakaszfelező merőlegesére. $\Rightarrow$ $KA = KB = KC$, azaz A, B és C egyenlő távolságra vannak K-tól $\Rightarrow$ mindhárom pont illeszkedik egy K középpontú $KA = KB = KC = r$ sugarú körre.



K hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül, derékszögű háromszögnél az átfogó felezőpontjába (Thalész tétele), tompaszögű háromszögnél a háromszögön kívül esik.



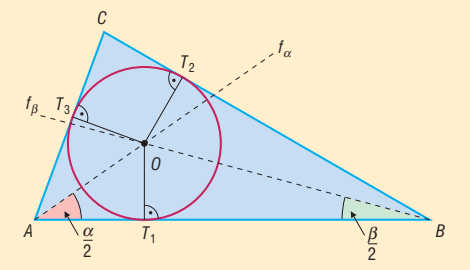
II. Szögfelezők, háromszögbe, illetve háromszöghöz írt kör középpontja

DEFINÍCIÓ: Egy konvex szög **szögfelező**je a szög csúcsából kiinduló, a szögtartományban haladó azon félegyenes, amely a szöget két egyenlő nagyságú szögre bontja.

TÉTEL: Egy konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a szögfelező.

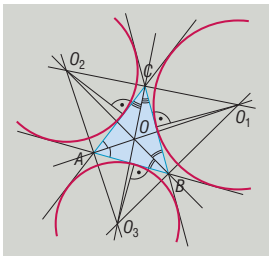
TÉTEL: A háromszög három belső szögfelezője egy pontban metszi egymást. Ez a pont a **háromszögbe írt kör középpontja**.

BIZONYÍTÁS:



Két belső szögfelező metszéspontjáról belátjuk, hogy rajta van a harmadikon. Vegyük fel az α és β szögfelezőjét: f_α és f_β. Ez a két félegyenes metszi egymást, mert $0° < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 180°$. Így f_α és f_β metszéspontja az O pont. A szögfelező a szög száraitól egyenlő távol lévő pontok halmaza a szögtartományban, így mivel O illeszkedik f_α-ra $\Rightarrow OT_1 = OT_3$, illetve O illeszkedik f_β-ra $\Rightarrow OT_1 = OT_2$, tehát $OT_2 = OT_3$, vagyis O egyenlő távol van az AC és a CB szögszáraktól, így O illeszkedik f_γ-ra, azaz O az f_α, f_β és f_γ egyetlen közös pontja.
A bizonyítás során kiderült, hogy O egyenlő távol van a háromszög oldalaitól, ezért köréje egy olyan kör írható, amely a háromszög oldalait érinti.

TÉTEL: A háromszög egy belső, és a másik két csúcshoz tartozó külső szögfelezője egy pontban metszi egymást, ez a pont **a háromszög hozzáírt körének középpontja**. A háromszögnek 3 hozzáírt köre van.



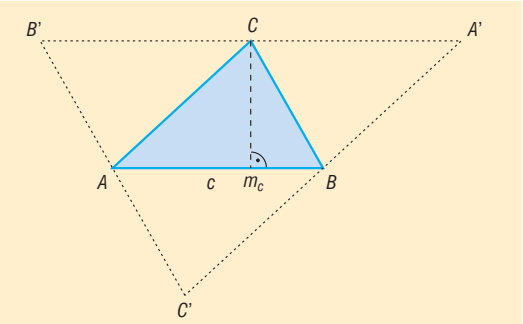
TÉTEL: A háromszög ugyanazon szögének külső és belső szögfelezője merőleges egymásra.

III. Magasságvonalak, a háromszög magasságpontja

DEFINÍCIÓ: A háromszög **magasság**a az egyik csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges szakasz. A háromszög magasságának egyenese a háromszög **magasságvonal**a.

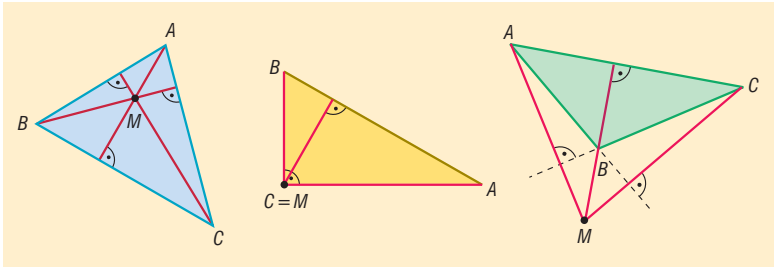
TÉTEL: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög **magasságpontja**.

BIZONYÍTÁS: Visszavezetjük a háromszög oldalfelező merőlegeseire vonatkozó tételre.



Vegyük fel az ABC háromszöget, és mindhárom csúcsán keresztül húzzunk párhuzamos egyenest a szemközti oldallal. $\Rightarrow$ $A'B'C'$ háromszög.
Belátjuk, hogy m_c az $A'B'$ oldalfelező merőlegese: m_c merőleges AB-re és $A'B'$ párhuzamos AB-vel $\Rightarrow$ m_c merőleges $A'B'$-re. AB párhuzamos $A'B'$-vel és BC párhuzamos $B'C'$-vel $\Rightarrow$ $ABCB'$ paralelogramma $\Rightarrow$ $CB' = AB$, hasonlóan $ABA'C$ paralelogramma $\Rightarrow$ $A'C = AB$, ebből $B'C = CA'$ $\Rightarrow$ C felezőpontja $A'B'$-nek $\Rightarrow$ m_c oldalfelező merőlegese $A'B'$-nek.
Hasonlóan belátható, hogy m_a és m_b is az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező merőlegesei. Az oldalfelező merőlegesekre vonatkozó tétel alapján tudjuk, hogy ezek egy pontban metszik egymást, tehát beláttuk, hogy az ABC háromszög magasságvonalai is egy pontban metszik egymást.

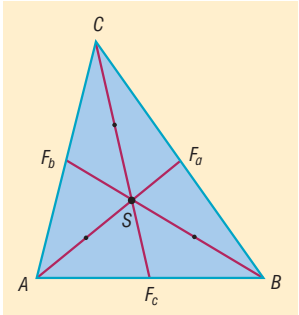
A magasságpont hegyesszögű háromszög esetén a háromszög belsejében, derékszögű háromszögnél a derékszögű csúcsban, tompaszögű háromszögnél a háromszögön kívül helyezkedik el.



IV. Súlyvonalak, a háromszög súlypontja

DEFINÍCIÓ: A háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz a **háromszög súlyvonala**.

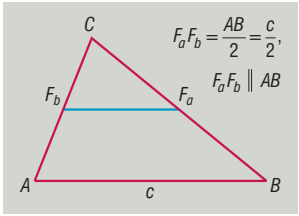
TÉTEL: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ezt a pontot a háromszög **súlypont**jának nevezzük. A súlypont harmadolja a súlyvonalakat úgy, hogy a csúcs felé eső szakasz úgy aránylik az oldal felé eső szakaszhoz, mint 2 : 1.



V. Középvonalak

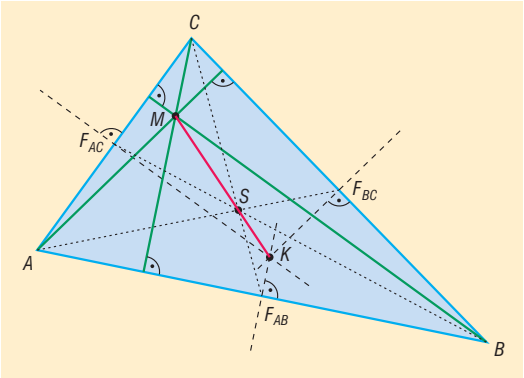
DEFINÍCIÓ: A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszt a **háromszög középvonalának** nevezzük.
Minden háromszögnek 3 középvonala van.

TÉTEL: A háromszög középvonala párhuzamos a felezőpontokat nem tartalmazó oldallal, és fele olyan hosszú.

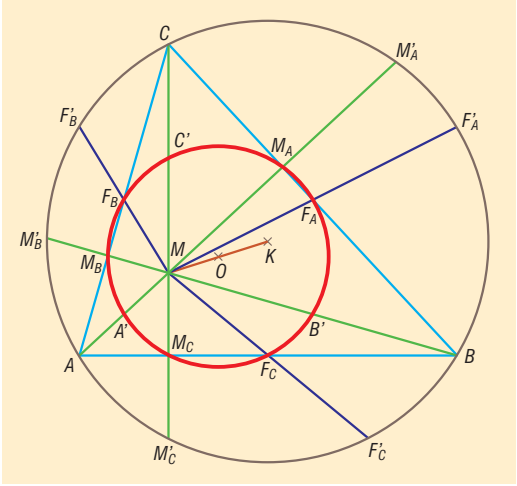


VI. Euler-egyenes, Feuerbach-kör

TÉTEL: A háromszög magasságpontja, súlypontja és a körülírt kör középpontja egy egyenesen van (**Euler-féle egyenes**). A súlypont a másik kettő távolságát harmadolja és a körülírt kör középpontjához van közelebb.



TÉTEL: Egy háromszög oldalainak felezőpontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak **(Feuerbach-kör)**.
A Feuerbach-kör középpontja (O) felezi a magasságpontot (M) és a köré írható kör középpontját (K) összekötő szakaszt, sugara a háromszög köré írható kör sugarának a fele. Vagyis az M pontból a köré írt kör $\lambda = \frac{1}{2}$-es arányú kicsinyített képe a Feuerbach-kör.



14. Összefüggések az általános háromszögek oldalai között, szögei között, oldalai és szögei között

Vázlat:

I. Háromszögek csoportosítása szögeik és oldalaik szerint
II. Összefüggések a háromszög oldalai között (háromszög-egyenlőtlenségek, Pitagorasz-tétel)
III. Összefüggések a háromszög szögei között (belső, külső szögek)
IV. Összefüggések a háromszög szögei és oldalai között (koszinusztétel, szinusztétel, szögfüggvények)
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Háromszögek csoportosítása szögeik és oldalaik szerint

DEFINÍCIÓ: Háromszög az a zárt szögvonal, amelyeknek 3 oldala és 3 csúcsa van.

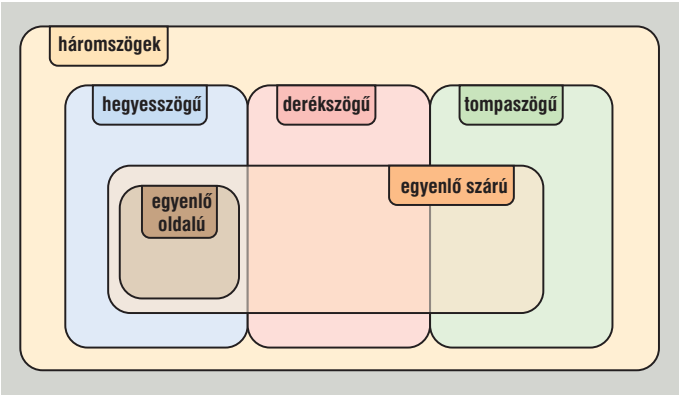
DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **hegyesszögű**, ha minden szöge hegyesszög.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **derékszögű**, ha van egy 90°-os szöge.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **tompaszögű**, ha van egy tompaszöge.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **szabályos** (vagy egyenlő oldalú), ha három oldala egyenlő hosszú.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **egyenlő szárú** (vagy szimmetrikus), ha van két egyenlő oldala.



II. Összefüggések a háromszög oldalai közt

TÉTEL: Háromszög-egyenlőtlenségek: a háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadiknál: $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

TÉTEL: Egy háromszögben bármely két oldal különbségének abszolút értéke kisebb a harmadiknál: $|a - c| < b$, $|a - b| < c$, $|b - c| < a$.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: Bármely derékszögű háromszögben a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

III. Összefüggések a háromszög szögei közt

TÉTEL: A háromszög belső szögeinek összege 180º.

TÉTEL: A háromszög külső szögeinek összege 360º.

TÉTEL: A háromszög egy külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

IV. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

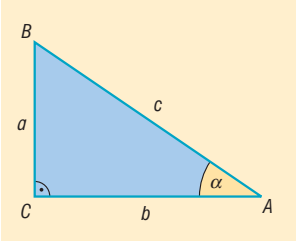
TÉTEL: Egy háromszögben egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő nagyságú szögek vannak, egyenlő nagyságú szögekkel szemben egyenlő hosszúságú oldalak vannak.

TÉTEL: Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabbikkal szemben nagyobb belső szög van, mint a rövidebbikkel szemben, illetve két szög közül a nagyobbikkal szemben hosszabb oldal van, mint a kisebbikkel szemben.

DEFINÍCIÓ: Derékszögű háromszögben bevezetjük a **szögfüggvények** fogalmát a hasonló háromszögek tulajdonságait kihasználva:

- $\sin\alpha$ az α szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa,
- $\cos\alpha$ az α szög melletti befogó és az átfogó hányadosa,
- $\mathrm{tg}\alpha$ az α szöggel szemközti befogó és az α szög melletti befogó hányadosa,
- $\mathrm{ctg}\alpha$ az α szög melletti befogó és az α szöggel szemközti befogó hányadosa.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b},\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$



TÉTEL: Szinusztétel: Egy háromszögben két oldal hosszának aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszának arányával:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

A szinusztétel a háromszög három oldalára is felírható, ekkor $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Szinusztétel alkalmazása:

- Ha adott a háromszög egy oldala és két szöge, akkor bármely oldal kiszámolható (mert ekkor kiszámolható a belső szögösszegből a harmadik szög).
- Ha adott a háromszög két oldala és nem az általuk közbezárt szög ismert, akkor két eset lehetségséges:
  - Ha a két oldal közül a nagyobbikkal szemköztes szög ismert, akkor kiszámolható a kisebbik oldallal szemköztes szög. Ebben az esetben a háromszög egyértelműen meghatározott.
  - Ha a háromszög két oldalát és a rövidebbel szemköztes szöget ismerjük, akkor kiszámolható a nagyobbik oldallal szemköztes szög, amire háromféle megoldás is lehet:
    1. ha a szög szinuszára pozitív, de 1-nél kisebb értéket kapunk, akkor két megoldás van, a szög lehet hegyesszög és tompaszög is. Ekkor a háromszög nem egyértelműen meghatározott, két ilyen háromszög létezik.

2. ha a szög szinuszára 1-et kapunk, akkor egy megoldás van, a szög 90º, ez egy derékszögű háromszög.
3. ha a szög szinuszára 1-nél nagyobb számot kapunk, akkor nincs ilyen szög, azaz nincs az adatoknak megfelelő háromszög.

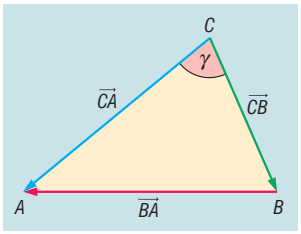
Ebben az esetben inkább a koszinusztételt alkalmazzuk, ekkor másodfokú egyenletet kapunk a harmadik oldalra, így viszont egyértelműen eldönthető az oldal hossza (a másodfokú egyenletnek 0, 1, 2 megoldása van, illetve feltétel, hogy az oldal hossza pozitív, vagy a háromszög-egyenlőtlenség is segíthet abban, hogy eldöntsük, hogy melyik eredmény megoldása a feladatnak).

TÉTEL: Koszinusztétel: egy háromszög egyik oldalhosszának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetösszegéből kivonjuk a két oldal hosszának és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

BIZONYÍTÁS: Vektorok skaláris szorzatának felhasználásával fogjuk bizonyítani, ezért a háromszög oldalait irányítjuk:

$$\overrightarrow{CB} = \underline{a}\,,\quad \overrightarrow{CA} = \underline{b}\,,\quad \overrightarrow{BA} = \underline{c}\,.$$

Jelölje $|\underline{a}| = a$, $|\underline{b}| = b$ és $|\underline{c}| = c$.



Ekkor $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$. Az egyenlet mindkét oldalát önmagával skalárisan szorozva:

$$\underline{c}^2 = (\underline{a} - \underline{b})^2 \;\Rightarrow\; \underline{c}^2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2\,.$$

$$\underline{c}^2 = |\underline{c}| \cdot |\underline{c}| \cdot \cos 0^\circ = c \cdot c \cdot 1 = c^2\,.$$

Hasonlóan $\underline{a}^2 = a^2$ és $\underline{b}^2 = b^2$.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma = a \cdot b \cdot \cos\gamma\,.$$

Ezeket beírva a $\underline{c}^2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2$ egyenletbe kapjuk: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Következmények:

- ha $\gamma = 90^\circ$, vagyis a háromszög derékszögű, akkor $c^2 = a^2 + b^2$, ami a Pitagorasz-tétel.
- ha $\gamma < 90^\circ$, akkor bármely két oldalának négyzetösszege nagyobb a harmadik oldal négyzeténél.
- ha $\gamma > 90^\circ$, akkor a két rövidebb oldal négyzetösszege kisebb a harmadik oldal négyzeténél.

Koszinusztétel alkalmazása:

- Ha adott a háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög, akkor kiszámítható a szöggel szembeni oldal.
- Ha adott a háromszög három oldala, akkor kiszámolható a háromszög bármely szöge.
  Ha keressük a háromszög szögeit, akkor ebben az esetben a háromszög legnagyobb szögét érdemes kiszámolni koszinusztétellel, ami a leghosszabb oldallal szemben van, mert az hegyes-, derék- és tompaszögre is egyértelmű megoldást ad.

15. Egybevágósági transzformációk, alakzatok egybevágósága. Szimmetria. Hasonlósági transzformációk. Hasonló síkidomok kerülete, területe, hasonló testek felszíne, térfogata. A hasonlóság alkalmazásai síkgeometriai tételek bizonyításában

Vázlat:

I. Egybevágósági transzformációk
Eltolás, tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó tükrözés, pont körüli elforgatás
II. Alakzatok egybevágósága (háromszögek, sokszögek)
III. Szimmetria
IV. Hasonlósági transzformáció:
Középpontos hasonlósági transzformáció
V. Alakzatok hasonlósága (háromszögek, sokszögek)
VI. Transzformációk tulajdonságai
VII. Hasonló síkidomok kerülete, területe, hasonló testek felszíne, térfogata
VIII. Hasonlóság alkalmazása síkgeometriai tételek bizonyításában: háromszögekre vonatkozó tételekben
a) középvonalra vonatkozó tétel
b) súlyvonalakra vonatkozó tétel
c) szögfelezőtétel
d) magasságtétel
e) befogótétel
IX. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

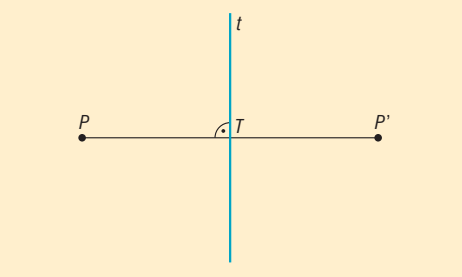
Kidolgozás:

I. Transzformációk

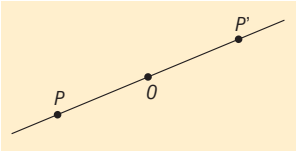
DEFINÍCIÓ: Geometriai transzformációk azok a függvények, amelyek egy ponthalmazt ponthalmazra képeznek le. ($D_f = R_f =$ ponthalmaz)

DEFINÍCIÓ: A geometriai transzformációk közül a távolságtartó transzformációkat **egybevágósági transzformáció**knak nevezzük.
Távolságtartó leképezés: bármely két pont távolsága egyenlő képeik távolságával.
Síkbeli egybevágósági transzformációk: tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó (középpontos) tükrözés, pont körüli elforgatás, eltolás, és ezek egymás utáni alkalmazása.

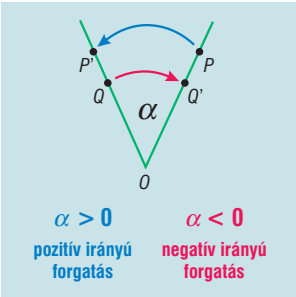
DEFINÍCIÓ: Tengelyes tükrözés: adott a sík egy t egyenese, ez a tengelyes tükrözés tengelye. A t tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés a sík tetszőleges t-re nem illeszkedő P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre fennáll, hogy a PP' szakasz felezőmerőlegese a t tengely. A t egyenes képe önmaga.



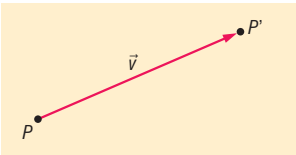
DEFINÍCIÓ: Középpontos tükrözés: adott a sík egy O pontja, a középpontos tükrözés középpontja. Az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés a sík egy tetszőleges O-tól különböző P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre az O pont a PP' szakasz felezőpontja. Az O pont képe önmaga.



DEFINÍCIÓ: Pont körüli forgatás: adott a sík egy O pontja és egy α irányított szög. Az O pont körüli α szögű, adott irányú forgatás a sík egy tetszőleges O-tól különböző P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre teljesül, hogy POP' szög irány és nagyság szerint megegyezik α-val és $OP = OP'$. O pont képe önmaga.



DEFINÍCIÓ: Eltolás: adott egy $\underline{v}$ vektor. A $\underline{v}$ vektorral való eltolás a sík (tér) tetszőleges P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre $\overrightarrow{PP'} = \underline{v}$.



II. Alakzatok egybevágósága (háromszögek, sokszögek)

DEFINÍCIÓ: Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. Jele: $A \cong B$.

TÉTEL: Két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha:
- megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő,
- két-két oldaluk hossza páronként egyenlő és az ezek által közbezárt szögek nagysága egyenlő,
- két-két oldaluk hossza páronként egyenlő és e két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközti szögük nagysága egyenlő,
- egy-egy oldaluk hossza páronként egyenlő és két-két szögük páronként egyenlő.

TÉTEL: Két sokszög akkor és csak akkor egybevágó, ha a következő feltételek egyike teljesül:
- megfelelő oldalaik hossza és a megfelelő átlóik hossza páronként egyenlő,
- megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

III. Szimmetria

DEFINÍCIÓ: Ha egy ponthalmazhoz található olyan t egyenes, amelyre vonatkozó tükörképe önmaga, akkor ez a ponthalmaz **tengelyesen szimmetrikus,** amelynek t a szimmetriatengelye.

VI. Transzformációk főbb tulajdonságai

	Egybevágósági transzformációk				Hasonlóság: középpontos hasonlósági transzformáció
	tengelyes tükrözés	középpontos tükrözés	pont körüli elforgatás	eltolás	
fixpont (képe önmaga)	a t egyenes minden pontja	egyetlen fixpont: O pont	egyetlen fixpont: O pont (ha $\alpha \neq 0°$)	nincs fixpontja (ha $\underline{v} \neq \underline{0}$)	egyetlen fixpont: O pont (ha $\lambda \neq 1$)
fixegyenes (minden pontja fixpont)	a t egyenes	nincs fixegyenes	nincs fix egyenes (ha $\alpha \neq 0°$)	nincs fixegyenes	nincs fixegyenes (ha $\lambda \neq 1$)
invariáns egyenes (képe önmaga, de pontonként nem fix)	a t-re merőleges egyenesek	minden O-ra illeszkedő egyenes invariáns	nincs invariáns egyenes (ha $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$)	az adott vektorral párhuzamos egyenesek	minden O-ra illeszkedő egyenes invariáns (ha $\lambda \neq 1$)

VII. Hasonló síkidomok kerülete, területe, hasonló testek felszíne, térfogata

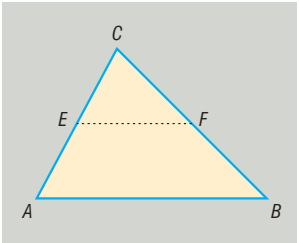
TÉTEL: Hasonló síkidomok kerületének aránya megegyezik a hasonlóság arányával, területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével: $\frac{k_1}{k_2} = \lambda$ és $\frac{t_1}{t_2} = \lambda^2$.

TÉTEL: Hasonló testek felszínének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével: $\frac{A_1}{A_2} = \lambda^2$ és $\frac{V_1}{V_2} = \lambda^3$.

VIII. Hasonlóság alkalmazása síkgeometriai tételek bizonyításában: háromszögekre vonatkozó tételekben

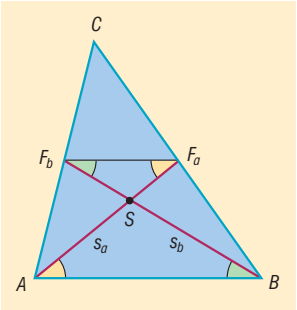
TÉTEL: A háromszög középvonalaira vonatkozó tétel: A háromszög középvonala párhuzamos a felezőpontokat nem tartalmazó oldalakkal, és fele olyan hosszú, mint a nem felezett oldal.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál az ABC és EFC háromszögek hasonlóságát használjuk.



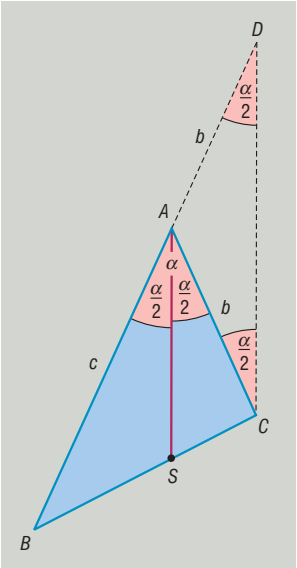
TÉTEL: A háromszög súlyvonalaira vonatkozó tétel: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont mindhárom súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál az ASB és SF_aF_b háromszögek hasonlóságát használjuk.



TÉTEL: Szögfelezőtétel: Egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

BIZONYÍTÁS: Az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelező BC oldalt az S pontban metszi.



A BA szakaszt hosszabbítsuk meg A-n túl és legyen $AD = b$. Ekkor $AD = AC = b$, ebből következik, hogy az ACD háromszög egyenlő szárú, a C-nél és a D-nél levő belső szögek egyenlők, az A-nál levő külső szög α.

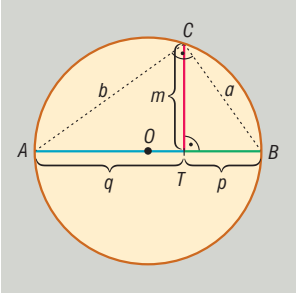
Tudjuk, hogy a háromszög külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos belső szögek összegével, tehát $ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$.

Ekkor viszont $BAS\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. Ebből következik, hogy az $AS \parallel CD$. A B csúcsnál levő szögre alkalmazva a párhuzamos szelők tételét kapjuk: $\frac{CS}{SB} = \frac{DA}{AB} = \frac{AC}{AB}$.

TÉTEL: Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál a *TBC* és *TAC* háromszögek hasonlóságát használjuk.

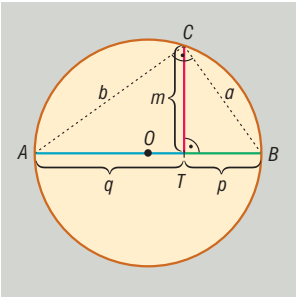
$$\frac{m}{p}=\frac{q}{m} \Rightarrow m^2=p\cdot q \Rightarrow m=\sqrt{p\cdot q}$$



TÉTEL: Befogótétel: Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál a *TBC* és az *ABC* háromszögek hasonlóságát használjuk.

$$\frac{a}{p}=\frac{c}{a} \Rightarrow a^2=p\cdot c \Rightarrow a=\sqrt{p\cdot c}$$



VII. Alkalmazások:

- A kör kerületének és területének meghatározását végezhetjük a körbe, illetve a kör köré írt szabályos sokszögek kerületének, illetve területének segítségével. Ez egyben π értékének közelítése.
- Aranymetszés aránya = szabályos ötszög átlóinak osztásaránya
- Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése derékszögű háromszögek hasonlóságán alapul
- Hasonlóságot használnak a térképészetben, az építészetben (tervek, makettek), az optikai lencsék alkalmazásakor
- Szakasz egyenlő részekre osztása párhuzamos szelők tételének segítségével történik.

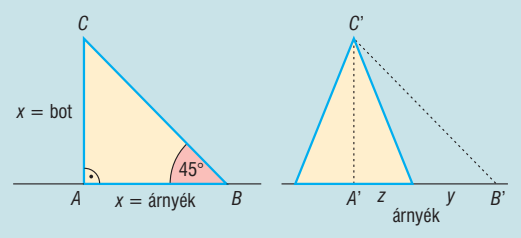
Matematikatörténeti vonatkozások:

- **Eukleidész** Kr. e. 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében meghatározta a geometriai alapszekesztések axiómáit, egybevágósággal és hasonlósággal kapcsolatos tételeket. Pl. hasonló körszeletek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint húrjaik négyzetei.
- **Thalész** Kr. e. VI. században élt az ókori Görögországban, kiszámolta az egyiptomi piramisok magasságát a hasonlóság segítségével:
  Egy földbe szúrt bot segítségével mérte a piramisok magasságát: amikor a bot és az árnyéka egyenlő hosszú, akkor a piramis árnyéka is egyenlő a piramis magasságával, így elegendő

csak a piramis árnyékát és alapját megmérni, mert ezekből már számolható a piramis magassága:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} = 1$$

$$A'B' = A'C' = y + z$$



- Az egybevágóság jelét (≅) **Leibniz** (1646–1716) német matematikus vezette be.

16. Konvex sokszögek tulajdonságai. Szabályos sokszögek. Gráfok

Vázlat:

I. Konvex sokszögek tulajdonságai
II. Szabályos sokszögek
III. Gráfok
IV. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

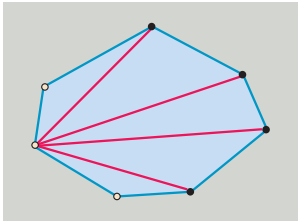
Kidolgozás

I. Konvex sokszögek tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Egy sokszög **konvex,** ha bármely két belső pontját összekötő szakasz minden pontja a sokszög belső pontja.

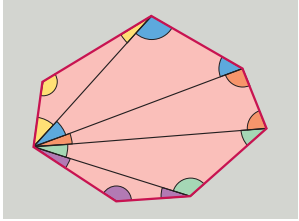
TÉTEL: Egy n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

BIZONYÍTÁS: Az n oldalú, vagyis n csúcsú konvex sokszög minden csúcsából $n-3$ darab átló húzható (nem húzható átló a két szomszédos csúcsba és saját magába). Így n csúcsból $n \cdot (n-3)$ átló húzható. Ekkor viszont minden átlót kétszer számoltunk, mert figyelembe vettük a kezdőpontjánál és a végpontjánál is. Ezért az összes átló száma $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.



TÉTEL: Egy n oldalú konvex sokszög **belső szögeinek összege** $(n-2) \cdot 180°$.

BIZONYÍTÁS: A konvex sokszög egy csúcsából $n-3$ átló húzható (nem húzható átló a két szomszédos csúcsba és saját magába). Ez az $n-3$ darab átló $n-2$ darab háromszögre bontja a sokszöget. Egy háromszög belső szögeinek összege 180°, így az $n-2$ darab háromszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$, ami éppen a sokszög belső szögeinek összegét adja.



DEFINÍCIÓ: A konvex sokszög belső szögeinek mellékszögeit a sokszög **külső szög**einek nevezzük.

TÉTEL: Egy n oldalú konvex sokszög **külső szögeinek összege** 360°.

BIZONYÍTÁS: A konvex sokszög egy belső szögének és a hozzá tartozó külső szögnek az összege 180°, mert mellékszögpárt alkotnak. Így az n csúcsnál levő belső szög-külső szög párok összege $n \cdot 180°$. Ebből levonva a belső szögek összegét, megkapjuk a külső szögek összegét: $n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = (n - (n-2)) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$.

II. Szabályos sokszögek

DEFINÍCIÓ: Egy sokszög **szabályos,** ha minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge egyenlő.

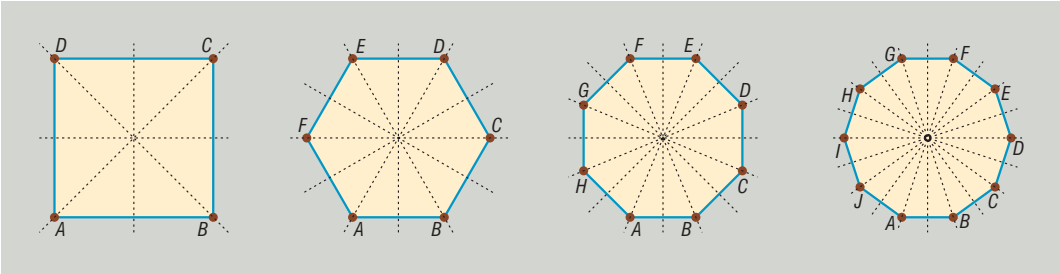
TÉTEL: Egy n oldalú szabályos sokszög **egy belső szöge** $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

BIZONYÍTÁS: A konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$, ami éppen n darab egyenlő szög összege, mert a belső szögek egyenlők. Így egy belső szög nagysága ennek az n-ed része: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

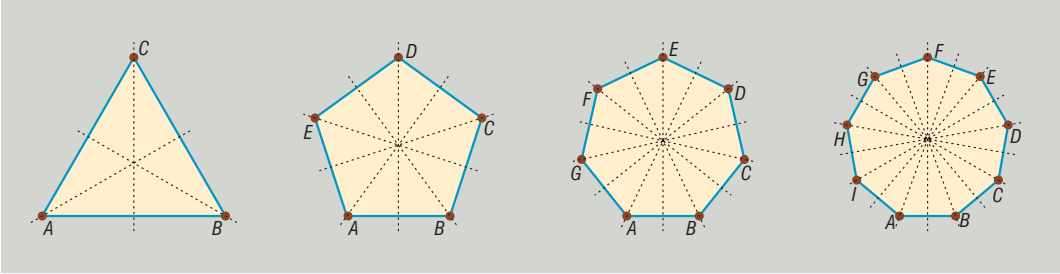
Szimmetriák szabályos sokszögekben:

Tengelyes szimmetria: egy szabályos n-szögnek n darab szimmetriatengelye van. Különbséget kell tennünk a szimmetriatengelyek milyensége között: szimmetriatengely lehet oldalfelező merőleges, illetve szögfelező.

Páros n esetén ezek elkülönülnek: a tengelyek fele, azaz $\frac{n}{2}$ darab tengely a szemköztes oldalak oldalfelező merőlegese; a tengelyek másik fele, azaz $\frac{n}{2}$ darab tengely a szemközti csúcsok szögfelező egyenese.

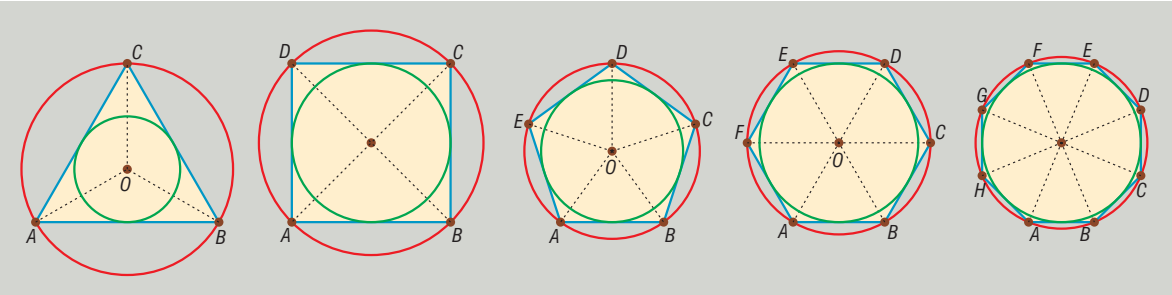


Páratlan n esetén bármely szimmetriatengely az egyik oldal oldalfelező merőlegese és a szemköztes szög szögfelezője is egyben.



A szimmetriatengelyek egy pontban metszik egymást, szabályos sokszögek esetében ez a pont a sokszög köré írható és a sokszögbe írható kör középpontja is. Mindezekből következik, hogy a szabályos sokszögek húrsokszögek és érintősokszögek is egyben. A körök középpontjából a szabályos n-

szög n darab egyenlő szárú háromszögre bontható, amelynek alapja a sokszög oldala, szára a sokszög köré írható kör sugara, alaphoz tartozó magassága a sokszögbe írható kör sugara.



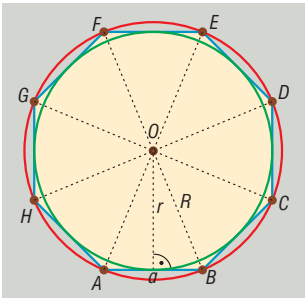
Középpontos szimmetria: a páros oldalszámú szabályos sokszögek középpontosan szimmetrikusak. A szimmetriaközéppont két szimmetriatengely metszéspontja.

Forgásszimmetria: minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus. A forgatás középpontja a sokszög középpontja (a szimmetria tengelyek metszéspontja, páros oldalszám esetén a középpontos szimmetria középpontja is), a forgatás szöge pedig lehet $k \cdot \frac{360°}{n}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

TÉTEL: Egy n oldalú szabályos sokszög **területe:** $T = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)}{2}$, ahol R a sokszög köré írt kör sugara.

TÉTEL: Egy n oldalú szabályos sokszög **kerülete:** $K = 2 \cdot n \cdot R \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$, ahol R a sokszög köré írt kör sugara.

TÉTEL: Egy n oldalú szabályos sokszög **területe:** $T = \frac{r \cdot K}{2}$, ahol r a sokszögbe írt kör sugara, K a kerülete, ebből $T = \frac{r \cdot n \cdot a}{2}$, ahol r a sokszögbe írt kör sugara, a pedig az oldalhossza.



III. Gráfok

A gráfok nagyon jól szemléltetik egy halmaz elemei közti kapcsolatokat. Gráfokkal szemléltethetők pl. egy társaság ismeretségi viszonyai, vagy bármilyen hálózat kapcsolódási viszonyai.

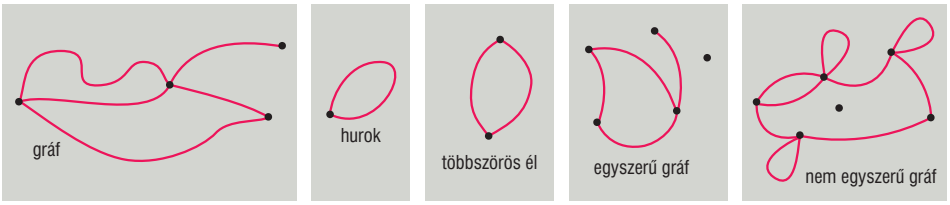
DEFINÍCIÓ: A **gráf** pontokból és vonalakból áll. Minden vonal két (nem feltétlenül különböző) pontot köt össze. A pontok a **gráf pontjai**, a vonalak a **gráf élei**.

DEFINÍCIÓ: A gráfokban előfordulhat olyan él is, melynek mindkét végpontja ugyanaz a pont, az ilyen él neve **hurokél**.

DEFINÍCIÓ: A gráf olyan pontját, amelyből nem vezet él**, izolált pont**nak nevezzük.

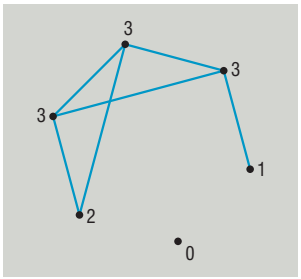
DEFINÍCIÓ: Két csúcs között több élt is húzhatunk, ezek a **többszörös él**ek.

DEFINÍCIÓ: Egy gráfot **egyszerű gráf**nak nevezünk, ha nincs benne sem hurokél, sem többszörös él.



DEFINÍCIÓ: Egy gráf egy pontjához illeszkedő élvégek számát a pont **fokszám**ának (fokának) nevezzük.

TÉTEL: A legalább 2 csúcsú egyszerű gráfban van 2 azonos fokú csúcs.



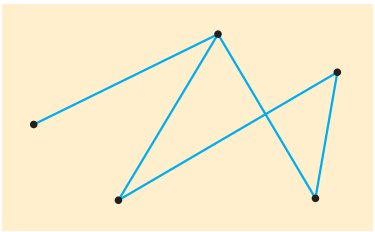
TÉTEL: A pontok **fokszámösszege** az élek számának kétszerese.

TÉTEL: Minden gráfban a pontok fokszámának összege páros szám.

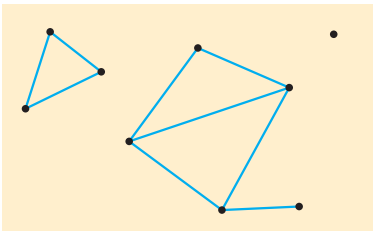
TÉTEL: A páratlan fokszámú pontok halmaza páros (hiszen a páros fokszámú pontok fokszámának az összege páros, és ehhez hozzáadva a páratlan fokszámú pontok összegét, páros számot kell kapnunk).

DEFINÍCIÓ: Egy gráf **összefüggő gráf**, ha bármely pontjából bármely másik pontjába élek mentén el lehet jutni.

összefüggő gráf



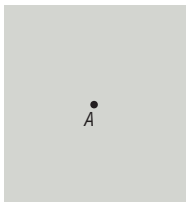
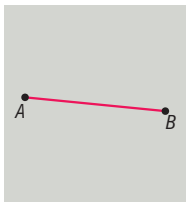
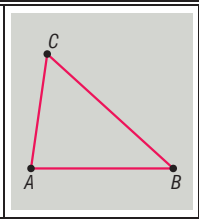
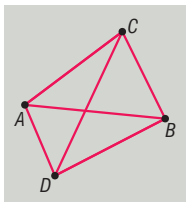
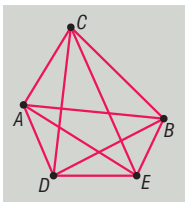
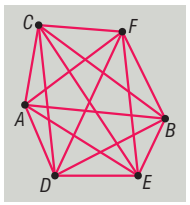
nem összefüggő gráf



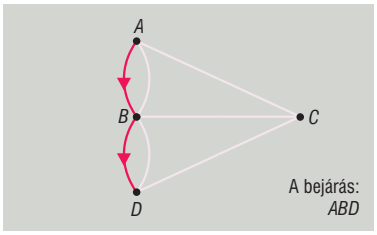
DEFINÍCIÓ: Ha egy gráfnak n pontja van ($n \in \mathbb{Z}^+$) és mindegyik pontból pontosan egy él vezet a többi ponthoz, akkor a gráfot n pontú **teljes gráf**nak nevezzük.

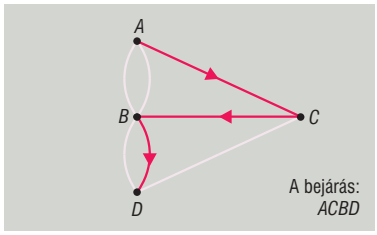
TÉTEL: n pontú teljes gráf éleinek a száma: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

TÉTEL: n pontú teljes gráfban a fokszámok összege: $n \cdot (n-1)$.

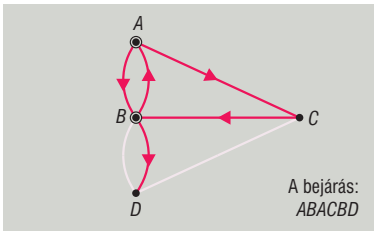
1 pontú teljes gráf	2 pontú teljes gráf	3 pontú teljes gráf	4 pontú teljes gráf	5 pontú teljes gráf	6 pontú teljes gráf
					

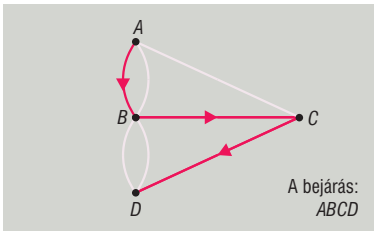
DEFINÍCIÓ: Az **út** az élek olyan egymáshoz kapcsolódó sora, amely egyetlen ponton sem halad át egynél többször.





DEFINÍCIÓ: A **vonal** a gráf csúcsainak és éleinek az a sora, amelyben az élek ezeket a pontokat kötik össze és az élek nem ismétlődnek, egy csúcs többször is előfordulhat. A vonal zárt, ha kezdő és végpontja megegyezik, egyébként nyílt.

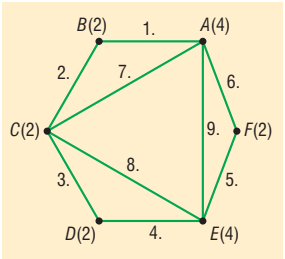




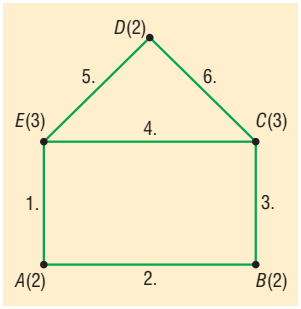
DEFINÍCIÓ: A **kör** olyan vonal, amelynek kezdő és végpontja megegyezik és a pontok nem ismétlődnek.

DEFINÍCIÓ: Az **Euler-vonal** a gráf összes élét pontosan egyszer tartalmazó vonal. Lehet zárt és lehet nyílt Euler-vonal. Zárt Euler-vonalnak nincs kezdő és végpontja, mert egybeesik, nyílt Euler-vonalnál két különböző pont van a vonal két végén.

TÉTEL: Zárt Euler vonala akkor és csak akkor van egy összefüggő gráfnak, ha minden foka páros.

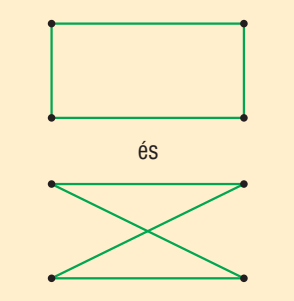


TÉTEL: Nyílt Euler vonala akkor és csak akkor van egy összefüggő gráfnak, ha pontosan két páratlan fokú pontja van.



1.

DEFINÍCIÓ: Két gráfot **izomorf**nak nevezünk, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetőek egymásnak.



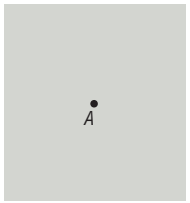
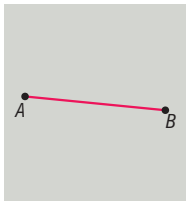
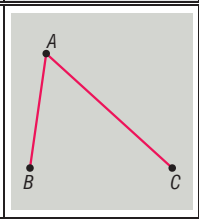
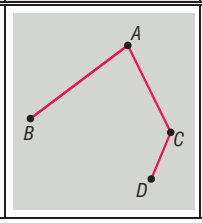
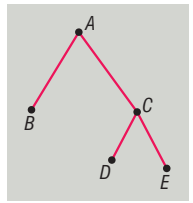
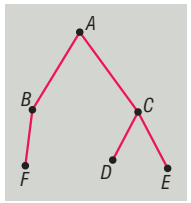
DEFINÍCIÓ: A **fa** olyan összefüggő gráf, amely nem tartalmaz kört.

TÉTEL: A fa maximális körmentes gráf (bármely két pontját összekötjük, amelyek között nem volt él, akkor a gráf már tartalmaz kört).

TÉTEL: A fa minimális összefüggő gráf (bármely élet elhagyjuk, akkor a gráf már nem összefüggő).

TÉTEL: A fa bármely két csúcsát egyetlen út köti össze

TÉTEL: Az n csúcsú fának $n - 1$ éle van.

1 pontú teljes gráf	2 pontú teljes gráf	3 pontú teljes gráf	4 pontú teljes gráf	5 pontú teljes gráf	6 pontú teljes gráf
					

TÉTEL: Minden egynél több csúcsú fának van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

IV. Alkalmazások

Sokszögek:

- Görbült felületekkel határolt testek számítógépes ábrázolásakor a test felületét sokszöglapokból álló felületekkel közelítik meg.

17. A kör és részei. Kerületi szög, középponti szög, látószög. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek

Vázlat:

I. Kör és részei (kör, körlap, körcikk, körgyűrű, körgyűrűcikk, körszelet)
II. Kerületi, középponti szög, látószög, látókörív, kerületi és középponti szögek tétele, radián
III. Húrnégyszög: definíció, tétel, terület (Heron-képlet)
IV. Érintőnégyszög: definíció, tétel, terület
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

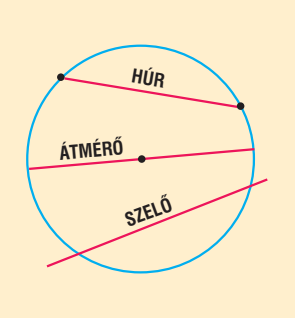
Kidolgozás

I. Kör és részei

DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon amelyeknek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra (adott r távolságnál nem nagyobb / adott r távolságnál kisebb) vannak O középpontú, r sugarú **kör**nek (**zárt körlap**nak / **nyílt körlap**nak) nevezzük.
A kör területe $t = r^2\pi$, kerülete $k = 2r\pi$.

DEFINÍCIÓ: A körvonal két különböző pontját összekötő szakaszt **húr**nak nevezzük

DEFINÍCIÓ: A húr egyenesét **szelő**nek, a középponton áthaladó húrt **átmérő**nek nevezzük. Az átmérő a kör leghosszabb húrja, hossza: $2r$.



TÉTEL: A kör
– a középpontján áthaladó tetszőleges egyenesre nézve tengelyesen szimmetrikus
– a középpontjára nézve középpontosan szimmetrikus
– a középpontja körüli forgatásra forgatásszimmetrikus

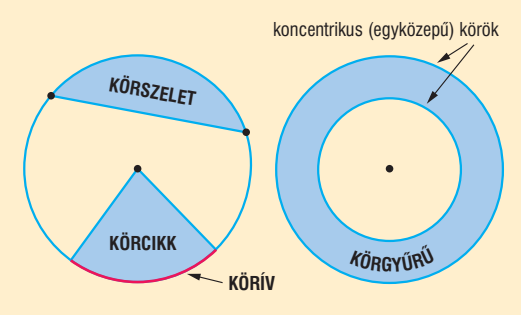
DEFINÍCIÓ: A körlapnak két sugár közé eső darabja a **körcikk.**

DEFINÍCIÓ: Egy szelő által a körlapból lemetszett rész a **körszelet.**

DEFINÍCIÓ: Két kör **koncentrikus**, ha középpontjaik egybeesnek.

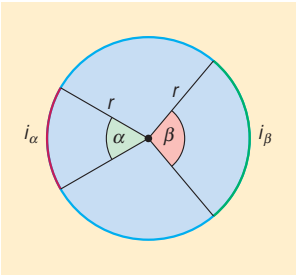
DEFINÍCIÓ: Két koncentrikus körvonal közé eső rész a **körgyűrű**.

DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa a kör középpontja, akkor a szöget **középponti szög**nek nevezzük.



TÉTEL: Egy adott körben két középponti szöghöz tartozó **ívek hosszának aránya**, valamint a **körcikkek területének aránya** megegyezik a középpont szögek arányával.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{i_\alpha}{i_\beta}=\frac{t_\alpha}{t_\beta}$$



TÉTEL: Egy körben az α középponti szögű **körcikk területe**:

$$\frac{t_\alpha}{r^2\pi}=\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\Rightarrow t_\alpha=\frac{r^2\pi}{360^\circ}\cdot\alpha^\circ,\ \text{illetve}\ \frac{t_\alpha}{r^2\pi}=\frac{\hat{\alpha}}{2\pi}\Rightarrow t_\alpha=\frac{r^2\hat{\alpha}}{2},$$

a hozzátartozó **ív hossza**:

$$\frac{i_\alpha}{2r\pi}=\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\Rightarrow i_\alpha=\frac{2r\pi}{360^\circ}\cdot\alpha^\circ,\ \text{illetve}\ \frac{i_\alpha}{2r\pi}=\frac{\hat{\alpha}}{2\pi}\Rightarrow t_\alpha=r\hat{\alpha}.$$

TÉTEL: Egy körben α középponti szögű **körcikk területe az ívhosszal** kifejezve: $t_\alpha=\frac{r\cdot i_\alpha}{2}$.

TÉTEL: R és r határoló **körgyűrű területe** $t=R^2\pi-r^2\pi$.

TÉTEL: Körszelet területe: $t=\frac{r^2\hat{\alpha}}{2}-\frac{r^2\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{r^2}{2}(\hat{\alpha}-\sin\alpha)$.

II. Középponti és kerületi szögek

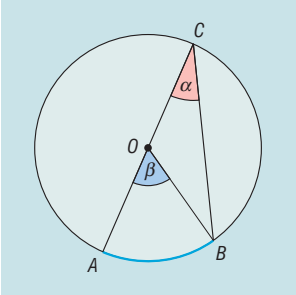
DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa egy adott kör középpontja, akkor a szöget **középponti szög**nek nevezzük, a szög szárai két sugárra illeszkednek.

DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal egy pontja és szárai a kör húrjai, akkor a szöget **kerületi szög**nek nevezzük.
Speciális: **érintőszárú kerületi szög**: egyik szára a kör húrja, másik szára a kör érintője a húr egyik végpontjában.
A középponti szögek kapcsolatát egy körön belül már tárgyaltuk.

TÉTEL: Középponti és kerületi szögek tétele: Adott körben adott ívhez tartozó bármely kerületi szög nagysága fele az ugyanazon ívhez tartozó középponti szög nagyságának.

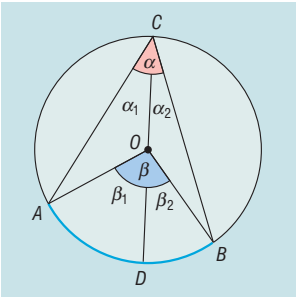
BIZONYÍTÁS: a középponti és a kerületi szögek helyzetének 4 esete van:

1. A középponti és a kerületi szög egy szára egy egyenesbe esik.



BOC háromszög egyenlő szárú $OB = OC = r \Rightarrow OCB\sphericalangle = CBO\sphericalangle = \alpha \Rightarrow \beta = OBC$ háromszög külső szöge, ami egyenlő a nem mellette lévő két belső szög összegével $\beta = 2\alpha$ $\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\beta}{2}$.

2. A középponti szög csúcsa a kerületi szög belsejébe esik: Húzzuk be az *OC*-re illeszkedő átmérőt, mely az α szöget α_1 és α_2, β szöget β_1 és β_2 részekre osztja.

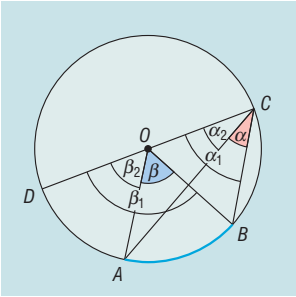


A *BD*, illetve *AD* ívekhez tartozó kerületi és középponti szögek elhelyezkedése az 1. esetnek megfelelő, tehát $\beta_1 = 2\alpha_1$ és $\beta_2 = 2\alpha_2$. Ebből következik, hogy

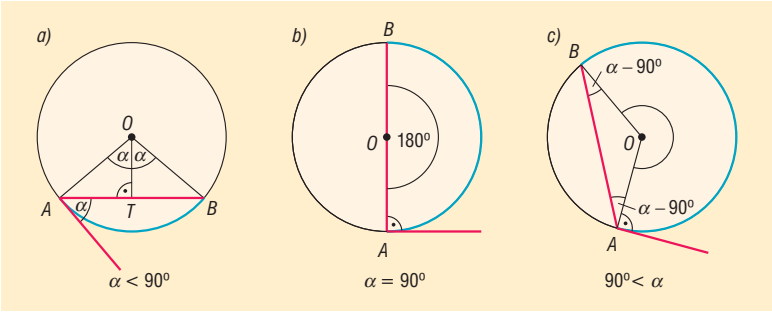
$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

3. A középponti szög csúcsa a kerületi szög szögtartományán kívül esik: Húzzuk be az *OC*-re illeszkedő átmérőt. Az $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ és $\beta = \beta_1 - \beta_2$ összefüggések írhatók fel a *DB* és a *DA* ívekhez tartozó kerületi és középponti szögek elhelyezkedésére az 1. esetnek megfelelő, tehát $\beta_1 = 2\alpha_1$ és $\beta_2 = 2\alpha_2$. Ebből következik, hogy

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}.$$



4. Ha a kerületi szög érintőszárú, akkor 3 eset van:
Jelölje α az AB íven nyugvó érintőszárú kerületi szöget.



a) $0° < \alpha < 90°$. Ekkor

$$BAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle = 90° - \alpha \Rightarrow AOB\sphericalangle = 2\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

b) $\alpha = 90° \Rightarrow \beta = 180° \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}$.

c) $90° < \alpha < 180°$. Ekkor

$$BAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle = \alpha - 90° \Rightarrow AOB\sphericalangle = 180° - 2(\alpha - 90°) = 360° - 2\alpha \Rightarrow$$

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

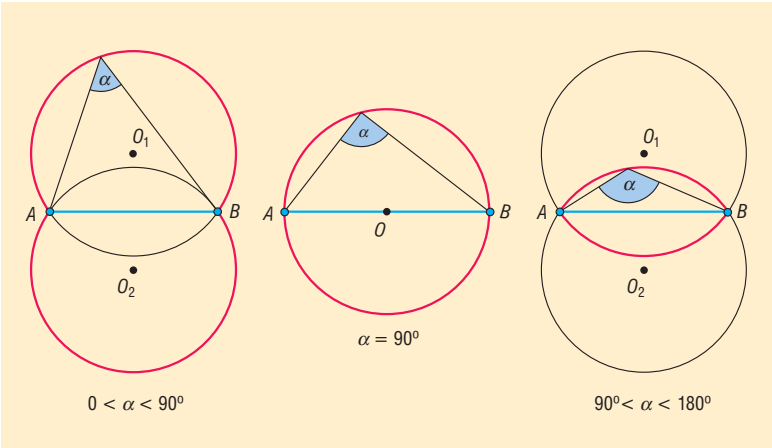
TÉTEL: Kerületi szögek tétele: adott kör adott ívéhet tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak vagy adott kör adott AB húrja az AB ív belső pontjaiból ugyanakkora szögben látszik.

TÉTEL: Általánosan: egyenlő sugarú körökben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.

TÉTEL: Ebből megfogalmazható **Thalész tétele és annak megfordítása**: Azon pontok halmaza síkon, amelyekből a sík egy AB szakasza derékszögben látszik, az AB átmérőjű körvonal, kivéve az A és a B pontokat.

DEFINÍCIÓ: Tekintsünk a síkon egy AB szakaszt és egy P pontot. Legyen $APB\sphericalangle = \alpha$. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a P pontból az AB szakasz α szög alatt látszik. Az α szöget **látószög**nek nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Azon pontok halmaza amelyekből a sík egy AB szakasza adott α ($0° < \alpha < 180°$) szög alatt látszik, két, az AB egyenesre szimmetrikusan elhelyezhető körív, melynek neve az AB szakasz α szögű **látókörív**e. A szakasz két végpontja nem tartozik a ponthalmazba.

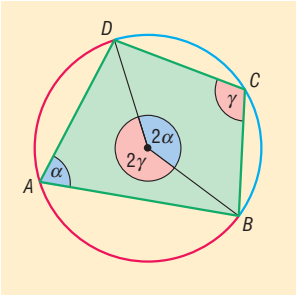


III. Húrnégyszög

DEFINÍCIÓ: Azokat a négyszögeket, amelyeknek van köré írható körük, **húrnégyszög**eknek nevezzük. Ezzel ekvivalens: a húrnégyszög olyan négyszög, amelynek oldalai ugyanannak a körnek a húrjai.

TÉTEL: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege 180°.

BIZONYÍTÁS: Vegyük fel egy $ABCD$ húrnégyszöget, és a köré írt kört. Legyen a négyszögben $DAB\sphericalangle = \alpha$, $BCD\sphericalangle = \gamma$.



Ekkor α a C csúcsot tartalmazó BD ívhez, γ pedig az A csúcsot tartalmazó DB ívhez tartozó kerületi szög. A kerületi és középponti szögek tételéből következően az ugyanezeken az ívekhez tartozó középponti szögek nagysága 2α, illetve 2γ.

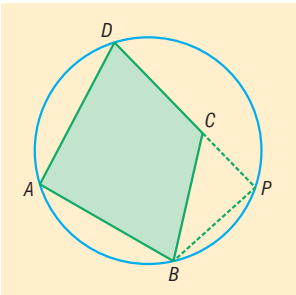
Ezek összegéről tudjuk, hogy $2\alpha + 2\gamma = 360°$. Mivel a négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért a másik két szemközti szög összege is 180°.

TÉTEL: Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180°, akkor az húrnégyszög.

BIZONYÍTÁS: indirekt

Tegyük fel, hogy a szemközti szögeinek összege 180°, és a négyszög nem húrnégyszög. Tehát az egyik csúcs (C) nem illeszkedik a másik három által meghatározott körre. Legyen P a DC egyenesének és a körnek a metszéspontja.

Legyen $DAB\sphericalangle = \alpha$, a feltétel szerint $BCD\sphericalangle = 180° - \alpha \Rightarrow BCP\sphericalangle = \alpha$.



Ekkor az $ABPD$ négyszög húrnégyszög, amiről már beláttuk, hogy szemközti szögeinek összege 180°, tehát $DPB\sphericalangle = 180° - \alpha$. Ebből viszont az következik, hogy a BPC háromszög egyik szöge ($BCP\sphericalangle$) α, egy másik ($BPC\sphericalangle$) pedig $180° - \alpha$. Ezek összege a harmadik szög nélkül is 180°, ami ellentmond a belső szögek összegére vonatkozó tételnek. Mivel helyesen következtettünk, csak a kiindulási feltételben lehet a hiba, tehát nem igaz, hogy C nincs a körön $\Rightarrow$ C illeszkedik a körre. Ez viszont azt jelenti, hogy $ABCD$ mindegyik csúcsa ugyanazon körön van $\Rightarrow$ $ABCD$ húrnégyszög.

TÉTEL: Húrnégyszög-tétel: egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°.

TÉTEL: A **nevezetes négyszögek** közül biztosan húrnégyszög a szimmetrikus trapéz (húrtrapéz), a téglalap és a négyzet.

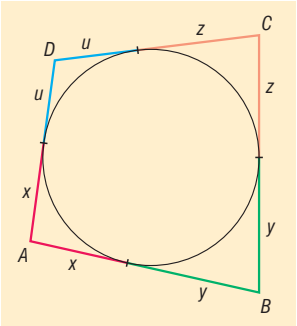
TÉTEL: A paralelogramma akkor és csak akkor húrnégyszög, ha téglalap.

TÉTEL: A **húrnégyszög területe** kifejezhető a négyszög kerületével és az oldalakkal: Ha $s=\frac{k}{2}$, akkor $t=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Ez a **Heron-képlet** húrnégyszögekre.

IV. Érintőnégyszög

DEFINÍCIÓ: Azokat a négyszögeket, amelyeknek van beírt körük, **érintőnégyszög**eknek nevezzük. Ezzel ekvivalens: az érintő négyszög olyan négyszög, amelynek az oldalai ugyanannak a körnek érintői.

TÉTEL: Ha egy konvex négyszög érintőnégyszög, akkor szemközti oldalainak összege egyenlő.



TÉTEL: Ha egy konvex négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor az érintőnégyszög.

TÉTEL: **Érintőnégyszög tétel**: Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalainak összege egyenlő.

TÉTEL: A **nevezetes négyszögek** közül biztosan érintőnégyszög a deltoid, így a rombusz és a négyzet.

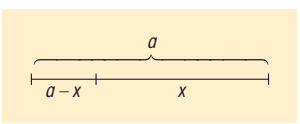
TÉTEL: A paralelogramma akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha rombusz.

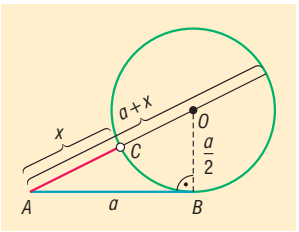
TÉTEL: **Érintőnégyszög területe** kifejezhető a négyszög kerületével, és a beírt kör sugarával:

$$t=\frac{k\cdot r}{2}=s\cdot r\,.$$

V. Alkalmazások:

- A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételével feloszthatunk egy szakaszt az aranymetszésnek megfelelően (a nagyobb rész és az egésznek az aránya egyenlő a kisebb rész és a nagyobb rész arányával).





- Körrel kapcsolatos ismeretek: körmozgás, forgómozgás, építészet (boltívek, román és gótikus stílusú ablakok tervezése)

18. Vektorok, vektorműveletek. Vektorfelbontási tétel. Vektorok koordinátái. Skaláris szorzat

Vázlat:

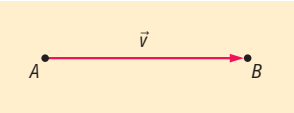
I. Vektor, vektor hossza, vektorok egyenlősége, párhuzamossága
II. Vektorműveletek, tulajdonságaik
III. Vektorok felbontása
IV. Vektorok koordinátái
V. Skaláris szorzat
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Vektor

Az eltolás, mint egybevágósági transzformáció megadható az eltolás irányával és nagyságával, vagyis egy vektorral.

Az irányított szakaszt **vektor**nak nevezzük. Jel: $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, A: kezdőpont, B: végpont (ez szemléletes megoldás, a vektor alapfogalom, nem definiáljuk).

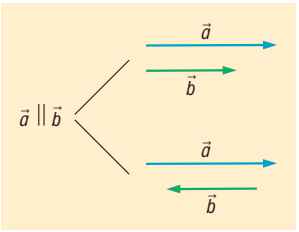


DEFINÍCIÓ: A **vektor abszolút értéke** a vektort meghatározó irányított szakasz hossza. Jele: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

DEFINÍCIÓ: Az a vektor, amelynek abszolút értéke nulla, a **nullvektor**. Jele: $\underline{0}$. A nullvektor iránya tetszőleges, tehát minden vektorra merőleges, és minden vektorral párhuzamos.

DEFINÍCIÓ: Két vektor **egyirányú**, ha a két vektor párhuzamos, és azonos irányba mutat.

DEFINÍCIÓ: Két vektor **ellentétes irányú,** ha a két vektor párhuzamos, de ellentétes irányba mutat.



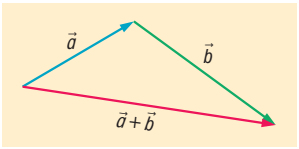
DEFINÍCIÓ: Két vektor egyenlő, ha egyirányúak és abszolút értékük egyenlő.

DEFINÍCIÓ: Két vektor egymás **ellentett**je, ha ellentétes irányúak és abszolút értékük egyenlő.

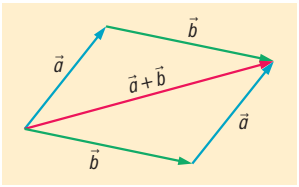
II. Vektorműveletek

DEFINÍCIÓ: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ **vektorok összege** annak az eltolásnak a vektora, amellyel helyettesíthető az $\underline{a}$ vektorral és a $\underline{b}$ vektorral történő eltolások egymásutánja. Jele: $\underline{a} + \underline{b}$.

háromszög-szabály



paralelogramma-szabály

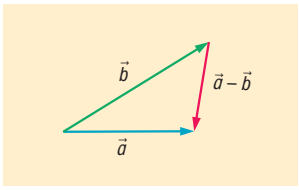


Ellentett vektorok összege a nullvektor: $\underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}$.

A vektorösszeadás tulajdonságai:

1. **kommutatív**: $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ (összeg nem függ az összeadandók sorrendjétől).
2. **asszociatív**: $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ (az összeg független az összeadandók csoportosításától).

DEFINÍCIÓ: Az $\underline{a}-\underline{b}$ **különbségvektor** az a vektor, amelyhez a $\underline{b}$ vektort adva az $\underline{a}$ vektort kapjuk. Jele: $\underline{a}-\underline{b}$.



Az $\underline{a}-\underline{b}$ és a $\underline{b}-\underline{a}$ egymás ellentettjei.

DEFINÍCIÓ: Egy nullvektortól különböző $\underline{a}$ vektor tetszőleges λ valós számmal (**skalárral**) **vett szorzata** egy olyan vektor, amelynek abszolút értéke $|\lambda|\cdot|a|$ és $\lambda>0$ esetén $\underline{a}$-val egyirányú, $\lambda<0$ esetén $\underline{a}$-val ellentétes irányú.
A nullvektort bármilyen valós számmal szorozva nullvektort kapunk.

A skalárral vett szorzás tulajdonságai:

1. **disztributív:** $\begin{cases}\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{a}=(\alpha+\beta)\cdot\underline{a}\\ \alpha\cdot\underline{a}+\alpha\cdot\underline{b}=\alpha\cdot(\underline{a}+\underline{b})\end{cases}$
2. **asszociatív:** $\alpha\cdot(\beta\cdot\underline{a})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\underline{a}$

III. Vektorok felbontása

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorokkal és α, β valós számokkal képzett $\underline{v}=\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{b}$ vektort az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok **lineáris kombináció**jának nevezzük.

TÉTEL: Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nullvektortól különböző párhuzamos vektorok, akkor pontosan egy olyan α valós szám létezik, amelyre $\underline{b}=\alpha\cdot\underline{a}$.

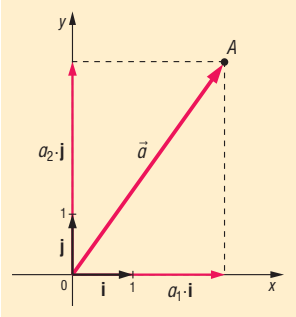
TÉTEL: Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok, akkor a velük egy síkban levő minden $\underline{c}$ vektor egyértelműen előáll $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{c}=\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{b}$ alakban, ahol α és β egyértelműen meghatározott valós számok. Ez azt jelenti, hogy $\underline{c}$ egyértelműen felbontható $\underline{a}$**-val és** $\underline{b}$**-vel párhuzamos összetevők**re.

DEFINÍCIÓ: A lineáris kombinációban szereplő $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokat **bázisvektorok**nak nevezzük.

IV. Vektorok koordinátái

DEFINÍCIÓ: A síkbeli derékszögű $(x; y)$ koordináta-rendszer **bázisvektorai** az origóból az $(1; 0)$ pontba mutató $\underline{i}$ és a $(0; 1)$ pontba mutató $\underline{j}$ **egységvektorok**.

DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben az $A(a_1, a_2)$ pont **helyvektor**a az origóból az A pontba mutató vektor.



DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben egy **vektor koordinátái**nak nevezzük az origó kezdőpontú, vele egyenlő helyvektor végpontjának koordinátáit. Jele: $\underline{a}(a_1, a_2)$.

TÉTEL: (Az előbbiek alapján) a koordinátasík összes $\underline{v}$ vektora egyértelműen előáll $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok lineáris kombinációjaként $\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j}$ alakban. Az így meghatározott (v_1, v_2) rendezett számpárt a $\underline{v}$ **vektor koordinátái**nak nevezzük. Jele: $\underline{v}(v_1, v_2)$.

TÉTEL: Vektor koordinátáinak kiszámítása kezdő- és végpontjának segítségével: $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

TÉTEL: Ha a $\underline{v}$ vektor koordinátái $\underline{v}(v_1, v_2)$, akkor a **vektor hossza** $|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Vektorműveletek koordinátákkal:

Legyenek $\underline{a}(a_1, a_2)$ és $\underline{b}(b_1, b_2)$ adott vektorok.

TÉTEL: Két vektor összegének a koordinátái az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak összegével egyenlők: $\underline{a} + \underline{b}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

TÉTEL: Két vektor különbségének koordinátái az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak különbségével egyenlő: $\underline{a} - \underline{b}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

TÉTEL: Vektor számszorosának koordinátái: $\lambda\underline{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

TÉTEL: Vektor ellentettjének koordinátái: $-\underline{a}(-a_1, -a_2)$.

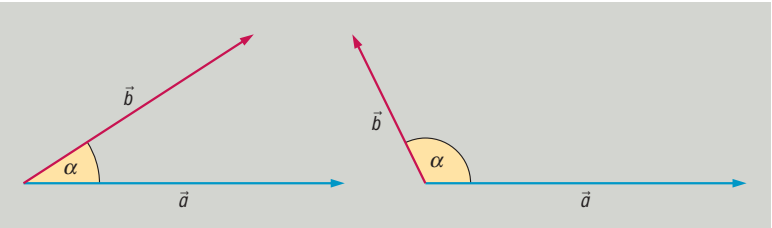
TÉTEL: Ha egy vektort 90°-kal elforgatunk, koordinátái felcserélődnek és az egyik előjelet vált:
Az $\underline{a}(a_1, a_2)$ vektor $+90°$-os elforgatottjának koordinátái: $\underline{a}'(-a_2, a_1)$.
$-90°$-os elforgatottjának koordinátái: $\underline{a}''(a_2, -a_1)$.

V. Skaláris szorzat

DEFINÍCIÓ: Két vektor szöge:

- Egyállású vektorok szöge 0°, ha egyirányúak; vagy 180°, ha ellentétes irányúak.

- Nem egyállású vektorok esetén a vektorok hajlásszögén a közös pontból kiinduló vektorok félegyenesei által bezárt konvex szöget értjük.



DEFINÍCIÓ: Tetszőleges két vektor **skaláris szorzata** a két vektor abszolút értékének és hajlásszögük koszinuszának szorzata: $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$.

Skaláris szorzat tulajdonságai:

1. kommutatív: $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$.
2. disztributív: $\begin{cases}\lambda\cdot(\underline{a}\cdot\underline{b})=(\lambda\cdot\underline{a})\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot(\lambda\cdot\underline{b})\\(\underline{a}+\underline{b})\cdot c=\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}\cdot\underline{c}\end{cases}$

TÉTEL: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra: $\underline{a}\cdot\underline{b}=0 \Leftrightarrow \underline{a}\perp\underline{b}$.

TÉTEL: Két vektor skaláris szorzata koordinátákkal: $\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1b_1+a_2b_2$, azaz a megfelelő koordináták szorzatának összege.

BIZONYÍTÁS:

$\underline{a}(a_1,a_2) \Rightarrow \underline{a}=a_1\underline{i}+a_2\underline{j}$

$\underline{b}(b_1,b_2) \Rightarrow \underline{b}=b_1\underline{i}+b_2\underline{j}$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{a}\cdot\underline{b}=(a_1\underline{i}+a_2\underline{j})\cdot(b_1\underline{i}+b_2\underline{j})=a_1b_1\underline{i}^2+a_1b_2\underline{i}\cdot\underline{j}+a_2b_1\underline{i}\cdot\underline{j}+a_2b_2\underline{j}^2\\ \underline{i}^2=1\cdot1\cdot\cos0°=1\\ \underline{j}^2=1\cdot1\cdot\cos0°=1\\ \underline{i}\cdot\underline{j}=\underline{j}\cdot\underline{i}=1\cdot1\cdot\cos90°=0\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

VI. Alkalmazások:

- Vektorok bizonyításban: háromszög súlypontja harmadolja a súlyvonalakat; Euler-egyenes: a háromszög köré írható kör középpontja, súlypontja, magasságpontja egy egyenesen van és $\frac{KS}{SM}=\frac{1}{2}$.
- Szögfüggvények tetszőleges forgásszögre történő definiálása egységvektorok segítségével történik.
- Fizikában vektormennyiségek (erő, elmozdulás) összeadásában, felbontásában, a munka egyenlő az erő és az elmozdulás skaláris szorzatával.
- Skaláris szorzat: koszinusztétel bizonyítása
- Koordináta-geometriában az egyenes normálvektora, illetve irányvektora segítségével az egyenes egyenletének felírása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A vektor fogalma absztrakció útján alakult ki, használata a matematikában és a fizikában végigkíséri tanulmányainkat. Először az eltolás, mint geometriai transzformáció kapcsán ta-

19. Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon. Párhuzamos és merőleges egyenesek. Elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek grafikus megoldása

Vázlat:

I. Szakaszok a koordinátasíkon: szakasz hossza, osztópontok
II. Az egyenest meghatározó adatok
III. Az egyenes egyenletei
IV. Egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltételei
V. A lineáris függvény grafikonjának és az egyenesnek kapcsolata
VI. Elsőfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása
VII. Elsőfokú egyenletrendszerek grafikus megoldása
VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

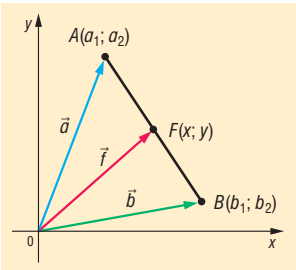
I. Szakaszok a koordinátasíkon: szakasz hossza, osztópontok

TÉTEL: A síkbeli derékszögű **koordináta-rendszer**ben az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ végpontokkal meghatározott szakasz hossza az $\overrightarrow{AB}$ hossza: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, ami egyben az A és B pontok távolsága.

Szakasz osztópontjainak koordinátái, ahol $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$:

TÉTEL: Szakasz felezőpontjának koordinátái $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

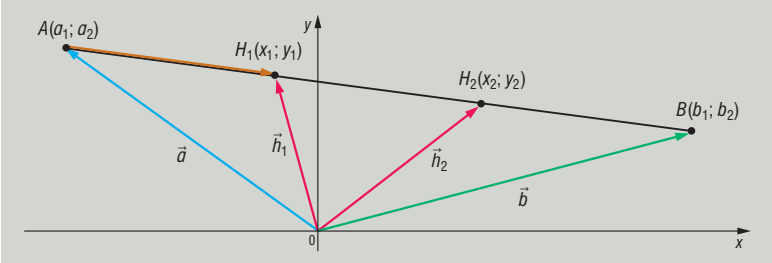
BIZONYÍTÁS: $\overrightarrow{AF} = \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2} \Rightarrow \underline{f} = \underline{a} + \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$.



TÉTEL: Szakasz harmadolópontjainak koordinátái $\begin{cases} H\left(\frac{2a_1+b_1}{3};\frac{2a_2+b_2}{3}\right) \\ G\left(\frac{a_1+2b_1}{3};\frac{a_2+2b_2}{3}\right) \end{cases}$.

BIZONYÍTÁS:

$$\left.\begin{aligned} \underline{h} &= \underline{a}+\overrightarrow{AH}=\underline{a}+\frac{\overrightarrow{AB}}{3}=\underline{a}+\frac{\underline{b}-\underline{a}}{3}=\frac{2\underline{a}+\underline{b}}{3} \\ \underline{g} &= \underline{a}+\overrightarrow{AG}=\underline{a}+\frac{2\overrightarrow{AB}}{3}=\underline{a}+\frac{2(\underline{b}-\underline{a})}{3}=\frac{\underline{a}+2\underline{b}}{3} \end{aligned}\right\}.$$



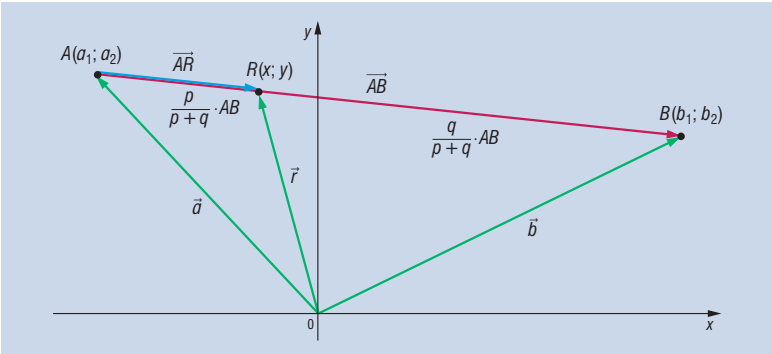
TÉTEL: Az AB szakaszt $p:q$ arányban osztó pont koordinátái: $R\left(\frac{qa_1+pb_1}{p+q};\frac{qa_2+pb_2}{p+q}\right)$.

BIZONYÍTÁS:

$$\frac{AR}{RB}=\frac{p}{q} \Rightarrow \overrightarrow{AR}=\frac{p}{p+q}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{p}{p+q}\cdot(\underline{b}-\underline{a})$$

$$\overrightarrow{OR}=\underline{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AR}=\underline{a}+\frac{p}{p+q}\cdot(\underline{b}-\underline{a}) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\underline{a}(p+q)+p(\underline{b}-\underline{a})}{p+q}=\frac{p\underline{a}+q\underline{a}+p\underline{b}-p\underline{a}}{p+q}=\frac{q\underline{a}+p\underline{b}}{p+q}.$$



II. Egyenest meghatározó adatok

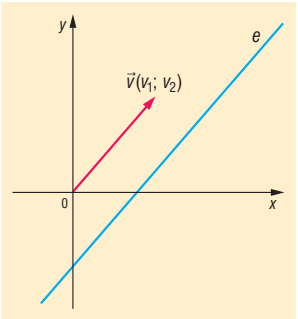
Egy egyenest a síkban egyértelműen meghatározhatunk 2 pontja, vagy egy pontja és egy, az állását jellemző adata segítségével. Ilyen, az egyenes állását jellemző adat: az egyenes irányvektora, normálvektora, irányszöge, iránytangense.

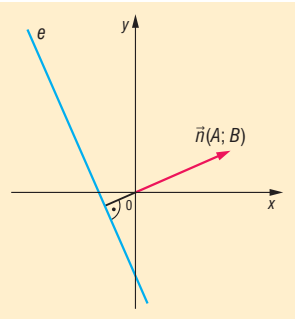
DEFINÍCIÓ: Az **egyenes irányvektora** bármely, az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektor. Jele: $\underline{v}(v_1; v_2)$.

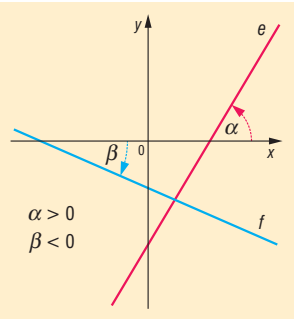
DEFINÍCIÓ: Az **egyenes normálvektora** bármely, az egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektor. Jele: $\underline{n}(A; B)$.

DEFINÍCIÓ: Az **egyenes irányszögé**nek nevezzük azt a $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ szöget, amelyet az egyenes az x tengely pozitív irányával bezár.

DEFINÍCIÓ: Az egyenes irányszögének tangensét (amennyiben létezik) az **egyenes iránytangensé**nek (**iránytényezőjé**nek vagy **meredekségé**nek) nevezzük. Jele: $m = \operatorname{tg}\alpha$. Az $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$ irányszögű, vagyis az y tengellyel párhuzamos egyenesnek nincs iránytangense.







Összefüggések az egyenes állását meghatározó adatok között:

- ha az egyenes egy **irányvektor**a $\underline{v}(v_1; v_2)$, akkor normálvektora lehet $\underline{n}(-v_2; v_1)$ vagy $\underline{n}(v_2; -v_1)$, illetve meredeksége $m = \frac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg}\alpha$, ebből felírható az α irányszög is.
- ha az egyenes egy **normálvektor**a $\underline{n}(A; B)$, akkor irányvektora lehet $\underline{v}(-B; A)$ vagy $\underline{v}(B; -A)$; illetve meredeksége $m = -\frac{A}{B}$ $(B \neq 0) = \operatorname{tg}\alpha$, ebből felírható az α irányszög is.
- ha az egyenes **meredeksége** m, akkor ebből irányszöge $\alpha = \operatorname{arctg} m$, irányvektora lehet: $\underline{v}(1; m)$, normálvektora $\underline{n}(-m; 1)$ vagy $\underline{n}(m; -1)$.
- ha az egyenes **irányszöge** α, akkor meredeksége $m = \operatorname{tg}\alpha$. Ebből irányvektor és normálvektor is meghatározható. Ha $\alpha = 90°$, akkor m nem létezik, de $\underline{v}(0; 1)$, illetve $\underline{n}(1; 0)$.

Összefüggés az egyenes két adott pontja és az egyenes állását meghatározó adatok között:

Ha az egyenes két különböző pontja $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$, akkor $\overrightarrow{AB}$ lehet az egyenes egy irányvektora: $\underline{v}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ egy normálvektora $\underline{n}(a_2 - b_2; b_1 - a_1)$ vagy $\underline{n}(b_2 - a_2; a_1 - b_1)$, meredeksége $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$; ebből felírható irányszöge is: $\alpha = \operatorname{arctg} m$.

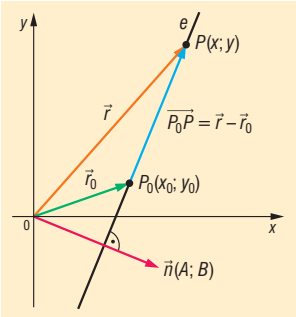
III. Az egyenes egyenletei

DEFINÍCIÓ: Egy **alakzat egyenletén** a síkbeli xy koordináta-rendszerben olyan egyenletet értünk, melyet az alakzat pontjainak koordinátái kielégítenek, de más síkbeli pontok nem.

TÉTEL: Ha egy egyenesnek adott a $P_0(x_0; y_0)$ pontja és egy $\underline{n}(A; B)$ normálvektora, akkor az egyenes **normálvektoros egyenlete**: $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

BIZONYÍTÁS: Egy $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van rajta az e egyenesen, ha a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges az egyenes $\underline{n}(A; B)$ normálvektorára.

Ha P_0 pont helyvektorát $\underline{r}_0$, a P pont helyvektorát a $\underline{r}$ jelöli, akkor $\overrightarrow{P_0P} = \underline{r} - \underline{r}_0$, koordinátákkal $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0; y - y_0)$.



$\overrightarrow{P_0P}$ akkor és csak akkor merőleges az egyenes normálvektorára, ha skaláris szorzatuk 0, azaz $\overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n} = 0$, vagyis $(x - x_0) \cdot A + (y - y_0) \cdot B = 0$, rendezve $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

TÉTEL: Ha egy egyenesnek adott a $P_0(x_0; y_0)$ pontja és egy $\underline{v}(v_1; v_2)$ irányvektora, akkor az egyenes **irányvektoros egyenlete**: $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$.

BIZONYÍTÁS: Ha $\underline{v}(v_1; v_2)$ irányvektor, akkor $\underline{n}(v_2; -v_1)$ egy normálvektor. Ezt helyettesítve $(A = v_2; B = -v_1)$ a normálvektoros egyenletbe, kész a bizonyítás.

TÉTEL: Ha adott az y tengellyel nem párhuzamos egyenes egy $P_0(x_0; y_0)$ pontja és m iránytangense, akkor **iránytényezős egyenlete** $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

BIZONYÍTÁS: Ha m iránytényező, akkor $\underline{v}(1; m)$ irányvektor, vagyis $\underline{n}(m; -1)$ normálvektor. Ezt behelyettesítve $(A = m;\ B = -1)$ a normálvektoros egyenletbe $mx - y = mx_0 - y_0 \Leftrightarrow y - y_0 = mx - mx_0 \Leftrightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

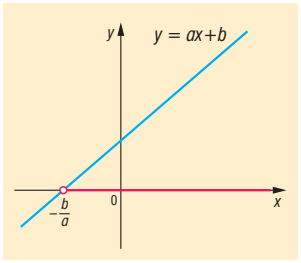
TÉTEL: Az y tengellyel párhuzamos, $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $x = x_0$.

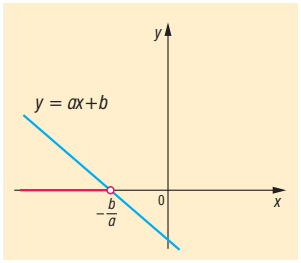
DEFINÍCIÓ: Két egyenes metszéspontja (ha létezik) egy olyan pont, amely illeszkedik mindkét egyenesre.
A metszéspont koordinátái a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai.

DEFINÍCIÓ: Két egyenes hajlásszöge visszavezethető irányvektoraik vagy normálvektoraik szögére.

Két vektor szögét skaláris szorzattal számolhatjuk ki: $\cos\varphi = \dfrac{\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f}{|\underline{n}_e| \cdot |\underline{n}_f|}$, vagy

$$\cos\varphi = \frac{\underline{v}_e \cdot \underline{v}_f}{|\underline{v}_e| \cdot |\underline{v}_f|}.$$





Megengedett az egyenlőség is, így természetesen a megoldásban is.

DEFINÍCIÓ: Elsőfokú kétismeretlenes egyenlőtlenségek $ax + by + c > 0$ $(a \neq 0)$ alakba hozhatóak.

Ha $b > 0$, akkor

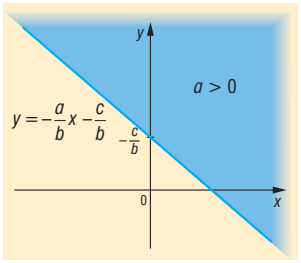
$y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

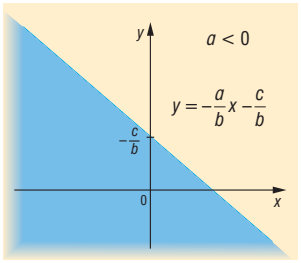
Ha $b < 0$, akkor

$y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Ha $b = 0$, akkor

$ax + c > 0$. (egyismeretlenes)

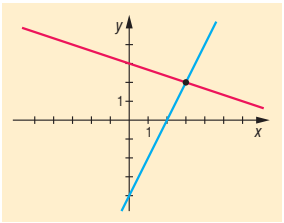




VII. Elsőfokú egyenletrendszerek grafikus megoldása

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer általános alakja: $\left.\begin{matrix} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{matrix}\right\}$, ahol a, b, c, d, e, f valós számok. Mindkét egyenlet egyenes egyenlete, így ezeket az egyeneseket közös koordinátarendszerben ábrázolva megkapjuk az egyenletrendszer megoldáshalmazát:

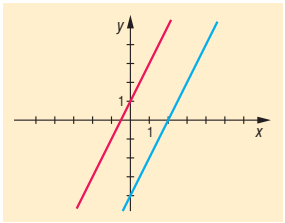
- Ha a két egyenes metszi egymást, akkor a metszéspont két koordinátája az egyenletrendszer megoldáspárja.
- Ha a két egyenes párhuzamos egymással, akkor nincs metszéspontjuk, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.
- Ha a két egyenes egybeesik, azaz a két egyenlet egymásnak számszorosa, vagyis ekvivalensek, akkor végtelen sok megoldáspár van: minden olyan pont két koordinátája kielégíti az egyenletrendszert, amely illeszkedik az egyenesre.



$2x - y = 4 \Leftrightarrow y = 2x - 4$

$x + 3y = 9 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} + 3$

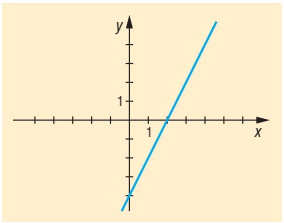
Megoldás: $x = 3$, $y = 2$



$2x - y = 4 \Leftrightarrow y = 2x - 4$

$6x - 3y = 3 \Leftrightarrow y = 2x + 1$

Nincs megoldás



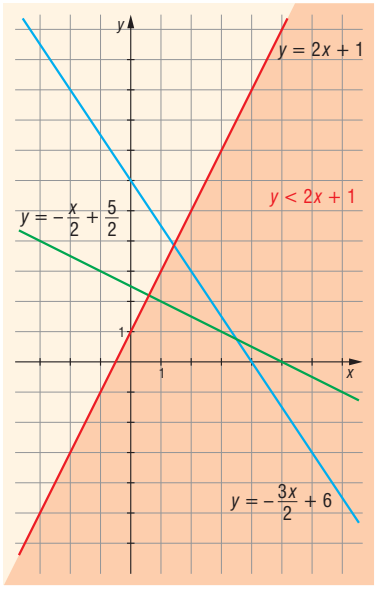
$2x - y = 4 \Leftrightarrow y = 2x - 4$

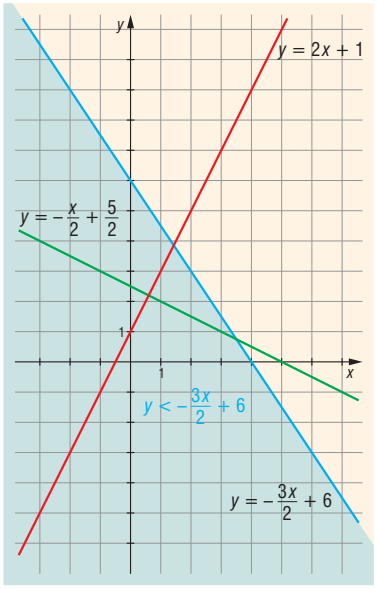
Minden $(x; 2x - 4)$ számpár megoldás.

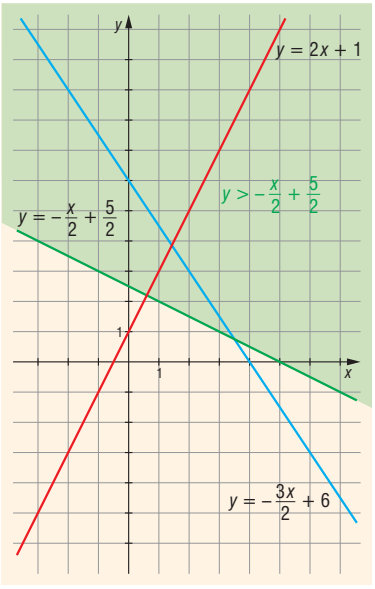
VIII. Alkalmazások:

- Adott tulajdonságú ponthalmazok keresése, ha elemi módszerrel nem boldogulunk
- Kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszer megoldása
  Pl.:

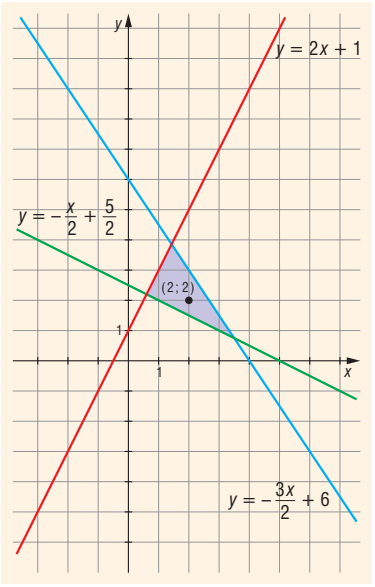
$$\left.\begin{aligned} -2x+y<1 \\ 3x+2y<12 \\ x+2y>5 \end{aligned}\right\} x,y\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} y<2x+1 \\ y<-\frac{3}{2}x+6 \\ y>-\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} x,y\in\mathbb{Z}$$





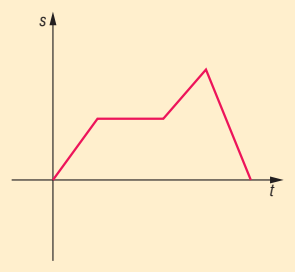


A három terület metszete:



$P(2;\,2)$ az egyetlen megfelelő pont $\Rightarrow x=2,\ y=2$

- A lineáris programozás (egyes folyamatok leggazdaságosabb megszervezésének módszere) bizonyos lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldásával és ennek feltételeivel foglalkozik
- Elemi geometriai problémák egyszerűbb megoldása. Pl.: a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Eddig ezt geometriai módon bizonyítottuk, koordináta-geometriai ismeretekkel beláthatjuk algebrai módszerekkel. Célszerű $A(a; 0)$, $B(b; 0)$ $C(c_1; c_2)$ helyzetbe illeszteni a háromszöget, azaz az x tengelyre felvenni a háromszög két csúcspontját
- Egyenletes mozgások út-idő grafikonja mindig egyenes (szakasz); a mozgások vizsgálatakor a mozgás pályájának ismeretében információkat kaphatunk a mozgásról:



Matematikatörténeti vonatkozások:

- A koordináta-geometria (analitikus geometria) alapvető jellemzője, hogy geometriai problémákat, feladatokat algebrai módszerekkel, a koordináta-rendszer segítségével tárgyalja és oldja meg. A geometriának ez a megközelítése először **Apollóniusz** kúpszeletekről írt könyvében jelenik meg a Kr. e. III. században.
- **Ptolemaiosz** (Kr. e. kb. 150.) a Föld egy pontjának helyét a mai földrajzi szélességnek és hosszúságnak megfelelő adatokkal határozta meg, tehát gömbi koordinátákat használt.
- **Descartes** 1637-ben megjelent Geometria c. könyvét tekintjük az első koordináta-geometriai műnek, ebben már következetesen használja az újkori matematikai jelöléseket. Ebben a könyvében aritmetizálta az euklideszi geometriát: Descartes középpontba állítja az origót, a centrumot és a belőle sugárzó alapirányokat, azaz a vertikális és a horizontális tengelyt. A descartes-i **koordináta-rendszer**nek köszönhetően a görbék leírhatók egyenlettel.
- A koordináta szó az 1700-as évek elejétől **Leibniz** német matematikustól származik.

20. A kör és a parabola elemi úton és a koordinátasíkon. Kör és egyenes, parabola és egyenes kölcsönös helyzete. Másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Vázlat:

I. Kör definíciója, egyenlete
II. Parabola definíciója, egyenletei
III. Kör és egyenes kölcsönös helyzete
IV. Parabola és egyenes kölcsönös helyzete
V. Másodfokú egyenlőtlenségek
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

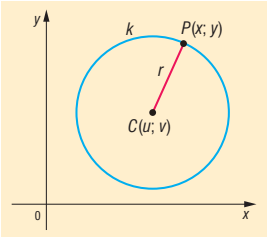
Kidolgozás

I. Kör és egyenlete

DEFINÍCIÓ: A **kör** azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak. Az adott pontot a kör **középpont**jának, az adott távolságot a kör **sugar**ának nevezzük. Tehát a kört a síkon egyértelműen meghatározza a középpontja és sugara.

TÉTEL: A $C(u; v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete** $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$.

BIZONYÍTÁS: A $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van a körön, ha CP távolság éppen r, azaz $CP = r$.



$CP = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r \Rightarrow$ mivel mindkét oldal nemnegatív, négyzetre emeléssel ekvivalens kifejezéshez jutunk: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$, amit a kör pontjai kielégítenek, de más pontok nem.

A kör egyenlete kétismeretlenes másodfokú egyenlet, hiszen az egyenlete:

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0$$

alakra hozható, azaz átalakítható:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

alakúra, ahol A, B, C olyan valós számok, amelyekre $A^2 + B^2 - 4C > 0$.
Ekkor a kör középpontjának koordinátáira:

$$-2u = A \Rightarrow u = -\frac{A}{2}; \quad -2v = B \Rightarrow v = -\frac{B}{2};$$

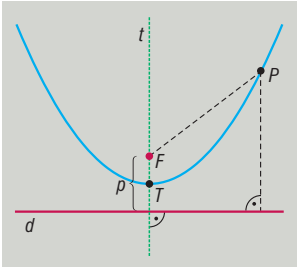
illetve

$$u^2+v^2-r^2=C \Rightarrow \frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-r^2=C \Rightarrow r^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C \Rightarrow r^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4} \Rightarrow$$
$$r=\sqrt{\frac{A^2+B^2-4C}{4}}=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}.$$

Azaz a kör középpontja $C\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2}\right)$, sugara $r=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$. Ebből láthatjuk, hogy nem minden $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ egyenlet kör egyenlete.

II. Parabola és egyenletei

DEFINÍCIÓ: A **parabola** azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy v egyenesétől és az egyenesre nem illeszkedő F ponttól egyenlő távolságra vannak.
Az adott egyenes a parabola **vezéregyenes**e (direktrixe), az adott pont a parabola **fókuszpont**ja.

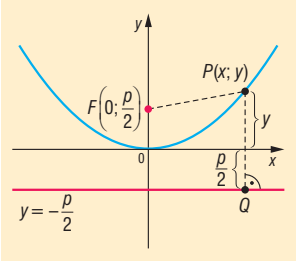


A vezéregyenes és a fókuszpont távolsága a parabola **paramétere** ($p>0$).
A fókuszpontra illeszkedő és a vezéregyenesre merőleges egyenes a parabola szimmetriatengelye, röviden **tengely**e (t).
A parabola tengelyen lévő pontja a parabola **tengelypont**ja (T). A tengelypont felezi a fókusz és a vezéregyenes távolságát.

TÉTEL: Az $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú $y=-\frac{p}{2}$ vezéregyenesű **parabola egyenlete**: $y=\frac{1}{2p}x^2$.

Ez azt is jelenti, hogy a parabola tengelypontja $T(0;0)$, paramétere p (és a fókusza a tengelypont felett van, azaz a parabola „pozitív” állású), ekkor a parabola egyenlete $y=\frac{1}{2p}x^2$.

BIZONYÍTÁS:



A vezéregyenes egyenlete: $y=-\frac{p}{2}$. Egy síkbeli P pont akkor és csak akkor illeszkedik a parabolára, ha a parabola fókuszától és vezéregyenesétől egyenlő távolságra van. A P pont és a vezéregyenes távolsága egyenlő a PQ távolsággal, ahol Q a P pont merőleges vetülete a v vezéregyenesen, ezért $Q\left(x;-\frac{p}{2}\right)$.

$$\left.\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} \\ PF &= \sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} \end{aligned}\right\} PQ = PF\,,$$

azaz

$$\sqrt{\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}\,.$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens egyenletet ad:

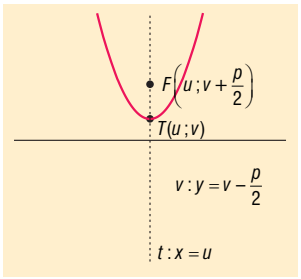
$$\left(y+\frac{p}{2}\right)^2 = x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2+py+\frac{p^2}{4} = x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}$$

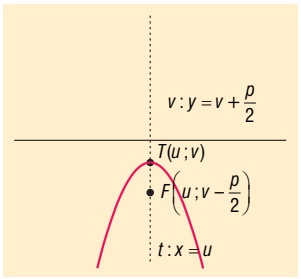
$2py = x^2 \;\Rightarrow$ (mivel $p>0$): $y=\frac{1}{2p}x^2$ (origó tengelypontú $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú parabola tengelyponti egyenlete).

TÉTEL: A p paraméterű $T(u, v)$ tengelypontú parabolák tengelyponti egyenlete és jellemzőik:

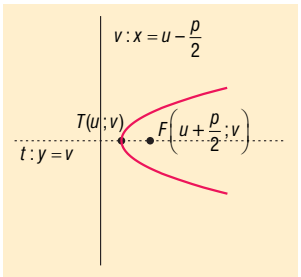
$y=\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$



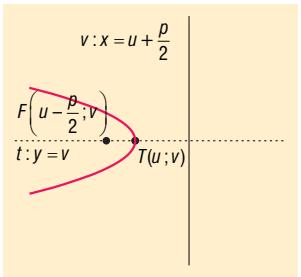
$y=-\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$



$x=\frac{1}{2p}(y-v)^2+u$



$x=-\frac{1}{2p}(y-v)^2+u$



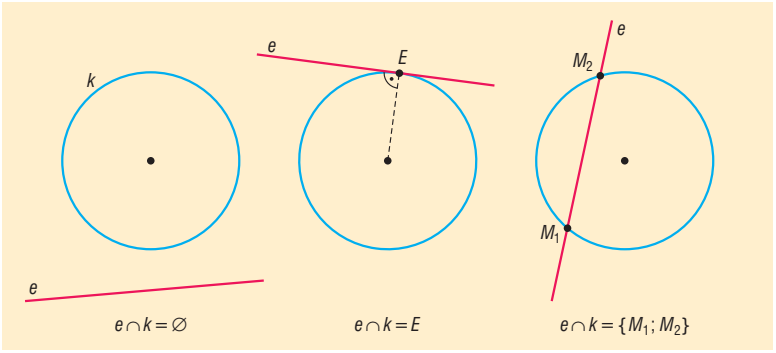
Minden másodfokú függvény grafikonja az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola, és minden y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola valamelyik másodfokú függvény grafikonja.

$\Rightarrow f(x) = a\cdot x^2+b\cdot x+c = y$ teljes négyzetté alakítva átalakítható $y=\pm\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$ alakba.

$\Leftarrow$ Minden $y=\pm\frac{1}{2p}(x-u)^2+v$ parabola esetén zárójelfelbontás, összevonás után megkapható az $y = a\cdot x^2+b\cdot x+c$ alak.

III. Kör és egyenes kölcsönös helyzete

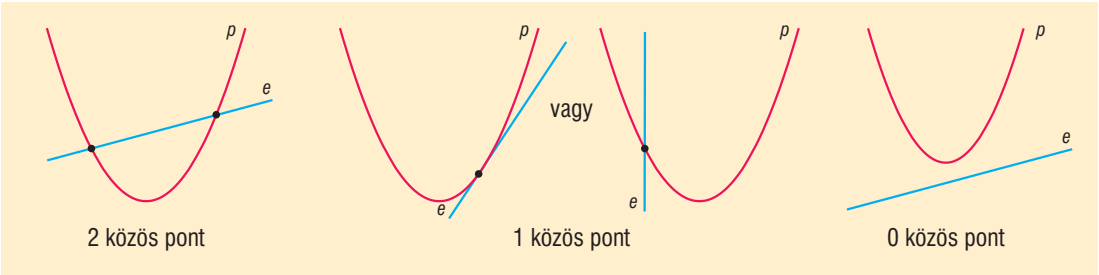
Egy síkban egy körnek és egy egyenesnek háromféle helyzete lehet: **nincs közös pont**juk, egy közös pontjuk van (az egyenes **érinti** a kört), két közös pontjuk van (az egyenes **metszi** a kört).



Egy kör és egy egyenes közös pontjainak a meghatározása az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldásával történik a következő módon:
Az egyenes egyenletéből kifejezzük az egyik ismeretlent, és azt a kör egyenletébe behelyettesítjük. Így egy másodfokú egyismeretlenes egyenletet kapunk.
Az egyenlet diszkriminánsa határozza meg a közös pontok számát. Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek 2 megoldása van, vagyis az egyenes metszi a kört. Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek egy megoldása van, vagyis az egyenes érinti a kört. Ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, vagyis az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja.

IV. Parabola és egyenes kölcsönös helyzete

Parabola és egyenes közös pontjainak a száma lehet 2, 1, 0.



Az a tény, hogy a parabolának és az egyenesnek egy közös pontja van, nem jelenti azt, hogy az egyenes érintője a parabolának, mert az is lehetséges, hogy az egyenes párhuzamos a parabola tengelyével.

DEFINÍCIÓ: A **parabola érintője** olyan egyenes, melynek egy közös pontja van a parabolával és nem párhuzamos a parabola tengelyével.

Parabola és érintőjének meghatározása kétféle módon:

- Az egyenes egyenletét egy paraméterrel felírva (célszerű paraméternek az m meredekséget választani), ilyenkor is figyelni kell, hogy m ne a tengellyel párhuzamos egyenesre utaljon. Olyan m értéket keresünk, amely az egyenesre felírt elsőfokú, paraméteres, kétismeretlenes egyenletnek, vagyis egyenletrendszernek pontosan egy megoldáspárját adja.
  A megoldás módja pl. a parabola egyenletéből behelyettesítünk az egyenes egyenletébe (vagy fordítva), ekkor egy paraméteres, egyismeretlenes, másodfokú egyenletet kapunk.
  Az egyenes akkor és csak akkor érinti a parabolát, ha az egyenlet diszkriminánsa 0. Az így kapott (általában m-re nézve másodfokú) egyenlet valós megoldásai (ha léteznek) adják a kérdéses érintők meredekségét, amiből egyenletük már felírható.

- Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola érintőjének meredeksége a parabola egyenletéből kapható másodfokú függvény deriváltjából határozható meg (ez jóval gyorsabb és egyszerűbb az előző módszernél).
  Az y tengellyel nem párhuzamos tengelyű, vagyis az x tengellyel párhuzamos tengelyű parabola érintőjének meredeksége a parabola egyenletéből kapható gyökfüggvény (figyelni kell, hogy melyik ágát nézzük) deriváltjából határozható meg (ez bonyolultabb, nagyobb odafigyelést kíván az előző módszernél).

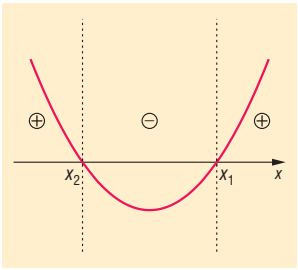
V. Másodfokú egyenlőtlenségek

DEFINÍCIÓ: Egyenlőtlenségről beszélünk, ha algebrai kifejezéseket a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ jelek valamelyikével kapcsoljuk össze. Ha ezek a kifejezések másodfokúak, akkor **másodfokú egyenlőtlenség**ről beszélünk.

Az **egyenlőtlenségek megoldási módszerei** hasonlóak az egyenletek megoldási módszereihez:

1. A **mérlegelv** alkalmazásánál az egyik eltérés a negatív értékkel való szorzás, illetve osztás, mert ekkor az egyenlőtlenség iránya megváltozik. Ezért el kell kerülni az ismeretlent tartalmazó kifejezéssel történő szorzást, osztást. Ehelyett 0-ra rendezés után előjelvizsgálatot kell végezni, amit célszerű grafikusan megoldani. Másik eltérés a két oldal reciprokának vételekor áll fenn. Mindkét oldal reciprokát véve, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalán negatív kifejezés áll, akkor a reláció iránya megváltozik, különben a reláció nem változik.

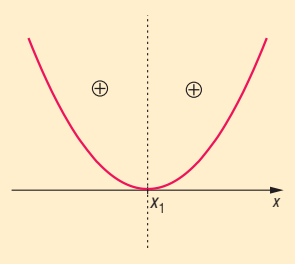
2. **Grafikus megoldás:** A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásánál fontos szerepet játszik, hogy az egyenlőtlenségekben szereplő másodfokú kifejezések grafikonja a koordinátarendszerben parabola. A másodfokú egyenlet megoldásához hasonlóan 0-ra rendezünk úgy, hogy a főegyüttható pozitív legyen, tehát $a > 0$. Ekkor $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ vagy $ax^2 + bx + c < 0$ alakú minden másodfokú egyenlőtlenség.
   Ha a bal oldalon álló kifejezés által meghatározott függvényt ($f(x) = ax^2 + bx + c$) ábrázoljuk, akkor, mivel a értéke pozitív, ezért felül nyitott, pozitív állású parabolát kapunk. Az egyenlőtlenség megoldása ekkor egyenértékű az $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$, illetve $f(x) < 0$ vizsgálattal.
   Ehhez először határozzuk meg az $f(x)$ függvény **zérushelyei**t:
   - Ha két zérushely van, x_1 és x_2 (ahol $x_2 < x_1$), akkor lehetőségeink az $f(x)$ függvény előjelére ($f(x_1) = f(x_2) = 0$):



Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in]-\infty, x_2] \cup [x_1, \infty[$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in]-\infty, x_2[\cup]x_1, \infty[$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in [x_2, x_1]$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in]x_2, x_1[$

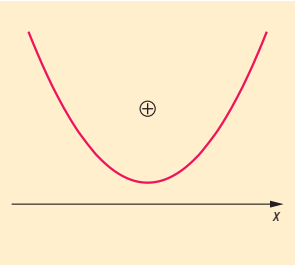
   Azaz, ha $\geq$ helyett $>$, $\leq$ helyett $<$ szerepel csak, akkor megoldásunkban a zárt intervallumvégeket nyitottra cseréljük.

- Ha egy zérushely van, x_1, akkor lehetőségeink az $f(x)$ függvény előjelére ($f(x_1) = 0$):



Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x = x_1$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \{\ \}$

- Ha 0 zérushely van, akkor $f(x)$ mindenütt pozitív:

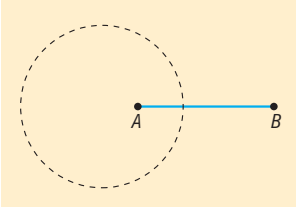


Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in \{\ \}$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \{\ \}$

VI. Alkalmazások:

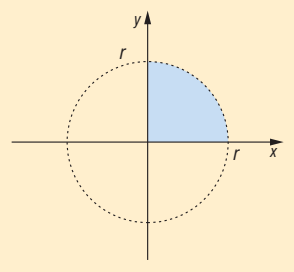
Koordináta-geometria segítségével elemi geometriai feladatok algebrai úton oldhatók meg:

- Adott tulajdonságú ponthalmaz keresése: Mi azon P pontok halmaza, amelyekre adott A, B esetén $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$?
  (Apollóniosz-kör)

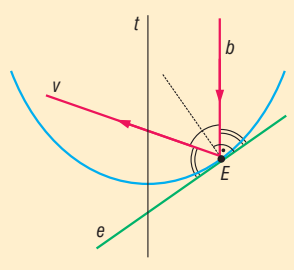


- Kör területének meghatározása integrálással (kell hozzá az integrálandó függvény)

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{r^2 - x^2} \;\Rightarrow\; T = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{r^2\pi}{4}$$



- A parabolaantenna működésének lényege a parabola és fókuszának tulajdonságával magyarázható: a tengellyel párhuzamosan beeső jel a fókuszon keresztül verődik vissza



- Mesterséges égitestek pályája az úgynevezett szökési sebesség esetén parabola
- Szélsőérték-feladatok megoldása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Már a Kr. e. III. században élt nagy görög matematikus, **Apollóniusz** is foglalkozott a kúpszeletekkel: a körrel, az ellipszissel, a parabolával és a hiperbolával. 8 kötetes művének óriási hatása volt a későbbi korok matematikusaira (**Arkhimédész**re, Descartes-ra, Fermat-ra). Az ő munkásságától függetlenül először Euler írt a kúpszeletekről 1748-ban.
- **Fermat** (1601–1665) francia matematikus Descartes előtt megalkotta a koordináták módszerét, megkereste az egyenes és a kúpszeletek egyenletét. Viszont kutatása nem volt hatással az analitikus geometria fejlődésére, ugyanis gondolatait csak levelezőpartnereivel osztotta meg.
- **Descartes** 1637-ben megjelent Geometria c. könyvét tekintjük az első koordináta-geometriai műnek, ebben már következetesen használja az újkori matematikai jelöléseket. Ebben a könyvében aritmetizálta az **euklideszi** geometriát: Descartes középpontba állítja az origót, a centrumot, és a belőle sugárzó alapirányokat, azaz a vertikális és a horizontális tengelyt. A descartes-i **koordináta-rendszer**nek köszönhetően a görbék leírhatók egyenlettel.
- **Euler** (1707–1783) svájci származású matematikus a kúpszeletekről végzett kutatásaiban elsőként haladta meg Apollóniusz által megállapítottakat. Az analitikus geometria keretében szinte egymaga alkotta meg a ma használatos trigonometriát.

21. Térelemek távolsága és szöge. Térbeli alakzatok. Felszín- és térfogatszámítás

Vázlat:

I. Térelemek, ezek illeszkedése, párhuzamossága, szöge, távolsága
II. Térbeli alakzatok: testek csoportosítása
III. Testek felszíne
IV. Testek térfogata
V. Testek felszíne, térfogata képletekkel
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Térelemek

Pont, egyenes, sík – alapfogalmak, nem definiáljuk őket, hanem a szemléletből kialakult jelentésükre hagyatkozunk.

DEFINÍCIÓ: Két térelem **illeszkedő**, ha egyik részhalmaza a másiknak.

DEFINÍCIÓ: Két egyenes **párhuzamos**, ha egy síkban vannak és nem metszik egymást.

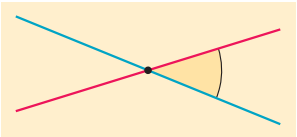
DEFINÍCIÓ: Egyenes és sík, illetve 2 sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.

DEFINÍCIÓ: Egy egyenest egy rá illeszkedő pont két **félegyenesre** oszt, ez a pont mindkét félegyenes kezdőpontja.

DEFINÍCIÓ: Egy síkban két, azonos pontból kiinduló félegyenest és az általuk meghatározott bármelyik síkrészt **szög**nek nevezzük. A közös kezdőpont a szög csúcspontja, a két félegyenes a szög szárai, a síkrész a szögtartomány.

DEFINÍCIÓ: Illeszkedő vagy párhuzamos **térelemek szög**e 0°.

DEFINÍCIÓ: Két metsző egyenes 4 szöget alkot, ezek közül 2-2 egyenlő. Ha a két egyenes nem merőleges egymásra, akkor a **két egyenes hajlásszöge** a kétfajta szög közül a kisebbik. Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor a hajlásszögük derékszög. Eszerint két metsző egyenes hajlásszöge 90°-nál nem nagyobb.

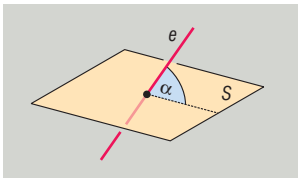


DEFINÍCIÓ: Két egyenes **kitérő**, ha nincsenek egy síkban.

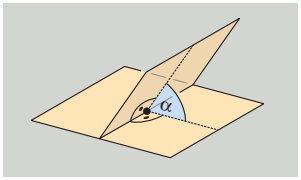
DEFINÍCIÓ: Két kitérő egyenes hajlásszöge egyenlő a tér egy tetszőleges pontján átmenő és az adott egyenesekkel párhuzamos egyenesek hajlásszögével. Ez a szög a pont megválasztásától független.

TÉTEL: Egy, a síkot metsző egyenes merőleges a síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére (**síkra merőleges egyenes tétele**).
Definíció szerint egy egyenes merőleges a síkra, ha merőleges a sík minden olyan egyenesére, amely átmegy az egyenes és a sík metszéspontján.

DEFINÍCIÓ: Ha az e egyenes nem merőleges a síkra, akkor az egyenes merőleges vetülete a síkon szintén egyenes (*e'*). Ebben az esetben az **egyenes és a sík hajlásszögé**n az egyenes és a vetülete hajlásszögét értjük. Ez a szög a legkisebb az egyenes és a sík egyenesei által bezárt szögek között.



DEFINÍCIÓ: Ha két sík nem párhuzamos egymással, akkor metszésvonaluk egy pontjában mindkét síkban merőlegest állítunk a metszésvonalra. A **két sík hajlásszöge** e két egyenes hajlásszögével egyenlő. Ez a szög a pont megválasztásától független.

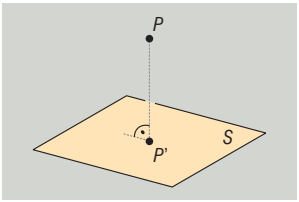


DEFINÍCIÓ: Két illeszkedő vagy metsző **térelem távolsága** 0.

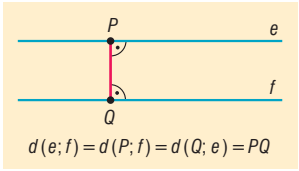
DEFINÍCIÓ: Két pont távolsága a pontokat összekötő szakasz hossza.

DEFINÍCIÓ: Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

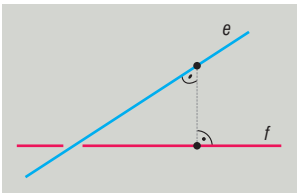
DEFINÍCIÓ: Pont és sík távolsága a pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hossza.



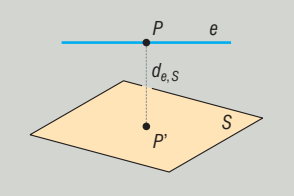
DEFINÍCIÓ: Párhuzamos egyenesek távolsága: bármelyik egyenes egy tetszőleges pontjának távolsága a másik egyenestől, azaz a két egyenest összekötő, mindkettőre merőleges szakasz hossza.



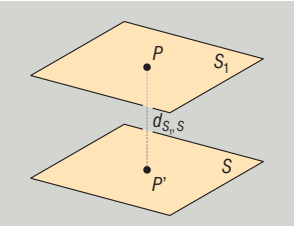
DEFINÍCIÓ: Két kitérő egyenes távolsága az őket összekötő, mindkettőre merőleges szakasz hossza. Azt az egyenest, mely mindig létezik és egyértelmű és amely mindkét kitérő egyenesre merőleges, a két egyenes normáltranszverzálisának nevezzük. Így két kitérő egyenes távolsága normáltranszverzálisuk közéjük eső részének hossza.



DEFINÍCIÓ: Egyenes és vele párhuzamos sík távolsága az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól való távolságával egyenlő, azaz az egyenes bármely pontjából a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszával egyenlő.



DEFINÍCIÓ: Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másiktól vett távolsága, azaz bármelyik sík egy tetszőleges pontjából a másik síkra bocsátott merőleges szakasz hossza.

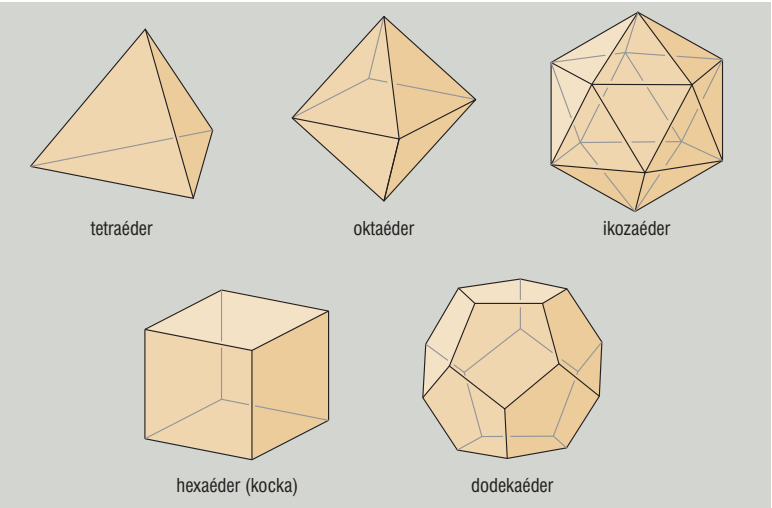


II. Térbeli alakzatok

DEFINÍCIÓ: A térnek véges felületekkel határolt részét **test**nek nevezzük.

DEFINÍCIÓ: A sokszöglapokkal határolt testek a **poliéder**ek.

DEFINÍCIÓ: A **szabályos testek** olyan poliéderek, amelynek lapjai egybevágó szabályos sokszögek, valamennyi lapszögük és élszögük egyenlő.



DEFINÍCIÓ: Hengerszerű testek: egy síkidom kerületén levő pontokon keresztül párhuzamosokat húzunk egy, a síkidom síkjával nem párhuzamos egyenessel. Az így kapott palástfelületet az eredeti síkidom síkjával és egy vele párhuzamos síkkal elmetszünk. A kapott véges test a hengerszerű test. Ha a test alaplapja sokszög, akkor **hasáb**nak, ha kör, **henger**nek nevezzük.

Ha a párhuzamos egyenesek merőlegesek az alaplap síkjára, akkor a testet **egyenes hengerszerű test**nek, különben **ferde hengerszerű test**nek nevezzük.

Forgástestek térfogata:

TÉTEL: Ha $f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos és $f(x) \geq 0$, akkor az $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

TÉTEL: Az r sugarú gömb térfogata: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

BIZONYÍTÁS: A gömb származtatható egy félkör átmérő körüli megforgatásával, ezért térfogata a $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ összefüggéssel meghatározható.

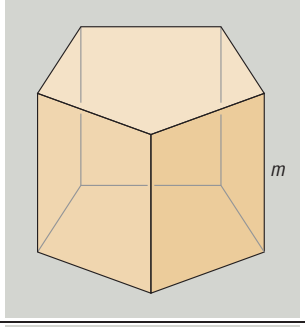
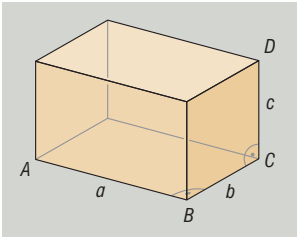
Az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = r^2$, ebből a $[-r; r]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvény grafikonja egy félkör, melynek x tengely körüli megforgatásával származtatható az r sugarú gömb. Így a gömb térfogata:

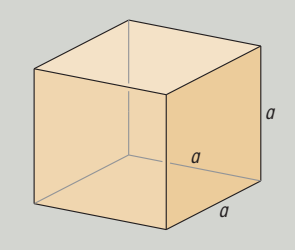
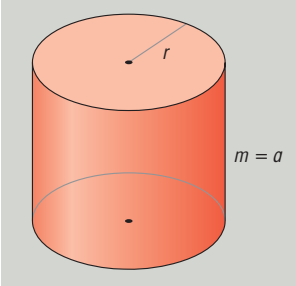
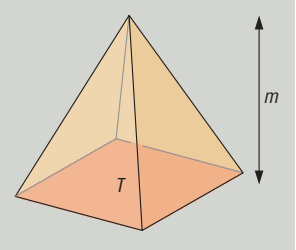
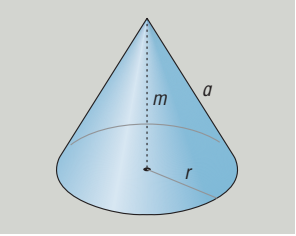
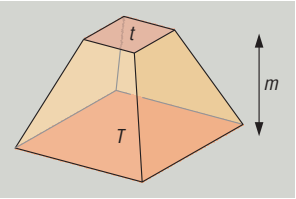
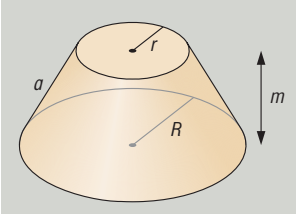
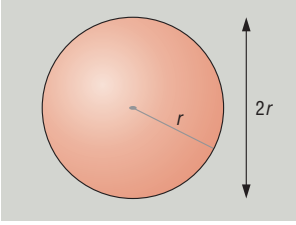
$$V = \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \left[\left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right] = \pi \left[\frac{2}{3} \cdot r^3 - \left(-\frac{2}{3} \cdot r^3 \right) \right] = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3$$

TÉTEL: Hasonló testek térfogatának aránya megegyezik a hasonlóság arányának köbével.

V. Testek felszíne és térfogata

Test		Felszín	Térfogat
Hasáb		$A = 2T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}}$	$V = T_{\text{alap}} \cdot m$
Téglatest		$A = 2(ab + bc + ca)$	$V = abc$

Test		Felszín	Térfogat
Kocka		$A = 6a^2$	$V = a^3$
Henger		$A = 2r\pi(r + a)$	$V = r^2\pi m$
Gúla		$A = T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}}$	$V = \frac{T_{\text{alap}} \cdot m}{3}$
Kúp		$A = r\pi(r + a)$	$V = \frac{r^2\pi m}{3}$
Csonka gúla		$A = T + t + T_{\text{palást}}$	$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right)$
Csonka kúp		$A = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)a)$	$V = \frac{m\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$
Gömb		$A = 4r^2\pi$	$V = \frac{4r^3\pi}{3}$

22. Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával

Vázlat:

I. Területszámítás
II. Síkidomok területe: téglalap, paralelogramma, háromszög, trapéz, deltoid, négyszögek, sokszögek, kör
III. Határozott integrál
IV. Görbe alatti terület
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás

I. Területszámítás

A **mérés** egy egységnyinek tekintett értékkel való összehasonlítást jelent. Ahhoz, hogy mérni tudjunk, rögzíteni kell a mérés szabályait.

DEFINÍCIÓ: A **terület** mérése azt jelenti, hogy minden síkidomhoz hozzárendelünk egy pozitív valós számot, amelyet a síkidom területének nevezünk. Ez a hozzárendelés az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe egységnyi.
- Egybevágó sokszögek területe egyenlő.
- Ha egy sokszöget véges számú sokszögre darabolunk, akkor az egyes részek területének összege egyenlő az eredeti sokszög területével.

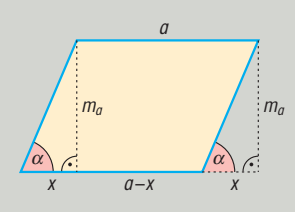
II. Síkidomok területe

Bebizonyítható, hogy ilyen területértelmezés mellett igazak a következő állítások:

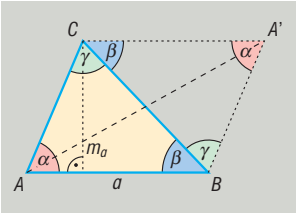
TÉTEL: A **téglalap területe** két szomszédos oldalának szorzatával egyenlő. $t = a \cdot b$.

Minden paralelogramma átdarabolható téglalappá, így

TÉTEL: a **paralelogramma területe**: $t = a \cdot m_a$.



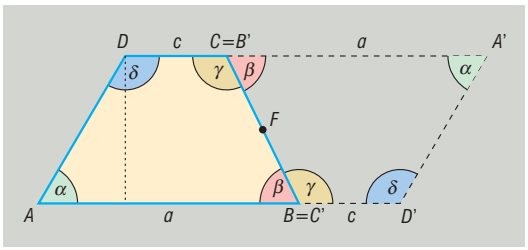
Minden háromszöget valamely oldalának felezőpontjára tükrözve az eredeti háromszög és (az eredetivel egybevágó) képe együtt egy paralelogrammát alkot, így a paralelogramma területének a fele



TÉTEL: a **háromszög területe**: $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$.

Tükrözve bármely trapézt az egyik szárának felezőpontjára olyan paralelogrammát kapunk, amelynek területe kétszerese a trapéz területének.

TÉTEL: A **trapéz területe** az alapok számtani közepének és a trapéz magasságának szorzata: $t = \frac{a+c}{2} \cdot m$.

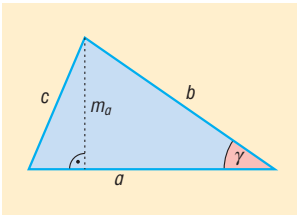


Minden sokszög véges számú háromszögre darabolható, így

TÉTEL: a **sokszög területe** egyenlő ezeknek a háromszögeknek a területösszegével.

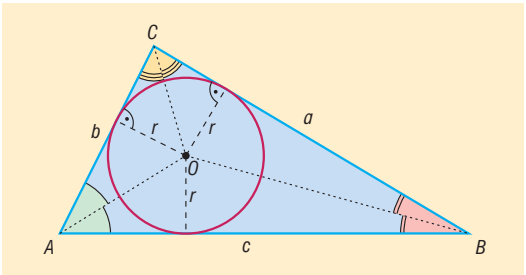
TÉTEL: Háromszög területei: $t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = r \cdot s = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$

ahol r a beírt kör sugara, R a körülírt kör sugara, s a félkerület.



TÉTEL: $t = r \cdot s$.

BIZONYÍTÁS: A háromszög beírt körének középpontja a szögfelezők metszéspontja.

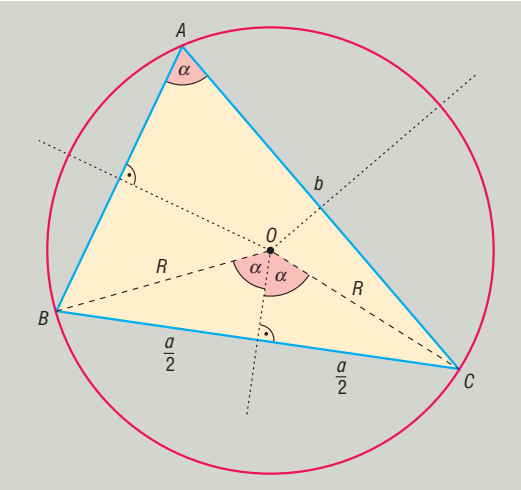


Berajzoljuk a szögfelezőket, így ABC háromszöget felbontjuk három háromszögre: az ABO, BCO és CAO háromszögekre, mindhárom háromszögben az egyik oldalhoz tartozó magasság r. Így felírható az eredeti háromszög területe a részháromszögek területének összegével.

$$t_{ABC\triangle} = t_{ABO\triangle} + t_{BCO\triangle} + t_{CAO\triangle} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s\,.$$

TÉTEL: $t = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.

BIZONYÍTÁS: A háromszög körülírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.



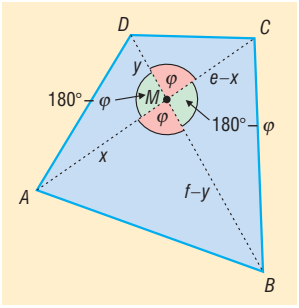
Ha *CAB* kerületi szög α, akkor *COB* középponti szög 2α (ugyanahhoz az ívhez tartoznak).

COB egyenlő szárú háromszög $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$.

$$t = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

TÉTEL: Négyszög területe: az átlói hossza és az átlók által bezárt szög szinuszának a szorzatának fele: $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$.

BIZONYÍTÁS: Az *ABCD* konvex négyszög, átlóinak metszéspontja *M*. *M* az átlókat x, $e - x$, illetve y, $f - y$ részekre osztja. A két átló 4 db háromszögre osztja a négyszöget, így a négyszög területe egyenlő a négy háromszög területének összegével:



$$t_{ABCD} = t_{ABM\triangle} + t_{BCM\triangle} + t_{CDM\triangle} + t_{DAM\triangle}$$

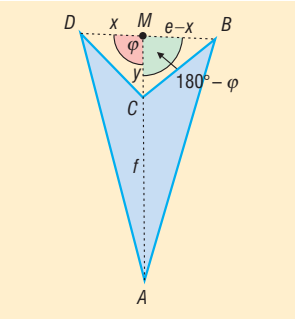
$$t = \frac{x \cdot (f-y) \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{(e-x) \cdot (f-y) \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2} + \frac{(e-x) \cdot y \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{y \cdot x \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2}$$

$\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$, mert $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, ekkor $\frac{\sin\varphi}{2}$-t kiemelve:

$$t = \frac{\sin\varphi}{2} \cdot \left[x \cdot (f-y) + (e-x) \cdot (f-y) + (e-x) \cdot y + y \cdot x\right] = \frac{\sin\varphi}{2} \cdot \left[(f-y) \cdot e + y \cdot e\right] =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{2} \cdot [f - y + y] \cdot e = \frac{\sin\varphi}{2} \cdot f \cdot e = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}.$$

ABCD konkáv négyszög, átlóinak metszéspontja *M* a virtuális átlót *x*, $e - x$ részekre osztja, míg a valódi átló: $CA = AM - CM$.



Az *ABD* háromszög területe egyenlő az *ABCD* négyszög területének és a *BCD* háromszög területének összegével, így

$$t_{ABCD} = t_{ABD\triangle} - t_{BCD\triangle} = t_{ABM\triangle} + t_{AMD\triangle} - t_{CBM\triangle} - t_{CMD\triangle}.$$

TÉTEL: A deltoid területe az átlói szorzatának a fele.

TÉTEL: Szabályos sokszög területét úgy kapjuk, hogy középpontjukat összekötjük a csúcsokkal és így *n* db egyenlő szárú háromszögre bontjuk a sokszöget:

$$t = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}}{2},$$

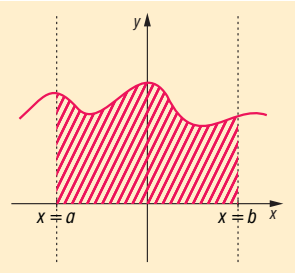
ahol *r*: a beírt kör sugara, *R*: a körülírt kör sugara.

TÉTEL: AZ *r* sugarú kör területe: $r^2\pi$ (sorozatok határértékével)

III. Határozott integrál

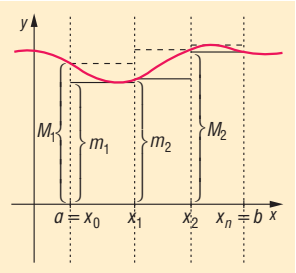
A határozott integrál segítségével függvénygörbe vonalával határolt síkidomok területét is meg tudjuk határozni. Ehhez először a **görbe alatti terület**et kell vizsgálnunk.

DEFINÍCIÓ: Görbe alatti területnek nevezzük egy $[a; b]$ intervallumon folytonos, korlátos, pozitív értékű *f* függvény görbéjének az intervallumhoz tartozó íve, az $x = a$, az $x = b$ egyenesek és az *x* tengely által határolt területet.



DEFINÍCIÓ: A görbe alatti területet téglalapok egyesítésével létrejött sokszögekkel közelítjük. Ehhez az $[a; b]$ intervallumot az $a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n = b$ pontokkal *n* részre osztjuk. Ezt az intervallum egy **felosztás**ának nevezzük.

Tekintsük ennek a felosztásnak egy intervallumát: $[x_{i-1}; x_i]$. Jelölje m_i az *f* függvénynek ebben az intervallumban felvett értékeinek **alsó határ**át (az alsó korlátok közt a legnagyobb), M_i pedig a **felső határ**át (a felső korlátok közt a legkisebb). Bizonyítható, hogy korlátos függvényeknél ezek az értékek léteznek.



Az $[x_{i-1}; x_i]$ intervallum fölé szerkesszünk olyan téglalapokat, amelyeknek másik oldala m_i, illetve M_i. Végezzük el a szerkesztést a felosztás minden intervallumában és egyesítsük a kisebb téglalapokat és a nagyobb téglalapokat külön két sokszögbe. Ekkor a vizsgált tartomány egy **beírt**, illetve egy **körülírt sokszög**ét kapjuk. Ezeknek a sokszögeknek a területét vizsgáljuk.
A beírt sokszög területe az **alsó közelítő összeg**:

$$s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

A körülírt sokszög területe a **felső közelítő összeg**:

$$S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}).$$

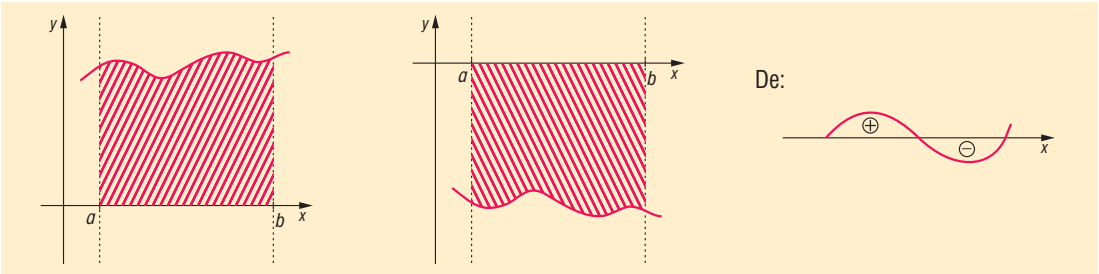
További osztópontokat véve a meglévőkhöz a felosztást finomítjuk, akkor s_n általában nő, S_n általában csökken, és ekkor a leghosszabb részintervallumok hossza is 0-hoz tart.
Így végtelen sok alsó és felső összeg keletkezik. Belátható, hogy bármely alsó összeg nem lehet nagyobb bármely felső összegnél.

DEFINÍCIÓ: Az $[a; b]$ intervallumon korlátos, f függvény integrálható, ha bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozatához tartozó alsó és felső összegei sorozatának közös határértéke van, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Ezt a közös határértéket nevezzük az f függvény $[a; b]$ intervallumon vett **határozott integrál**jának. Jelölés: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

IV. Görbe alatti terület

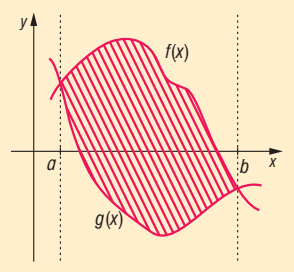
Így tehát nemnegatív, integrálható függvények határozott integrálja megadja a **függvény alatti terület**et.
Az integrál területszámítási alkalmazásánál figyelembe kell venni, hogy az x tengely alatti terület negatív előjellel adódik.

TÉTEL: Ha az $[a; b]$-on folytonos f függvény nem vált előjelet, akkor $x = a$, $x = b$, és **az x tengely és a függvény grafikonja által közrezárt síkidom területe**: $t = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.



TÉTEL: Két függvény által közrezárt síkidom területe:

$$t = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \quad (\text{ha } f(x) > g(x))$$



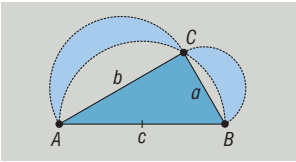
Ilyenkor általában a két függvény metszéspontját kell először meghatározni. Majd a két függvény különbségét kell integrálni, a legvégén pedig a Newton-Leibniz formulával kiszámolni a határozott integrál értékét.

V. Alkalmazások:

- Pitagorasz-tétel bizonyítása terület-összerakással
- Geometriai valószínűségek kiszámításakor szükség van geometriai alakzatok területének meghatározására
- Kör területe
- Síkidomokkal, illetve síkba kiteríthető felületekkel határolt testek felszínének meghatározása (hasáb, henger, kúp, gúla, csonka kúp, csonka gúla)

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Síkidomok területével már az ókorban is foglalkoztak: **Hippokratész** Kr. e. 450 körül egy rendszerező matematikai művet írt, melyben sokat foglalkozott különböző egyenesek és körívek által meghatározott területek kiszámításával.
- **Hippokratész** „holdacskái”: A derékszögű háromszög oldalai fölé rajzoljunk félköröket. Ekkor a két „holdacska” területének összege egyenlő a háromszög területével.

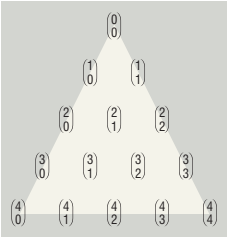


- Kb. 150 évvel később **Arkhimédész** műveiben is találunk a területszámításról említést: ő is a kimerítés módszerét használta (körülírt és beírt téglalapok területével való közelítés).
- **Riemann** (1826–1866) német matematikus fejlesztette ki a róla elnevezett integrálást. A határozott integrál definíciója pontosítva: Riemann szerint integrálható…
- **Leibniz** (1646–1716) német és **Newton** (1642–1727) angol matematikusok egymástól függetlenül felfedezték a differenciál- és integrálszámítást. A mai jelölések többnyire Leibniztől származnak: a differenciálhányados $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ és az integrál $\left(\int \mathrm{d}x\right)$ jele. Ő használta először a függvény, a differenciálszámítás, az integrálszámítás elnevezéseket. Newton Leibniz előtt dolgozta ki mindkét számítást, de nem tette közzé, jelölésrendszere is bonyolultabb volt, mint Leibnizé, így az utókor a Leibniz-féle elveket fogadta el. A határozott integrál kiszámításának képletét mindkettejük munkásságának elismeréseként nevezzük Newton-Leibniz formulának.

A Pascal-háromszög szimmetriája miatt is látható, hogy $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

A meghatározásból látszik, hogy az n-edik sorban a kéttagú összeg n-edik hatványának együtthatói, azaz a binomiális együtthatók állnak.

$(a+b)^0=1$	1
$(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot b$	1 1
$(a+b)^2=1\cdot a^2+2\cdot ab+1\cdot b^2$	1 2 1
$(a+b)^3=1\cdot a^3+3\cdot a^2b+3\cdot ab^2+1\cdot b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4=1\cdot a^4+4\cdot a^3b+6\cdot a^2b^2+4\cdot ab^3+1\cdot b^4$	1 4 6 4 1



III. Események

A valószínűség-számítás véletlen tömegjelenségek vizsgálatával foglalkozik.

DEFINÍCIÓ: Véletlen jelenségnek nevezzük azokat a jelenségeket, amelyeket a leírható körülmények nem határozzák meg egyértelműen.
Pl. egy dobókocka feldobása.

DEFINÍCIÓ: Kísérletnek nevezzük a véletlen jelenség megfigyelését.

DEFINÍCIÓ: Elemi eseménynek nevezzük a kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.
Pl. a kocka dobásánál azt, hogy hányas számot dobunk.

DEFINÍCIÓ: Az **eseménytér** az elemi események halmaza.
Pl. a kocka dobásánál {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

DEFINÍCIÓ: Az elemi események egy halmazát, azaz az eseménytér egy részhalmazát **esemény**nek nevezzük.
Pl. esemény a kockadobásnál páros szám dobása.
Az eseményeket nagybetűvel jelöljük. Pl. A = {2; 4; 6}

DEFINÍCIÓ: Az eseménytérhez tartozó azon esemény, amely biztosan bekövetkezik, a **biztos esemény**, amely semmiképpen sem következhet be, a **lehetetlen esemény**.
A biztos esemény jele: H, a lehetetlen esemény jele: $\varnothing$.
Pl. a kockadobásnál biztos esemény: 7-nél kisebb számot dobunk, lehetetlen esemény: 8-nál nagyobbat dobunk.

IV. Műveletek eseményekkel

DEFINÍCIÓ: Az A **esemény komplementere** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A nem következik be. Jele: $\overline{A}$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események összege** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A vagy B bekövetkezik. Jele: $A + B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események szorzata** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A és B bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események egymást kizárják**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az eseményekkel kapcsolatos műveletek tulajdonságai, azonosságai a halmazműveletekre megismert tételekhez hasonlóan leírhatók, illetve bizonyíthatók.

25. Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában

Vázlat:

I. Bizonyítások a matematikában
II. Direkt bizonyítás
III. Indirekt bizonyítás
IV. Teljes indukció
V. Skatulyaelv
VI. Alkalmazások

Kidolgozás

I. Bizonyítások a matematikában

A matematika különböző ágai hasonlóan épülnek fel. Meghatározunk **alapfogalmak**at, majd ezek segítségével további **fogalmak**at definiálunk. Kimondunk **alaptételek**et (axiómákat), amelyek igazságtartalmát bizonyítás nélkül, a szemlélet alapján elfogadjuk. Az axiómákból elindulva a matematikai logika eszközeivel, helyes következtetéseken keresztül további **tétel**eket bizonyítunk be.
A bizonyítás olyan eljárási mód egy állítás helyességének indoklására, amely során a matematikai logika műveleteit használjuk fel. A matematikai tételek általában implikációk vagy ekvivalenciák.
Az implikációk bizonyítása során a feltételből helyes matematikai következtetésekkel kell eljutni a következményhez. Bizonyítás közben a definíciókat, axiómákat, és a már bizonyított tételeket használhatjuk fel. Így belátjuk, hogy a feltétel valóban elégséges feltétele a következménynek.
Ekvivalenciák bizonyítása során két implikációt bizonyítunk be: be kell látni, hogy mindkét állításból következik a másik.

II. Direkt bizonyítás

DEFINÍCIÓ: A direkt bizonyítás során igaz állításokból (a feltételekből) kiindulva matematikailag helyes következtetésekkel jutunk el a bizonyítandó állításhoz. A legtöbb matematikai tétel (geometriai, algebrai) bizonyítása direkt úton történik.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

BIZONYÍTÁS: (részletesen lásd a 12. tételben)

$$a^2 + b^2 + 4t = c^2 + 4t$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

