Abszolútértékes és gyökös kifejezések
Megoldások

1) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}} < 0$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A $10-x>0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. (1 pont)
$\boldsymbol{x<10}$ (1 pont)

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$, ahol x valós szám és $x>-1$ **(6 pont)**

b) $2\cos^2 x = 4-5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl **(11 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1}+1=3^2$ (2 pont)
$\sqrt{x+1}=8$ (1 pont)
$x+1=64$ (1 pont)
$\boldsymbol{x=63}$ (1 pont)
Ellenőrzés. (1 pont)

b) $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ helyettesítéssel, (1 pont)
$2-2\sin^2 x+5\sin x-4=0$ (1 pont)
$\sin x = y$ új változóval $2y^2-5y+2=0$. (1 pont)
$y_1=2;\ y_2=\frac{1}{2}$ (2 pont)
y_1 nem megoldás, mert $|\sin x|\le 1$ (1 pont)
$\boldsymbol{x=\frac{1}{6}\pi+k2\pi}$ **vagy** $\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi+k2\pi}$ (fokban is megadható) (3 pont)
$k\in\mathbb{Z}$ (1 pont)
Ellenőrzés, vagy le kell írni, hogy a gyökök igazzá teszik az eredeti egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

Összesen: 17 pont

3) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2-\lg(3x+5)=\lg 20$ **(6 pont)**

b) $25^{\sqrt{x}}<5\cdot 5^{\sqrt[3]{x}}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x>-\frac{5}{3}$. (1 pont)
A logaritmus azonosságának helyes alkalmazása. (1 pont)
(A lg függvény kölcsönösen egyértelmű.)
$(x+15)^2=20(3x+5)$ (1 pont)
$x^2-30x+125=0$ (1 pont)
$\boldsymbol{x_1=25}$ és $\boldsymbol{x_2=5}$ (1 pont)
Mindkét megoldás megfelel. (1 pont)

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$5^{2\sqrt{x}} = 5^{1+3\sqrt{x}}$ (2 pont)

$\sqrt{x} = -1$ (1 pont)

A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért (1 pont)

nincs valós megoldás. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Válassza ki az *A* halmaz elemei közül azokat a számokat, amelyek megoldásai a $\sqrt{x^2} = -x$ egyenletnek! $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ (2 pont)

Megoldás:

Az egyenlet megoldásai az *A* halmaz elemei közül: **–1** és **0**. (2 pont)

5) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$|x - 2| = 7$ (2 pont)

Megoldás:

Az egyenlet megoldása a **9** (1 pont)

és a **–5**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$ (6 pont)

b) $\sin^2 x = 1 + 2\cos x$ (6 pont)

Megoldás:

a) A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet: $x \leq 5$, (1 pont)

és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke: $|x| \leq \sqrt{35,5}$. (1 pont)

Négyzetre emelve: $x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 71$. (1 pont)

Rendezve: $x^2 + 10x - 96 = 0$ (1 pont)

amelynek valós gyökei a –16 és a 6. (1 pont)

Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek Az egyenlet egyetlen megoldása a **–16**, hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

b) A bal oldalon a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést elvégezve kapjuk:

$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x$ (1 pont)

$\cos^2 x + 2\cos x = 0$ (1 pont)

$\cos x(\cos x + 2) = 0$. (1 pont)

Ha $\cos x = 0$, akkor $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$**, ahol** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$**.** (2 pont)

A $\cos x + 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása (mert $\cos x = -2$ nem lehetséges). (1 pont)

Összesen: 12 pont

7) Adja meg azt az x valós számot, melyre a következő egyenlőség teljesül!

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}=2$ **(2 pont)**

Megoldás:

$x=16$ (2 pont)

8)

a) Melyik $(x;y)$ valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left.\begin{aligned}2x-6y&=4\\3x+5y&=20\end{aligned}\right\}$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$\sqrt{x+2}=x$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) $(1)\ 2x-6y=4$

$(2)\ 3x+5y=20$

$(1)\ 2x=4+6y$

$x=2+3y$ (1 pont)

$(2)\ 3(2+3y)+5y=20$ (1 pont)

$6+9y+5y=20$ (1 pont)

$y=1$ (1 pont)

$x=2+3y=5$ (1 pont)

Ellenőrzés. Megoldás: $(5;1)$. (1 pont)

b) $\sqrt{x+2}=x$

$x+2=x^2$

$x^2-x-2=0$ (1 pont)

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ (1 pont)

$x_1=2$ (1 pont)

$x_2=-1$ (1 pont)

Ellenőrzés: $x_2=-1$ hamis gyök. (1 pont)

$x_1=2$ megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

9) Mely x valós számokra igaz, hogy $|x|=7$? **(2 pont)**

Megoldás:

$x_1=-7$ (1 pont)

$x_2=7$ (1 pont)

10) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x-4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x)=6$? (2 pont)

***Megoldás*:**

$x_1=-2$, $x_2=10$ (2 pont)

11)

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$x+4=\sqrt{4x+21}$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számot jelöl!

$$\left.\begin{aligned}3x+y&=16\\5x-2y&=45\end{aligned}\right\}$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $4x+21\geq 0$ és $x+4\geq 0 \Rightarrow x\geq -4$.

Négyzetre emelve mindkét oldalt (a belső kikötés elvégzése miatt lehetséges):

$x^2+8x+16=4x+21$. (2 pont)

Rendezve: $x^2+4x-5=0$. (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_1=-5$, $x_2=1$ (1 pont)

A -5 nem része az értelmezési tartománynak, így nem valódi gyök. (1 pont)

Az **1** ennek megfelelő gyök. (1 pont)

b) Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva az első egyenletet beszorozva 2-vel:

$$\left.\begin{aligned}6x+2y&=32\\5x-2y&=45\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Egyszerűsítés után adódik:

$11x=77$ (1 pont)

$x=7$ (1 pont)

Visszahelyettesítve x-et:

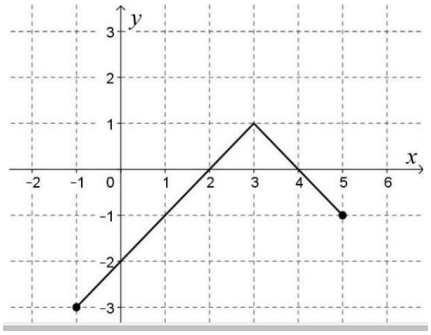
$y=-5$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

A feladat megoldható a klasszikus behelyettesítős módszerrel is!

Összesen: 12 pont

12) Az ábrán a $[-1;5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.
Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



A: $x\mapsto |x-3|+1$

B: $x\mapsto -|x+3|+1$

C: $x\mapsto -|x-3|+1$

D: $x\mapsto -|x+3|-1$

Megoldás:

A hozzárendelési szabály betűjele: **C** (2 pont)

13) Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait a valós számok halmazán!

$$\left|x^2-8\right|=8$$ **(3 pont)**

Megoldás:

$x_1=0$ (1 pont)

$x_2=4$ (1 pont)

$x_3=-4$ (1 pont)

14)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left|x-3\right|=3x-1.$$ **(7 pont)**

Az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R};\ f(x)=a\cdot x+b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x=4$ helyen a függvényérték 6.

b) Adja meg a és b értékét! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet alakja $x\geq 3$ esetén: $x-3=3x-1$, (1 pont)
amiből $x=-1$, (1 pont)
ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)
Az egyenlet alakja $x<3$ esetén: $-(x-3)=3x-1$, (1 pont)
amiből $x=1$. (2 pont)
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

b) A megadott feltételek szerint $a\cdot(-4)+b=0$, (2 pont)
továbbá $a\cdot 4+b=6$. (1 pont)
Az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve és a másik egyenletbe helyettesítve vagy a két egyenletet összeadva kapjuk, hogy (1 pont)
$b=3$, (1 pont)
$a=0,75$. (1 pont)

Összesen: 13 pont

15) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! **(2 pont)**

A) $\sqrt{(-5)^2}=5$

B) Minden $x\in\mathbb{R}$ **esetén** $\sqrt{x^2}=x$.

C) $2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$

***Megoldás*:**

A) $\sqrt{(-5)^2}=|(-5)|=5$, tehát az állítás **igaz**.

B) $\sqrt{x^2}=|x|$, amely állítás negatív x-re nem igaz, tehát az állítás **hamis**.

C) $2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=\sqrt{32}$, az állítás így **igaz**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

16) Az x-nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! (2 pont)

***Megoldás*:**

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $|x+2|=6$.

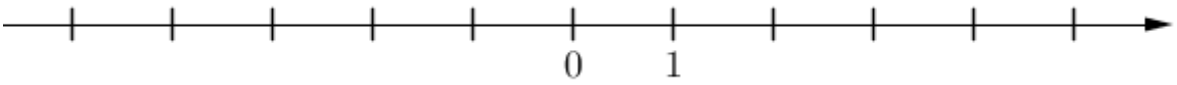
Az egyenlet megoldásánál két esetet különböztetünk meg.

I. $x+2=6 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 4}$ (1 pont)

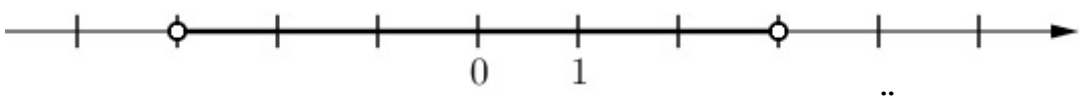
II. $x+2=-6 \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = -8}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

17) Ábrázolja az alábbi számegyenesen az $|x|<3$ egyenlőtlenség valós megoldásait! (2 pont)



***Megoldás*:**



Összesen: 2 pont

Egyenletek, egyenlőtlenségek
Megoldások

1)

a) Oldja meg a $7+x<-2\cdot(x-2)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (2 pont)

b) Oldja meg az $x^2+x-6\le 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (4 pont)

c) Legyen az A halmaz a $7+x<-2\cdot(x-2)$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza, B pedig az $x^2+x-6\le 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza. Adja meg az $A\cup B$, $A\cap B$ és $B\setminus A$ halmazokat! (6 pont)

Megoldás:

a) $7+x<-2\cdot(x-2)\Leftrightarrow 3x<-3,$ (1 pont)

ahonnan $x<-1.\ (A=]-\infty;-1[)$ (1 pont)

b) Az $x^2+x-6=0$ egyenlet gyökei: $-3;2$ (2 pont)

Mivel a főegyüttható pozitív, (1 pont)

ezért $-3\le x\le 2.\ (B=[-3;2])$ (1 pont)

c) $A\cup B=]-\infty;2]$ (2 pont)

$A\cap B=[-3;-1[$ (2 pont)

$B\setminus A=[-1;2]$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

2) Az $a=2$ és $b=-1$ esetén számítsa ki C értékét, ha $\frac{1}{C}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$! (2 pont)

Megoldás:

$C=-2$ (2 pont)

3) Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x\cdot y&=600\\ (x-10)\cdot(y+5)&=600\end{aligned}\right\}$$

(12 pont)

Megoldás:

$x=\frac{600}{y}$, ahol $y\neq 0$ (1 pont)

$xy+5x-10y=650$ (2 pont)

$600+\frac{3000}{y}-10y=650$

$3000-10y^2=50y$ (1 pont)

$y^2+5y-300=0$ (2 pont)

$y_1=15;\ y_2=-20$ (2 pont)

$x_1=40;\ x_2=-30$ (2 pont)

Ellenőrzés. (2 pont)

Összesen: 12 pont

4) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet: $-2x^2+13x+24=0$! (2 pont)

Megoldás:

Az egyenlet gyökei $-1,5$ és 8. (2 pont)

5)

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!
$(x+2)^2-90=5\cdot(0,5x-17)$ **(5 pont)**

b) Oldja meg a valós számok halmazán $\frac{3-x}{7x}<2$ egyenlőtlenséget!

(7 pont)

Megoldás:

a) A zárójelek felbontása: $x^2+4x+4-90=2,5x-85$ (1 pont)
$x^2+1,5x-1=0$ (1 pont)
$x_1=0,5,\ x_2=-2$ (2 pont)
A gyökök a valós számok halmazán megfelelnek. (1 pont)

b) $\frac{3-x}{7x}-2<0$ (1 pont)
$\frac{3-15x}{7x}<0$ (1 pont)
$3-15x>0$ és $7x<0$ (1 pont)
$\Rightarrow x<0$ (1 pont)
vagy $3-15x<0$ és $7x>0$ (1 pont)
$\Rightarrow x>0,2$ (1 pont)
Az egyenlőtlenség megoldása: $]-\infty;0[\cup]0,2;\infty[$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) Ha az eredetileg $I_0\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugár x mm $(x\geq 0)$ mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x)=I_o\cdot 0,1^{\frac{x}{6}}\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0=800\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

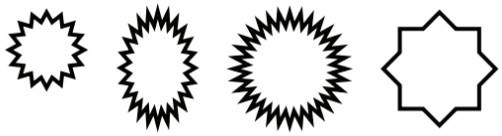
a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték I_0 15%-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!)

(6 pont)

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel? (8 pont)



Megoldás:

a)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800	713	635	505	450	357	253

(3 pont)

b) Megoldandó a $0{,}15 = 0{,}1^{\frac{x}{6}}$ egyenlet (ahol x a keresett távolság mm-ben mérve).

$\lg 0{,}15 = \frac{x}{6} \cdot 0{,}1$ (2 pont)

$x = 6 \cdot \frac{\lg 0{,}15}{\lg 0{,}1}$ (2 pont)

$x \approx 4{,}9$ (1 pont)

A lézersugár intenzitása kb. 4,9 mm mélységben csökken az eredeti érték **15%**-ára. (1 pont)

c) Minden csillag esetében három lehetőség van a megvilágításra: kék, zöld, nincs kirajzolva. (3 pont)

A különböző dekorációs tervek száma ezért: $3^4 = 81$. (4 pont)

Legalább egy csillagot ki kell rajzolni, így a lehetőségek száma $81 - 1 = 80$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

7) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^2 - 25 = 0$$ **(2 pont)**

Megoldás:

5; –5 (2 pont)

8) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$ **(5 pont)**

b) $-3x^2 - 1 \le -4$ **(7 pont)**

Mindkét esetben ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen!

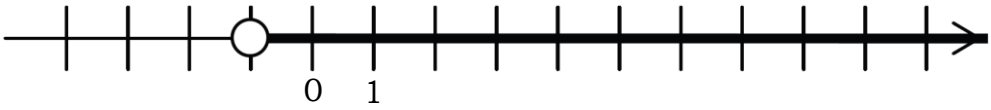
Megoldás:

a) $12x - 6 \cdot (x-1) > 3 \cdot (x-3) - 4 \cdot (x-2)$ (1 pont)

$12x - 6x + 6 > 3x - 9 - 4x + 8$ (1 pont)

$6x + 6 > -x - 1$ (1 pont)

$7x > -7$ azaz $x > -1$ (1 pont)



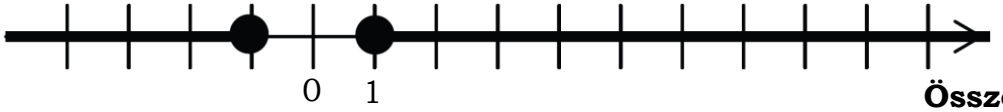
(1 pont)

b) $-3x^2 \le -3$ (1 pont)

$x^2 \ge 1$ (2 pont)

(Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza azoknak az x számoknak a halmaza, amelyekre teljesül) $x \ge 1$ (1 pont)

vagy $x \le -1$ (1 pont)



(2 pont)

Összesen: 12 pont

9) Mekkora az $x^2 - 6{,}5x - 3{,}50$ egyenlet valós gyökeinek összege, illetve szorzata? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az egyenlet gyökei: 7 és –0,5. (2 pont)

A gyökök összege: **6,5**.

A gyökök szorzata: **–3,5**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

10) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$ (5 pont)

b) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2} = 1$, ahol $x \ne 0$ és $x \ne -2$ (7 pont)

Megoldás:

a) $5 \cdot 5^x + 5^2 \cdot 5^x = 30$ (1 pont)

$30 \cdot 5^x = 30$ (1 pont)

$5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0$ (1 pont)

Az 5 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $x = 0$ (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) Az egyenlet bal oldalát közös nevezőre hozva: $\frac{3(x+2)-2x}{x(x+2)} = 1$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát $x(x+2)$-vel szorozva

$3(x+2) - 2x = x(x+2)$ (1 pont)

A zárójelek felbontása és összevonás után: $x + 6 = x^2 + 2x$ (1 pont)

Nullára rendezve: $x^2 + x - 6 = 0$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -3;\ x_2 = 2$ (2 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 12 pont

11)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \ge 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

Megoldás:

a) Ha $x<3$, akkor ($3-x>0$, ezért) $x+2\geq 0$, vagyis $x\geq -2$. (2 pont)
A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2;3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
Ha $x>3$, akkor ($3-x<0$, ezért) $x+2\leq 0$, vagyis $x\leq -2$. (2 pont)
A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
A megoldáshalmaz: $[-2;3[$. (1 pont)

b) $5\cdot 3^x=20$ (1 pont)
$3^x=4$ (1 pont)
$x=\log_3 4$ (1 pont)
$x\approx 1{,}2619$ (1 pont)

c) A megadott egyenlet cos *x*-ben másodfokú, így a megoldóképlet felhasználásával (1 pont)
$\cos x=0{,}5$ vagy $\cos x=-2$. (2 pont)
Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum). (1 pont)
A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

12) Legyenek *f* és *g* a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá: $f(x)=5x+5{,}25$ és $g(x)=x^2+2x+3{,}5$

a) Számítsa ki az alábbi táblázat hiányzó értékeit! (3 pont)

x	3	x	
$f(x)$		$g(x)$	2,5

b) Adja meg a *g* függvény értékkészletét! (3 pont)

c) Oldja meg az $5x+5{,}25>x^2+2x+3{,}5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (6 pont)

Megoldás:

a) $f(3)=20{,}25$ (1 pont)
$x^2+2x+3{,}5=2{,}5$ (1 pont)
$x=-1$ (1 pont)

b) A függvény hozzárendelési utasítását átalakítva: $x^2+2x+3{,}5=(x+1)^2+2{,}5$ (1 pont)
A függvény minimuma a 2,5. (1 pont)
Az értékkészlet: $[2{,}5;\infty[$ (1 pont)

c) Rendezés után: $x^2-3x-1{,}75<0$. (1 pont)
Az $x^2-3x-1{,}75=0$ egyenlet gyökei: $x_1=-\frac{1}{2}$ és $x_2=\frac{7}{2}$. (2 pont)
Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, (1 pont)
ezért az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

13) Mely x valós számokra igaz, hogy $x^2 = 9$? (2 pont)

Megoldás:

$x_1 = -3$. (1 pont)

$x_2 = 3$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

14)

a) Melyik $(x;y)$ valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left.\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ 3x + 5y &= 20 \end{aligned}\right\}$$

(6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x+2} = x$$

(6 pont)

Megoldás:

a) $(1)\ 2x - 6y = 4$

$(2)\ 3x + 5y = 20$

$(1)\ 2x = 4 + 6y$

$x = 2 + 3y$ (1 pont)

$(2)\ 3(2 + 3y) + 5y = 20$ (1 pont)

$6 + 9y + 5y = 20$ (1 pont)

$y = 1$ (1 pont)

$x = 2 + 3y = 5$ (1 pont)

Ellenőrzés. Megoldás: $(5;1)$. (1 pont)

b) $\sqrt{x+2} = x$

$x + 2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$ (1 pont)

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ (1 pont)

$x_1 = 2$ (1 pont)

$x_2 = -1$ (1 pont)

Ellenőrzés: $x_2 = -1$ hamis gyök. (1 pont)

$x_1 = 2$ megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

15) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2x}{5} = 4$ **(5 pont)**

b) $\lg(x-1) + \lg 4 = 2$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $5\cdot(x-1)+2\cdot(2x)=2\cdot5\cdot4$ (2 pont)

Tehát $x=5$ (2 pont)

Visszahelyettesítéssel az eredeti egyenletbe megbizonyosodtunk róla, hogy az $x=5$ megoldás helyes. (1 pont)

b) Értelmezési tartomány: $x>1$ (1 pont)

Logaritmus-azonosság alkalmazásával: $\lg4(x-1)=2$ (2 pont)

A logaritmus definíció alapján: $4(x-1)=1$ (2 pont)

$x=26$ (1 pont)

Ellenőrzés, visszahelyettesítés (1 pont)

Összesen: 12 pont

16)

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$\boldsymbol{x+4=\sqrt{4x+21}}$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol *x* és *y* valós számot jelöl!

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{3x+y&=16}\\ \boldsymbol{5x-2y&=45}\end{aligned}\right\}$$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $4x+21\geq0$ és $x+4\geq0\Rightarrow x\geq-4$

Négyzetre emelve mindkét oldalt (a belső kikötés elvégzése miatt lehetséges):

$x^2+8x+16=4x+21$. (2 pont)

Rendezve: $x^2+4x-5=0$ (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_1=-5$, $x_2=1$ (1 pont)

A -5 nem része az értelmezési tartománynak, így nem valódi gyök. (1 pont)

Az **1** ennek megfelelő gyök. (1 pont)

b) Az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva az első egyenletet beszorozva 2-vel:

$$\left.\begin{aligned}6x+2y&=32\\ 5x-2y&=45\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Egyszerűsítés után adódik:

$11x=77$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=7}$ (1 pont)

Visszahelyettesítve *x*-et:

$\boldsymbol{y=-5}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

A feladat megoldható a klasszikus behelyettesítős módszerrel is!

Összesen: 12 pont

17) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\boldsymbol{(x-3)^2+2x=14}$$

Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Megoldás:

$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ (1 pont)

Az egyenletet rendezve: $x^2 - 4x - 5 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 5$, $x_2 = -1$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

18) Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.

a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt? (10 pont)

b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Annának, illetve Zsuzsinak az osztozkodás után? (7 pont)

Megoldás:

a) Jelentse x a magazin árát. (1 pont)

Annának $0{,}88x$ forintja van. (1 pont)

Zsuzsinak $\frac{4}{5}x$ forintja van. (1 pont)

Az egyenlet: $0{,}88x + \frac{4}{5}x - x = 714$ (2 pont)

$x = 1050$ (1 pont)

$0{,}88x = 924$ és (1 pont)

$\frac{4}{5}x = 840$ (1 pont)

A magazin 1050 Ft-ba került. Annának eredetileg 924 Ft-ja, Zsuzsinak 840 Ft-ja volt. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) A maradékból Annának a, Zsuzsinak $714 - a$ Ft jut. (1 pont)

$\frac{924}{840} = \frac{a}{714-a}$ vagy $\frac{0{,}88}{0{,}8} = \frac{a}{714-a}$ (2 pont)

Ebből: $a = 374$ (1 pont)

$714 - a = 340$ (1 pont)

Tehát Annának 374 Ft-ja, Zsuzsinak 340 Ft-ja marad a vásárlás után. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

19) 2001-ben a havi villanyszámla egy háztartás esetében három részből állt. az alapdíj 240 Ft, ez független a fogyasztástól, a nappali áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 19,8 Ft, az éjszakai áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 10,2 Ft. A számla teljes értékének 12 %-át kell még általános forgalmi adóként (ÁFA) kifizetnie a fogyasztónak.

a) Mennyit fizetett forintra kerekítve egy család abban a hónapban, amikor a nappali fogyasztása 39 kWh, az éjszakai fogyasztása 24 kWh volt? (3 pont)

b) Adjon képletet a befizetendő számla *F* összegére, ha a nappali fogyasztás *x* kWh, és az éjszakai fogyasztás pedig *y* kWh! (3 pont)

c) Mennyi volt a család fogyasztása a nappali, illetve és az éjszakai áramból abban a hónapban, amikor 5456 Ft-ot fizettek, és tudjuk, hogy a nappali fogyasztásuk kétszer akkora volt, mint az éjszakai? (8 pont)

d) Mekkora volt a nappali és az éjszakai fogyasztás aránya abban a hónapban, amikor a kétféle fogyasztásért (alapdíj és ÁFA nélkül) ugyanannyit kellett fizetni? (3 pont)

Megoldás:

a) $h = 1{,}12(240 + 39 \cdot 19{,}8 + 24 \cdot 10{,}2) = 1407{,}84 \approx$ **1408 Ft**-ot fizettek. (2+1 pont)

b) $F = 1{,}12(240 + 19{,}8x + 10{,}2y)$ (3 pont)

c) $5456 = 1{,}12(240 + 19{,}8x + 10{,}2y)$ (2 pont)

$x = 2y$ (2 pont)

$4871{,}43 = 240 + 39{,}6y + 10{,}2y$ (1 pont)

$4631{,}43 = 49{,}8y$ (1 pont)

$y = 93$ (1 pont)

A nappali áramból 186 kWh, az éjszakaiból 93 kWh volt a fogyasztás. (1 pont)

d) $19{,}8x = 10{,}2y$ (1 pont)

$\frac{x}{y} = \frac{10{,}2}{19{,}8} \approx$ **0,515** a keresett arány. (2 pont)

Összesen: 17 pont

20) Egy farmernadrág árát 20 %-kal felemelték, majd amikor nem volt elég nagy a forgalom, az utóbbi árat 25 %-kal csökkentették. Most 3600 Ft-ért lehet a farmert megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszát számítással indokolja! (4 pont)

Megoldás:

$1{,}2 \cdot 0{,}75x = 3600$ Ha x Ft a farmer eredeti ára, akkor (3 pont)

$x =$ **4000 Ft** (1 pont)

Összesen: 4 pont

21) Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítésekor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.

a) Hány sor van a fenyők parcellájában? Hány fenyőfa van egy sorban? (10 pont)

b) Hány platánfát telepítettek? (2 pont)

Megoldás:

a)

	sorok száma	egy sorban lévő fák száma	összesen	
fenyő	x	y	$x \cdot y$	
tölgy	$x-4$	$y-5$	$(x-4)(y-5)$	$x \cdot y - 360$
platán	$x+3$	$y+2$	$(x+3)(y+2)$	$x \cdot y + 228$

(3 pont)

A tölgyek és platánok összes számát kétféle módon felírva kapjuk az alábbi egyenleteket:

$(x-4)(y-5) = x \cdot y - 360$ (1 pont)

$(x+3)(y+2) = x \cdot y + 228$ (1 pont)

Rendezés után

$\begin{cases} 5x + 4y = 380 \\ 2x + 3y = 222 \end{cases}$ (2 pont)

Innen $x = 36$ és $y = 50$ (2 pont)

A fenyők parcellájában **36** sor, és egy sorban **50** db fenyőfa van. (1 pont)

b) A platánok parcellájában 39 sor és soronként 52 fa van. (1 pont)

2028 platánfa van. (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Bea édesapja két és félszer olyan idős most, mint Bea. 5 év múlva az édesapa 50 éves lesz. Hány éves most Bea? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Ha Bea most x éves, akkor $2{,}5x = 45$, (2 pont)

ahonnan $\boldsymbol{x = 18}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

23) Ha fél kilogramm narancs 75 Ft-ba kerül, akkor hány kilogramm narancsot kapunk 300 Ft-ért? (2 pont)

Megoldás:

2 kilogrammot. (2 pont)

24) Egy vállalat 250 000 Ft-ért vásárol egy számítógépet. A gép egy év alatt 10%-ot veszít az értékéből. Mennyi lesz a gép értéke 1 év elteltével? Írja le a számítás menetét! (3 pont)

Megoldás:

A gép értékének 10%-a: $250000 \cdot 0{,}1 = 25000$ (Ft)

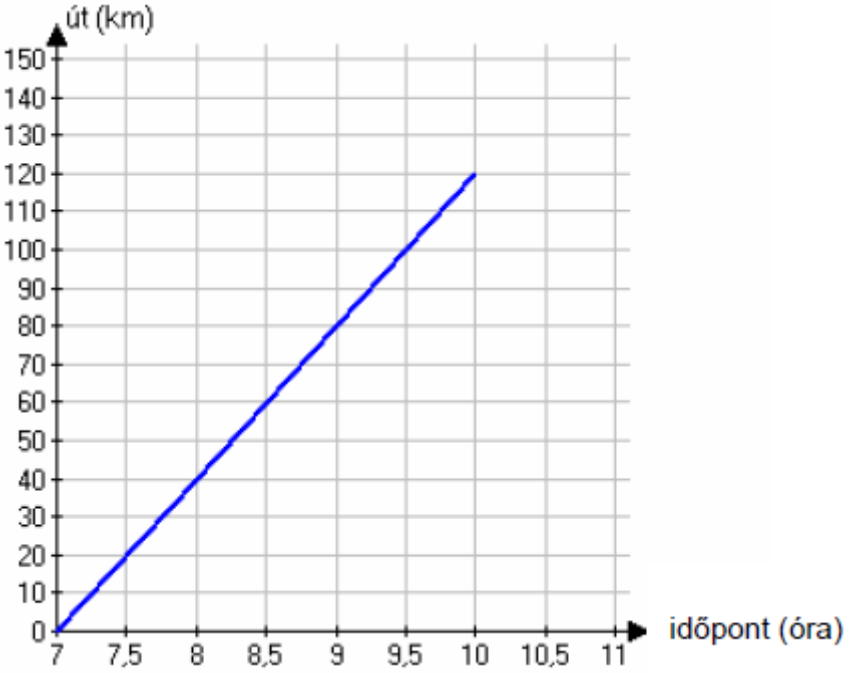
Egy év múlva: $250000(\text{Ft}) - 25000(\text{Ft})$

VAGY: Egy év után 90%-ra csökken az érték: $0{,}9 \cdot 250000$. (2 pont)

A gép értéke: **225 000 Ft** lesz. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) Budapestről reggel 7 órakor egy tehervonat indul Debrecenbe, amely megállás nélkül egyenletes sebességgel halad. A koordinátarendszerben a tehervonat által megtett utat ábrázoltuk az idő függvényében.



a) Mekkora utat tett meg a tehervonat az első órában? (2 pont)

b) Számítsa ki, hogy hány óra alatt tesz meg a tehervonat 108 kilométert? (2 pont)

Budapestről reggel 7 óra 30 perckor egy gyorsvonat is indul ugyanazon az útvonalon Debrecenbe, amely megállás nélkül 70 km/h állandó nagyságú sebességgel halad.

c) Rajzolja be a fenti koordinátarendszerbe a gyorsvonat út-idő grafikonját a 7 óra 30 perc és 9 óra 30 perc közötti időszakban! (2 pont)

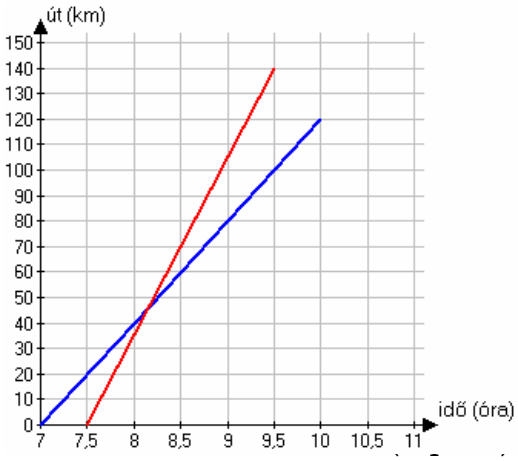
d) Számítsa ki, hogy mikor és mekkora út megtétele után éri utol a gyorsvonat a tehervonatot! (11 pont)

Megoldás:

a) **40 km**. (2 pont)

b) **2,7 óra**. (2 pont)

c) Ábra: (2 pont)



d) A tehervonat 0,5 óra alatt 20 km-t tesz meg. A gyorsvonat 1 óra alatt 30 km-rel tesz meg többet, mint a tehervonat, azaz percenként 0,5 km-t hoz be a hátrányából. (3 pont)

A tehervonat 20 km-es előnyét a gyorsvonat 40 perc alatt hozza be, tehát 8 óra 10 perckor éri utol. (4 pont)

$70 \cdot \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{140}}{\mathbf{3}} \approx \mathbf{46,7}$ (1 pont)

A gyorsvonat kb. 46,7 km úton éri utol a tehervonatot.

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $\lg p_m = 0,8 \cdot \lg p_v + 0,301$ összefüggés áll fenn. A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

a) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén? (4 pont)

b) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat? (6 pont)

c) Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást? (7 pont)

A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) $\lg p_m = 0,8 \cdot \lg 20 + 0,301$ (2 pont)

$\lg p_m \approx 1,342$ (1 pont)

$\boldsymbol{p_m \approx 22\ (\text{Pa})}$ (1 pont)

b) $\lg 50 = 0,8 \cdot \lg p_v + 0,301$ (2 pont)

$\lg p_v = \dfrac{\lg 50 - 0,301}{0,8}$, (2 pont)

$\lg p_v \approx 1,747$ (1 pont)

$\boldsymbol{p_v \approx 56\ (\text{Pa})}$ (1 pont)

c) $p_v = p_m$ felismerése (2 pont)

(Legyen a keresett nyomás $p_v = p_m = p$)

$\lg p = 0,8 \cdot \lg p + 0,301$, (2 pont)

$\lg p = \dfrac{0,301}{0,2} = 1,505$ (2 pont)

$\boldsymbol{p \approx 32\ (\text{Pa})}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

27) Egy szám $\dfrac{5}{6}$ részének a 20%-a 31. Melyik ez a szám? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

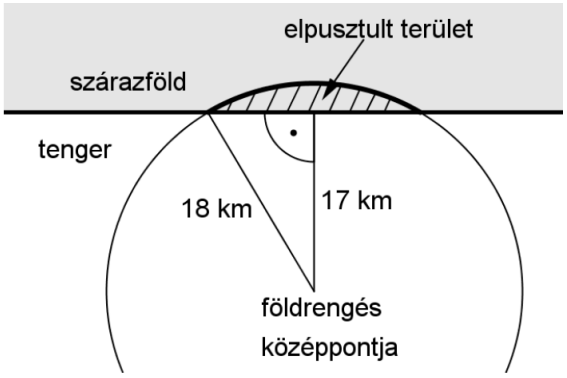
A keresett számot *x*-szel jelölve, a szám $\frac{5}{6}$ része: $\frac{5}{6}x$. (1 pont)

$\frac{5}{6}x \cdot 0,2 = 31$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = 186}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

28) **Újsághír:** ***„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”***



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

a) $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg\left(1,344 \cdot 10^{14}\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{M \approx 5}$ (2 pont)

b) $9,3 = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$ (1 pont)

$\lg E = 20,58$ (1 pont)

Tehát a felszabadult energia:

$\boldsymbol{E \approx 3,8 \cdot 10^{20}\ \left(\mathrm{J}\right)}$. (1 pont)

c) A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai:

$-4,42 + \frac{2}{3}\lg E_c = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E_k + 2$ (1 pont)

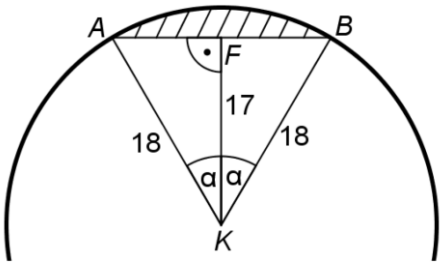
Rendezve: $\lg E_c - \lg E_k = 3$ (1 pont)

(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg \frac{E_c}{E_k} = 3$ (1 pont)

Ebből $\frac{E_c}{E_k} = 1000$ (1 pont)

1000-szer akkora volt a felszabadult energia. (1 pont)

d) Az ábra jelöléseit használjuk.



Az *AKF* derékszögű háromszögből:

$\cos\alpha = \frac{17}{18}$ (1 pont)

$\alpha \approx 19{,}2^\circ. \left(2\alpha \approx 38{,}4^\circ\right)$ (1 pont)

$T_{AKB\Delta} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38{,}4^\circ}{2} \left(\approx 100{,}6 \text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körcikk} \approx 18^2\pi \frac{38{,}4^\circ}{360^\circ} \left(\approx 108{,}6 \text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körszelet} \approx 108{,}6 - 100{,}6 = 8 \ \left(\text{km}^2\right)$ (1 pont)

Az elpusztult rész területe körülbelül **8 km²**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

29) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ x + y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Válaszát indokolja! **(4 pont)**

Megoldás:

A második egyenletből: $y = 7 - x$ (1 pont)

Az első egyenletbe helyettesítve: $5x + 7 - x = 3$. (1 pont)

$\boldsymbol{x = -1}$ (1 pont)

$\boldsymbol{y = 8}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

30) Az $x^2 + bx - 10 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 49. Számítsa ki b értékét! Számítását részletezze! **(3 pont)**

Megoldás:

$b^2 + 40 = 49$ (1 pont)

$\boldsymbol{b = 3}$ vagy (1 pont)

$\boldsymbol{b = -3}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

31) Oldja meg az $x^2 - 4x - 21 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán! **(2 pont)**

Megoldás:

A másodfokú egyenlet együtthatóit behelyettesítjük a másodfokú egyenlet megoldóképletébe.

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1}$, melyből a két gyök az $\boldsymbol{x_1 = 7}$ és $\boldsymbol{x_2 = -3}$ (1 pont)

lesznek. (1 pont)

Összesen: 2 pont

32) Az x-nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! (2 pont)

***Megoldás*:**

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $|x+2|=6$

Az egyenlet megoldásánál két esetet különböztetünk meg.

I. $x+2=6 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 4}$ (1 pont)

II. $x+2=-6 \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = -8}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

33) Oldja meg az alábbi egyenletet a nemnegatív valós számok halmazán!

$\boldsymbol{\sqrt{x} = 4^3}$ **(2 pont)**

***Megoldás*:**

A nemnegatív valós számok halmazán számolunk, ezért a négyzetre emelés jelen esetben ekvivalens átalakítás.

$(\sqrt{x})^2 = (4^3)^2$

$x = 4^6 = \mathbf{4096}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

34)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$\boldsymbol{7-2\cdot(x+5)=\frac{x+6}{4}+\frac{x+2}{2}}$ **(5 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$\boldsymbol{x^2-x-2\le 0}$ **(5 pont)**

***Megoldás*:**

a) Először felbontjuk a zárójelet, közös nevezőre hozunk, majd felszorzunk a nevezővel.

$7-2x-10=\frac{x+6+2x+4}{4}$ (1 pont)

$4(-3-2x)=3x+10$ (1 pont)

Az egyenletet tovább egyszerűsítve a megoldás $\boldsymbol{x=-2}$. (2 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) Megoldjuk az $x^2-x-2=0$ egyenletet, melynek gyökei $x_1=-1$ és $x_2=2$ lesznek. (2 pont)

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, ezért a parabola értékei a $\boldsymbol{[-1;2]}$ intervallumon kisebb vagy egyenlők 0-nál. (3 pont)

Összesen: 10 pont

35)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! (5 pont)

$\boldsymbol{(2x-3)^2 = x^2}$

b) Hány olyan (pozitív) háromjegyű páratlan szám van a tízes számrendszerben, amelynek minden számjegye különböző? (5 pont)

Megoldás:

a) A zárójelet felbontva: $4x^2 - 12x + 9 = x^2$ (1 pont)
Az egyenletet rendezve: $3x^2 - 12x + 9 = 0$ (1 pont)
$x_1 = 1$ és $x_2 = 3$ (2 pont)
Ellenőrzés… (1 pont)

b) A kérdéses számok utolsó számjegye ötféle lehet (1, 3, 5, 7 vagy 9). (1 pont)
Az első számjegy nem lehet 0, (1 pont)
és különböznie kell az utolsótól, így az utolsó számjegy rögzítése után nyolcféle lehet. (1 pont)
A második számjegy (amelynek különböznie kell az elsőtől és az utolsótól, azok rögzítése után) nyolcféle lehet. (1 pont)
A lehetőségek száma ezek szorzata, azaz: $8 \cdot 8 \cdot 5 =$ **320**. (1 pont)

Összesen: 10 pont

36) Adott a valós számok halmazán értelmezett *f* függvény: $f : x \mapsto (x-1)^2 - 4$.

a) Számítsa ki az *f* függvény $x = -5$ helyen felvett helyettesítési értékét! (2 pont)

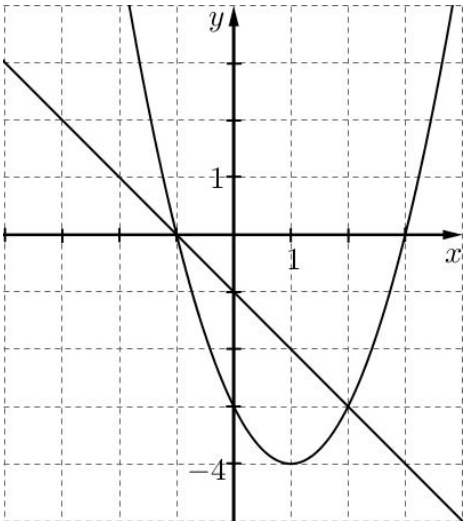
b) Ábrázolja az *f* függvényt, és adja meg szélsőértékének helyét és értékét! (5 pont)

c) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $(x-1)^2 - 4 = x - 1$. (5 pont)

Megoldás:

a) $f(-5) = (-5-1)^2 - 4 =$ **32** (2 pont)

b) Az ábrázolt függvény grafikonja az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából eltolással származik (1 pont)
tengelypontjának első koordinátája 1, (1 pont)
második koordinátája -4. (1 pont)
A függvénynek az $x = 1$ helyen van szélsőértéke (minimuma), (1 pont)
melynek értéke -4. (1 pont)



c) A $g : x \mapsto -x - 1$ függvény helyes ábrázolása (ugyanabban a koordinátarendszerben) (2 pont)
A metszéspontok első koordinátáinak leolvasása: $x_1 = -1$ $x_2 = 2$. (2 pont)
A kapott értékek ellenőrzése behelyettesítéssel. (1 pont)

Összesen: 12 pont

Egyszerűsítések, átalakítások
Megoldások

1) Egyszerűsítse a következő törtet! (x valós szám, $x \neq 0$) **(2 pont)**

$$\frac{x^2 - 3x}{x}$$

Megoldás:

A számláló átalakítva: $x(x-3)$. (1 pont)

Látjuk, hogy x ismeretlennel le tudunk egyszerűsíteni.
A tört egyszerűsítve: $x-3$. (1 pont)

2) A d és az e tetszőleges valós számot jelöl. Adja meg annak az egyenlőségnek a betűjelét, amelyik biztosan igaz (azonosság)! **(2 pont)**

a) $d^2 + e^2 = (d+e)^2$

b) $d^2 + 2de + e^2 = (d+e)^2$

c) $d^2 + de + e^2 = (d+e)^2$

Megoldás:

b) (teljes négyzet) (2 pont)

3) Írja fel az $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$ kifejezést (ahol x és y nem 0) úgy, hogy ne szerepeljen benne negatív kitevő! **(2 pont)**

Megoldás:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$ (2 pont)

4) Döntse el mindegyik egyenlőségről, hogy igaz, vagy hamis minden valós szám esetén!

a) $b^3 + b^7 = b^{10}$ **(1 pont)**

b) $\left(b^3\right)^7 = b^{21}$ **(1 pont)**

c) $b^4 b^5 = b^{20}$ **(1 pont)**

Megoldás:

A hatványozás azonosságai alapján:
a) hamis (1 pont)
b) igaz (1 pont)
c) hamis (1 pont)

5) Jelölje meg annak a kifejezésnek a betűjelét, amelyik az $ax^2 + dx + e = 0$ egyenlet diszkriminánsa!

a) $d^2 - ae$

b) $d^2 - 4ae$

c) $\sqrt{d^2 - 4ae}$ **(2 pont)**

Megoldás:

A keresett betűjel: **b)**. (2 pont)

6) Az a és b valós számokról tudjuk, hogy $\frac{a^2-b^2}{a-b}=20$. Mekkora $a+b$ értéke? (2 pont)

Megoldás:

$$\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=20$$

Az egyszerűsítés után marad, hogy $a+b=20$. (2 pont)

7) Válassza ki azokat az egyenlőségeket, amelyek nem igazak minden valós számra! (2 pont)

a) $\sqrt{(x-2)^4}=(x-2)^2$

b) $\sqrt{(x-2)^2}=(x-2)$

c) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$

Megoldás:

b), c) (1+1 pont)

8) Egyszerűsítse a következő törtet! (a; b valós szám, $a\cdot b\neq 0$)!

$$\frac{a^2b-2ab}{ab}$$

(2 pont)

Megoldás:

$$\frac{ab\cdot(a-2)}{ab}=a-2$$ (2 pont)

9) Egyszerűsítse az $\frac{x+8}{x^2+8x}$ algebrai törtet! Tudjuk, hogy $x\notin\{-8;0\}$. (2 pont)

Megoldás:

Az egyszerűsített tört: $\frac{1}{x}$. (2 pont)

10) Egyszerűsítse a következő törtet, ahol $b\neq 6$!

$$\frac{b^2-36}{b-6}$$

(2 pont)

Megoldás:

Az egyszerűsítés utáni alak: $b+6$. (2 pont)

11) Ha $a \neq 1$, akkor az alábbi egyenletek közül melyik azonosság?

a) $\dfrac{a^2-a}{a-1}=a-1$

b) $\dfrac{a^2-a}{a-1}=a$

c) $\dfrac{a^2-a}{a-1}=a+1$

d) $\dfrac{a^2-a}{a-1}=0$ **(2 pont)**

Megoldás:

b) (2 pont)

12) Egyszerűsítse az alábbi törtet, ahol $x \neq \pm 3$!

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$$ **(3 pont)**

Megoldás:

A tört egyszerűsített alakja: $\dfrac{x-3}{x+3}$. (3 pont)

13) Végezze el a következő műveleteket, és vonja össze az egynemű kifejezéseket! A számítás menetét részletezze!

$$(x-3)^2+(x-4)\cdot(x+4)-2x^2+7x$$ **(3 pont)**

Megoldás:

$(x-3)^2=x^2-6x+9$ (1 pont)

$(x-4)(x+4)=x^2-16$ (1 pont)

Az összevont alak: $x-7$. (1 pont)

14) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Minden valós szám abszolút értéke pozitív.

B: $16^{\frac{1}{4}}=2$

C: Ha egy szám osztható 6-tal és 9-cel, akkor biztosan osztható 54-gyel is. **(2 pont)**

Megoldás:

A: **Hamis**
B: **Igaz**
C: **Hamis** (2 pont)

15) Egyszerűsítse az $\dfrac{a^3+a^2}{a+1}$ törtet, ha $a \neq -1$! **(2 pont)**

Megoldás:

Az egyszerűsítés utáni alak: a^2 (2 pont)

Értelmezési tartomány, értékkészlet
Megoldások

1) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség? (2 pont)

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}} < 0$$

Megoldás:

A $10-x>0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. (1 pont)
$\boldsymbol{x>10}$ (1 pont)

2) Melyek azok az x valós számok, amelyekre nem értelmezhető az $\frac{1}{x^2-9}$ tört? Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

$x^2-9\neq 0$ (1 pont)
Nem értelmezhető $\boldsymbol{x=\pm 3}$ esetén. (1 pont)

3) A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmezhető az $\frac{1}{|x|-2}$ kifejezés? (2 pont)

Megoldás:

Minden valós szám, kivéve 2 és –2. (2 pont)

4) Mely valós számokra értelmezhető az alábbi kifejezés?

$$\sqrt{\frac{1}{2x+7}}$$

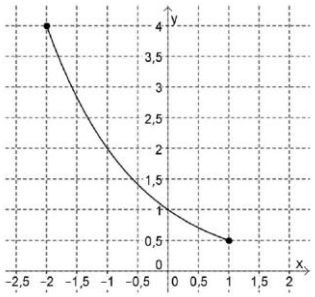
(2 pont)

Megoldás:

A kifejezés $\boldsymbol{x>-3,5}$ esetén értelmezhető. (2 pont)

5) Az ábrán az $f:[-2;1]\Rightarrow\mathbb{R}$; $f(x)=a^x$ függvény grafikonja látható. (3 pont)

a) Adja meg az *f* függvény értékkészletét!
b) Határozza meg az *a* szám értékét!



Megoldás:

Az *f* értékkészlete $[0,5;4]$. (1 pont)
$\boldsymbol{a=0,5}$. (2 pont)
Összesen: 3 pont

6)

a) Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2(3-x)$ kifejezés? (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\log_2(3-x)=0$$

(2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{x<3}$ (1 pont)
$\boldsymbol{x=2}$ (2 pont)
Összesen: 3 pont

7) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1+\cos x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[0;2]$. (2 pont)

8) Határozza meg a $]-2;2[$ (nyílt) intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2-1$ függvény értékkészletét! (3 pont)

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[1;3[$ (3 pont)

Összesen: 3 pont

Exponenciális és logaritmusos feladatok
Megoldások

1) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$, ahol x valós szám és $x>-1$ **(6 pont)**

b) $2\cos 2x=4-5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl **(11 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1}+1=3^2$ (2 pont)

$\sqrt{x+1}=8$ (1 pont)

$x+1=64$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=63}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ helyettesítéssel, (1 pont)

$2-2\sin^2 x+5\sin x-4=0$ (1 pont)

$\sin x=y$ új változóval $2y^2-5y+2=0$. (1 pont)

$y_1=2;\ y_2=\frac{1}{2}$ (2 pont)

y_1 nem megoldás, mert $|\sin x|\le 1$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=\frac{1}{6}\pi+k2\pi}$ vagy $\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi+k2\pi}$ (fokban is megadható) (3 pont)

$k\in\mathbb{Z}$ (1 pont)

Ellenőrzés, vagy le kell írni, hogy a gyökök igazzá teszik az eredeti egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

Összesen: 17 pont

2) Mekkora x értéke, ha $\lg x=\lg 3+\lg 25$? **(2 pont)**

Megoldás:

$\lg x=\lg(3\cdot 25)$ (1 pont)

Mivel a 10-es alapú logaritmusfüggvény szig. monoton nő,

$\boldsymbol{x=75}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

3) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$ **(6 pont)**

b) $\sin^2 x=2\sin x+3$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Legyen $3^x=a$

Az $a^2-2a-3=0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. (1 pont)

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1=3$ és $a_2=-1$ (1 pont)

$a=3^x=3$ esetén $x=1$ (1 pont)

$a=3^x=-1$ egyenlet nem ad megoldást, (1 pont)

mert 3 minden valós kitevőjű hatványa pozitív szám. (1 pont)

Az $x=1$ kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) Legyen $\sin x = a$

Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani.

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$. (1 pont)

$a = \sin x = 3$ nem ad megoldást, (1 pont)

mert $\sin x \le 1$ (1 pont)

$a = \sin x = -1$ (1 pont)

A $\sin x = -1$ egyenlet gyökei: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$,

ahol k tetszőleges egész szám. (1 pont)

Ezek az x értékek kielégítik az egyenletet. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Adott a következő egyenletrendszer:

(1) $\mathbf{2\lg(y+1) = \lg(x+11)}$

(2) $\mathbf{y = 2x}$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)

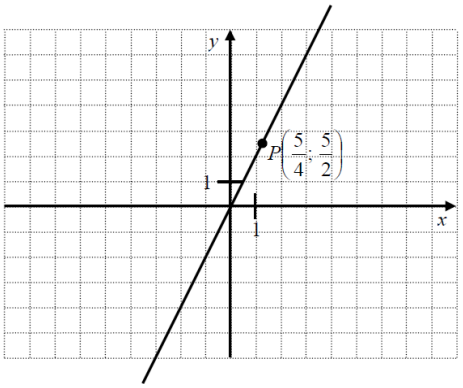
b) Milyen x, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)

d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

Megoldás:

a) Ábra (2 pont)



b) Az (1) egyenlet miatt $\boldsymbol{y > -1}$ (1 pont)

és $\boldsymbol{x > -11}$ (1 pont)

c) $\lg(y+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

$\lg(2x+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt (1 pont)

$(2x+1)^2 = (x+11)$ (1 pont)

$4x^2 + 3x - 10 = 0$ (2 pont)

$x_1 = \frac{5}{4}$ és $x_2 = -2$ (1 pont)

$y_1 = \frac{5}{2}$ és $y_2 = -4$ (1 pont)

A másodfokú egyenletrendszer megoldásai: $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$ illetve $(-2;-4)$ (1 pont)

amiből a második számpár nem tartozik az eredeti egyenlet értelmezési tartományába, (1 pont)

az első számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert. (1 pont)

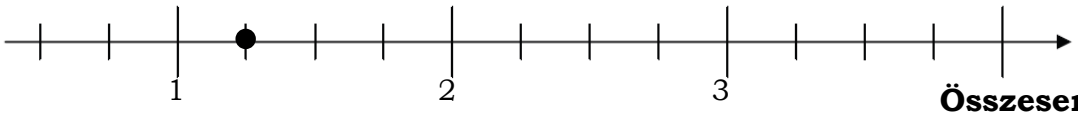
d) **A $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$ pont bejelölése.** (2 pont)

Összesen: 17 pont

5) Oldja meg a pozitív valós számok halmazán a $\log_{16} x = -\frac{1}{2}$ egyenletet! Jelölje a megadott számegyenesen az egyenlet megoldását! (3 pont)

Megoldás:

$x = \frac{1}{4}$ (2 pont)



(1 pont)

Összesen: 3 pont

6) Melyik a nagyobb: $A = \frac{\sin 7\pi}{2}$ vagy $B = \log_2 \frac{1}{4}$? (Írja a megfelelő relációs jelet a válaszmezőbe! Válaszát indokolja!) (2 pont)

Megoldás:

$A = 0$, $B = -2$ (1 pont)

$A > B$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

7) Adja meg a $\lg x^2 = 2\lg x$ egyenlet megoldáshalmazát! (2 pont)

Megoldás:

A pozitív valós számok halmaza. (2 pont)

8)

a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?
$5^{x-2} < 5^{13-2x}$ (4 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget!
$9^{\sqrt{x}} < 3^{x-3}$ (8 pont)

Megoldás:

a) Az (5 alapú exponenciális) függvény szigorúan monoton növekedése miatt (1 pont)

$x - 2 < 13 - 2x$ (1 pont)

$x < 5$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása: $\{1;2;3;4\}$ (1 pont)

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$3^{2\sqrt{x}} < 3^{x-3}$ (1 pont)

A (3 alapú exponenciális) függvény szigorú monotonitása miatt $2\sqrt{x} < x - 3$ (1 pont)

$4x < x^2 - 6x + 9$ (1 pont)

$x^2 - 10x + 9 > 0$ (1 pont)

$x < 1 \quad x > 9$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása, a valós számok halmazán: $x \in [0;1[\cup]9;\infty[$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

9) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 20$ **(6 pont)**

b) $25^{\sqrt{x}} < 5 \cdot 5^{3\sqrt{x}}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x > -\frac{5}{3}$ (1 pont)

A logaritmus azonosságának helyes alkalmazása. (1 pont)
(A lg függvény kölcsönösen egyértelmű.)

$(x+15)^2 = 20(3x+5)$ (1 pont)

$x^2 - 30x + 125 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 25$ és $x_2 = 5$ (1 pont)

Mindkét megoldás megfelel. (1 pont)

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$5^{2\sqrt{x}} = 5^{1+3\sqrt{x}}$ (2 pont)

$\sqrt{x} = -1$ (1 pont)

A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért (1 pont)

nincs valós megoldás. (1 pont)

Összesen: 12 pont

10) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $(\log_2 x - 3) \cdot (\log_2 x^2 + 6) = 0$ **(7 pont)**

b) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ **(10 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldalán szereplő szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. (1 pont)

Ha az első tényező 0, akkor $\log_2 x = 3$ (1 pont)

Innen $x_1 = 2^3 = 8$ (1 pont)

Ha a második tényező 0, akkor $\log_2 x^2 = -6$ (1 pont)

Innen $x^2 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$ (1 pont)

ahonnan a pozitív tartományba csak az $x_2 = \frac{1}{8}$ (1 pont)

Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x_2 = 2l\pi$; $x_3 = \pi + 2m\pi$; $x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ (4 pont)

Összesen: 17 pont

11) Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét! **(2 pont)**

Megoldás:

A kifejezés értéke **4**. (2 pont)

12) Mennyi az $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ kifejezés értéke, ha $x=-1$? **(2 pont)**

Megoldás:

A kifejezés értéke: **25**. (2 pont)

13) Az a, b és c tetszőleges pozitív valós számokat jelölnek. Tudjuk, hogy

$$\lg x = 3\lg a - \lg b + \frac{1}{2}\lg c$$

Válassza ki, hogy melyik kifejezés adja meg helyesen x értékét! **(3 pont)**

A: $x = \frac{3a}{b} + \frac{1}{2}c$

B: $x = a^3 - b + \sqrt{c}$

C: $x = \frac{a^3}{b \cdot \sqrt{c}}$

D: $x = \frac{a^3 \cdot c^{-1}}{b}$

E: $x = a^3 - b\sqrt{c}$

F: $x = \frac{a^3 \cdot \sqrt{c}}{b}$

G: $x = \frac{a^3 \cdot \frac{1}{c}}{b}$

Megoldás:

A helyes kifejezés: **F**. (3 pont)

14) A b, c és d pozitív számokat jelölnek. Tudjuk, hogy $\lg b = \frac{\lg c - \lg d}{3}$.

Fejezze ki az egyenlőségből b-t úgy, hogy abban c és d logaritmusa ne szerepeljen! **(2 pont)**

Megoldás:

$b = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$ vagy $b = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$ (2 pont)

15) Melyik szám nagyobb?

$A = \lg\frac{1}{10}$ **vagy** $B = \cos 8\pi$ **(2 pont)**

Megoldás:

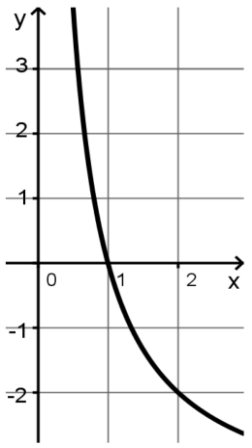
A nagyobb szám betűjele: B $(= \cos 8\pi)$ (2 pont)

16) István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x \left(x > 0\right)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán). Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.

c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. **(2 pont)**



Megoldás:

b). (2 pont)

17) Adja meg azokat az x valós számokat, melyekre teljesül: $\log_2 x^2 = 4$. Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Megoldás:

A logaritmus definíciója alapján: $x^2 = 16$ (1 pont)

tehát $x_{1,2} = \pm 4$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

18) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$ **(5 pont)**

b) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2}$, **ahol** $x \neq 0$ **és** $x \neq -2$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $5 \cdot 5^x + 5^2 \cdot 5^x = 30$ (1 pont)

$30 \cdot 5^x = 30$ (1 pont)

$5^x = 1$ (1 pont)

(Az 5 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$x = 0$ (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) Az egyenlet bal oldalát közös nevezőre hozva: $\frac{3(x+2) - 2x}{x(x+2)} = 1$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát $x(x+2)$-vel szorozva

$3(x+2) - 2x = x(x+2)$ (1 pont)

A zárójelek felbontása és összevonás után: $x + 6 = x^2 + 2x$ (1 pont)

Nullára rendezve: $x^2 + x - 6 = 0$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = -3$; $x_2 = 2$ (2 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 12 pont

19)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget! **(7 pont)**

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. **(4 pont)**

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon. **(6 pont)**

Megoldás:

a) Ha $x < 3$, akkor ($3 - x > 0$, ezért) $x + 2 \geq 0$, vagyis $x \geq -2$. (2 pont)
A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2;3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
Ha $x > 3$, akkor ($3 - x < 0$, ezért) $x + 2 \leq 0$, vagyis $x \leq -2$. (2 pont)
A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
A megoldáshalmaz: $[-2;3[$. (1 pont)

b) $5 \cdot 3^x = 20$ (1 pont)
$3^x = 4$ (1 pont)
$x = \log_3 4$ (1 pont)
$x \approx 1{,}2619$ (1 pont)

c) A megadott egyenlet cos x-ben másodfokú, így a megoldóképlet felhasználásával (1 pont)
$\cos x = 0{,}5$ vagy $\cos x = -2$. (2 pont)
Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum). (1 pont)
A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

20) Melyik az az x természetes szám, amelyre $\log_3 81 = x$? **(2 pont)**

Megoldás:

$x = 4$ (2 pont)

21) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{5} = 4$ **(5 pont)**

b) $\lg(x-1) + \lg 4 = 2$ **(7 pont)**

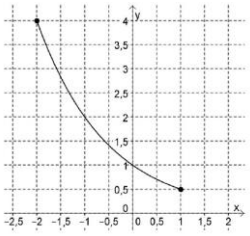
Megoldás:

a) $5 \cdot (x-1) + 2 \cdot (2x) = 2 \cdot 5 \cdot 4$ (2 pont)
Tehát $x = 5$. (2 pont)
Visszahelyettesítéssel az eredeti egyenletbe megbizonyosodtunk róla, hogy az $x = 5$ megoldás helyes. (1 pont)

b) Értelmezési tartomány: $x > 1$ (1 pont)
Logaritmus-azonosság alkalmazásával: $\lg 4(x-1) = 2$ (2 pont)
A logaritmus definíció alapján: $4(x-1) = 1$ (2 pont)
$\boldsymbol{x = 26}$ (1 pont)
Ellenőrzés, visszahelyettesítés (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Az ábrán az $f : [-2;1] \Rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$ függvény grafikonja látható. (3 pont)



a) Adja meg az *f* függvény értékkészletét!
b) Határozza meg az *a* szám értékét!

Megoldás:

a) Az *f* értékkészlete $[0,5;4]$. (1 pont)
b) $\boldsymbol{a = 0,5}$. (2 pont)

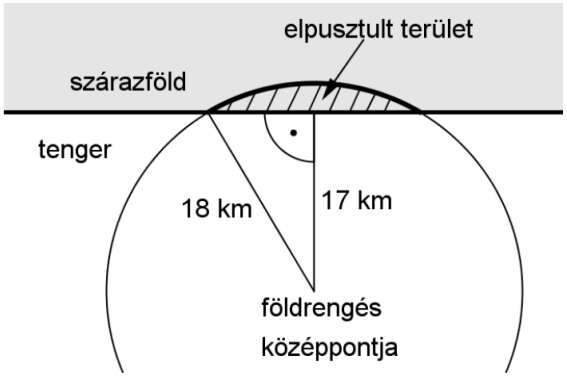
Összesen: 3 pont

23) Adja meg az *x* értékét, ha $\log_2(x+1) = 5$! (2 pont)

Megoldás:

$2^5 = x + 1$
$\boldsymbol{x = 31}$ (2 pont)

24) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*
A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$.



Ebben a képletben *E* a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), *M* pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)
b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)
c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

a) $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg\left(1,344 \cdot 10^{14}\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{M \approx 5}$ (2 pont)

b) $9,3 = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$ (1 pont)

$\lg E = 20,58$ (1 pont)

Tehát a felszabadult energia körülbelül

$\boldsymbol{E \approx 3,8 \cdot 10^{20}\ \ (\mathrm{J})}$ (1 pont)

c) A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai:

$-4,42 + \frac{2}{3}\lg E_c = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E_k + 2$ (1 pont)

Rendezve: $\lg E_c - \lg E_k = 3$ (1 pont)

(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg \frac{E_c}{E_k} = 3$ (1 pont)

Ebből $\frac{E_c}{E_k} = 1000$ (1 pont)

1000-szer akkora volt a felszabadult energia. (1 pont)

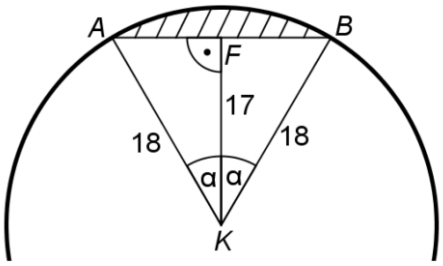
d) Az ábra jelöléseit használjuk.

Az *AKF* derékszögű háromszögből:

$\cos\alpha = \frac{17}{18}$ (1 pont)

$\alpha \approx 19,2^\circ.\left(2\alpha \approx 38,4^\circ\right)$ (1 pont)

$T_{AKB\Delta} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38,4^\circ}{2}\left(\approx 100,6\ \mathrm{km}^2\right)$ (1 pont)



$T_{körcikk} \approx 18^2\pi\frac{38,4^\circ}{360^\circ}\left(\approx 108,6\ \mathrm{km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körszelet} \approx 108,6 - 100,6 = 8\ \left(\mathrm{km}^2\right)$ (1 pont)

Az elpusztult rész területe körülbelül $\boldsymbol{8\ \mathrm{km}^2}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

25)

a) Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2(3-x)$ kifejezés? (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$\log_2(3-x) = 0$ (2 pont)

Megoldás:

a) $\boldsymbol{x < 3}$ (1 pont)

b) $\boldsymbol{x = 2}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

26) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előrejelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? (5 pont)

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

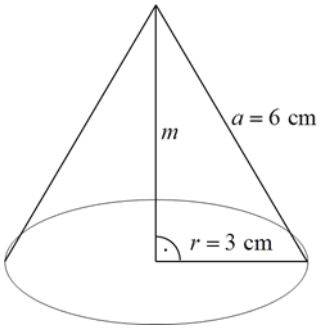
Megoldás:

a) A kereslet minden évben várhatóan az előző évi kereslet $1,6$-szorosára változik, (1 pont)
így 5 év múlva az idei $1,06^5 \approx 1,34$-szorosára nő. (1 pont)
Ez kb. **34%-kal** magasabb, mint az idei kereslet. (1 pont)

b) Az ár minden évben várhatóan az előző év ár $0,9$-szorosára változik, (1 pont)
így megoldandó a $0,94^n = 0,65$ egyenlet, (ahol n az eltelt évek számát jelenti.) (1 pont)
Ebből $n = \frac{\lg 0,65}{\lg 0,94} (\approx 6,96)$. (2 pont)
Azaz várhatóan **7 év múlva** lesz az ár a jelenlegi ár 65%-a. (1 pont)

c) A bevételt a kereslet és az ár szorzatából kapjuk, (1 pont)
így 8 év múlva a jelenlegi bevétel $(1,06 \cdot 0,94)^8 \approx$ (1 pont)
$\approx 0,972$-szerese várható. (2 pont)
Azaz **8 év múlva** a bevétel az ideinél kb. $2,8\,\%$-kal lesz alacsonyabb. (1 pont)

d) Ábra az adatok feltüntetésével. (1 pont)
A kúp magasságát m-mel jelölve a Pitagorasz-tétel alapján: $m = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} (\approx 5,2\,\text{cm})$. (1 pont)
A kúp térfogata $V \approx \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 5,2 \approx$ (1 pont)
$\approx \mathbf{49\,cm^3}$. (1 pont)



Összesen: 17 pont

27) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) **Minden** $x \in \mathbb{R}$ **esetén** $\sqrt{x^2} = x$.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

***Megoldás*:**

A) $\sqrt{(-5)^2} = |(-5)| = 5$, tehát az állítás **igaz**.

B) $\sqrt{x^2} = |x|$, amely állítás negatív x-re nem igaz, tehát az állítás **hamis**.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$, az állítás így **igaz**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

28) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0{,}854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)
(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

***Megoldás*:**

a) A tigrisek száma minden évben az előző évinek $0{,}854$-szeresére csökken. (1 pont)

Így 2014 és 2016 között a tigrisek száma $0{,}854^2 \approx 0{,}73$-szorosára változik. (2 pont)

Ez azt jelenti, hogy a számuk **27%**-kal csökken. (1 pont)

b) A feladat szövege alapján az alábbi egyenletet írhatjuk fel:
$3600 \cdot 0{,}854^x = 900$. (1 pont)

Az egyenlet megoldása $x \approx 8{,}78$. (3 pont)

Így 9 év múlva, azaz **2023**-ban várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökkenni. (1 pont)

c) A (I) és (II) miatt a kisebb kifutóba 3 vagy 4 tigris kerülhet. (1 pont)
Ha 3 tigris kerül a kisebb kifutóba, a (III) miatt (IV) miatt ez csak két nőstény és egy hím lehet. (1 pont)
Két nőstényt és egy hímet $\binom{5}{2}\cdot 4 = 40$-féleképpen lehet összesen kiválasztani. (2 pont)
Ha 4 tigris kerül a kisebb kifutóba, akkor (III) és (IV) miatt ez csak két nőstény és két hím lehet, őket $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2} = 60$-féleképpen lehet kiválasztani. (2 pont)
Így összesen $40+60 = \mathbf{100}$ eset lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

29) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (2 pont)

$$\mathbf{2^x = 10}$$

***Megoldás*:**

A kifejezést logaritmus alá visszük és alkalmazzuk a logaritmus azonosságát.

$\lg 2^x = \lg 10$

$x \cdot \lg 2 = \lg 10$

$x = \frac{\lg 2}{\lg 10} \approx \mathbf{3,322}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

30) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)

1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg: $f(x) = 51\cdot 1,667^x$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózaból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

Megoldás:

a) $\frac{12000000}{7000000} \approx 1,714$ (1 pont)

Kb. **71%-kal nőtt** az előfizetések száma. (1 pont)

b) Az eltelt évek száma: $x = 8$. (1 pont)

$51 \cdot 1,667^8 \approx 3041$ (1 pont)

3 millió 41 ezer mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén. (1 pont)

c) A hívások száma egyik hónapról a másikra 1,065-szeresére nőtt. (1 pont)

1991 januárja óta eltelt hónapok számát jelölje n.

$350000 \cdot 1,065^n = 100\,000\,000$ (1 pont)

$n = \log_{1,065} \frac{100000000}{350000}$, (1 pont)

amiből $n \approx 90$. (1 pont)

Az eltelt évek száma: $\frac{90}{12} = 7,5$. (1 pont)

Tehát **1998-ban** lehetett az a hónap, amikor a mobilhívások száma először elérte a 100 milliót. (1 pont)

d) A megadott időszakban a vezetékes hívások száma mértani sorozatot alkot, melynek első tagja 4200 (millió darab) és hányadosa $q = 0,92$. (2 pont)

$4200 \cdot 0,92^9 \approx 1983,08$ (1 pont)

≈ 1983 millió vezetékes hívást indítottak 2009-ben. (1 pont)

2000 eleje és 2009 vége között összesen

$4200 \cdot \frac{0,92^{10} - 1}{0,92 - 1} \approx 29694,6$ (1 pont)

$\approx$ **29695 millió** vezetékes hívást indítottak. (1 pont)

Összesen: 17 pont

31) Adja meg azt az x valós számot, amelyre $\log_2 x = -3$. (2 pont)

Megoldás:

$\log_2 x = \log_2 \frac{1}{8} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{8}}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

32) Adja meg x értékét, ha $5^x = \left(5^2 \cdot 5 \cdot 5^4\right)^3$ (2 pont)

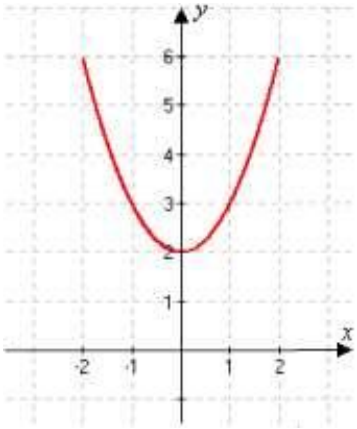
Megoldás:

$\left(5^2 \cdot 5 \cdot 5^4\right)^3 = 5^{7^3} = 5^{21} \Rightarrow \boldsymbol{x = 21}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

Függvények
Megoldások

1) Az ábrán egy $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



a) $x \mapsto x^2 - 2$

b) $x \mapsto x^2 + 2$

c) $x \mapsto (x+2)^2$

Megoldás:

b) Az x^2 függvény képét eltoljuk az y tengely mentén két egységgel fölfelé, így az $x \mapsto x^2 + 2$ függvény képét kapjuk. (2 pont)

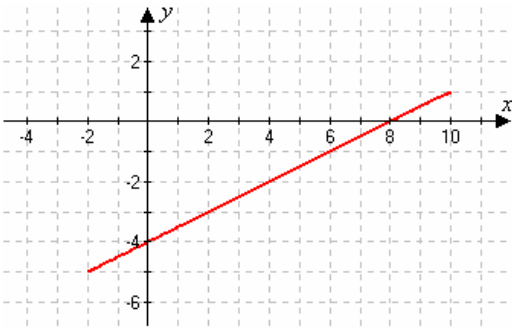
2) Határozza meg az 1. feladatban megadott, $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény értékkészletét! (3 pont)

Megoldás:

Az értékkészlet a felvett függvényértékek halmaza. $2 \le f(x) \le 6$ vagy $[2;6]$ (3pont)

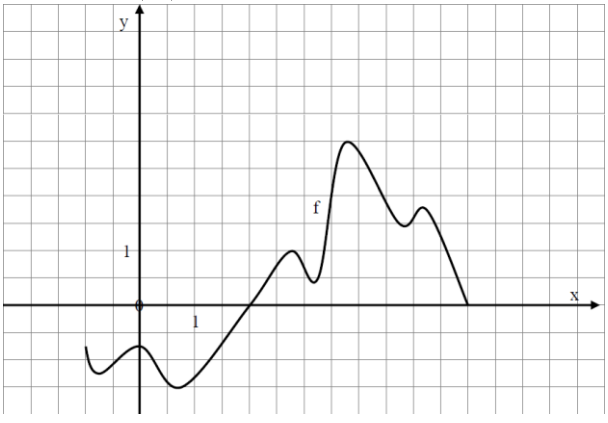
3) Ábrázolja az $f(x) = 0{,}5x - 4$ függvényt a $[-2;10]$ intervallumon! (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

4) A $[-1;6]$-on értelmezett $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát a grafikonjával adtuk meg. Határozza meg az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldását! Adja meg $f(x)$ legnagyobb értékét! (3 pont)



Megoldás:

$2 \le x \le 6$ (2 pont)

$f(x)$ legnagyobb értéke: **3** (1 pont)

Összesen: 3 pont

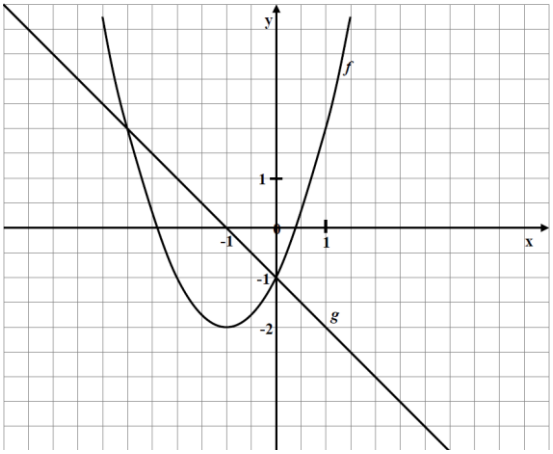
5) Az *f* és *g* függvényeket a valós számok halmazán értelmezzük a következő képletek szerint: $f(x) = (x+1)^2 - 2$; $g(x) = -x - 1$

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az *f* függvényt! (Az ábrán szerepeljen a grafikonnak legalább a $-3,5 \le x \le 1$ intervallumhoz tartozó része.) (4 pont)

b) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben a *g* függvényt! (2 pont)

c) Oldja meg az $(x+1)^2 - 2 \le -x - 1$ egyenlőtlenséget! (6 pont)

Megoldás:



a) $f(x)$ ábrázolása (4 pont)

b) Ábra (2 pont)

c) $(x+1)^2 - 2 + x + 1 \le 0$ (1 pont)

$x^2 + 3x \le 0$ (1 pont)

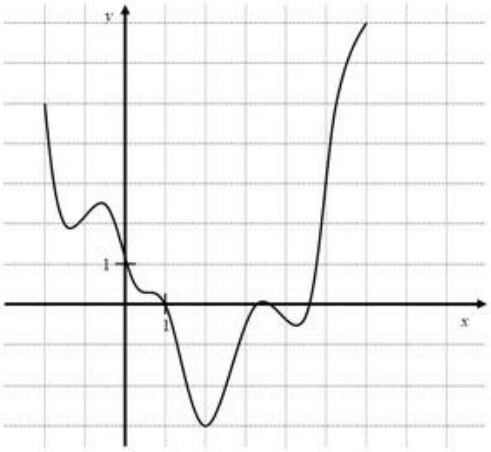
Az egyenlőség teljesül, ha $x_1 = -3$ vagy $x_2 = 0$. (2 pont)

A megoldás: $\mathbf{-3 \le x \le 0}$ (2 pont)

A feladat grafikusan is megoldható.

Összesen: 12 pont

6) Az *f* függvényt a $[-2;6]$ intervallumon a grafikonjával értelmeztük. Mekkora *f* legkisebb, illetve legnagyobb értéke? Milyen *x* értékekhez tartoznak ezek a szélsőértékek? (4 pont)



Megoldás:

f legkisebb értéke -3. (1 pont)

Ez az $x = 2$ értékhez tartozik. (1 pont)

f legnagyobb értéke 7. (1 pont)

Ez az $x = 6$ értékhez tartozik. (1 pont)

Összesen: 4 pont

7) Adott a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2\lg(y+1) &= \lg(x+11) \\ y &= 2x \end{aligned}\right\}$$

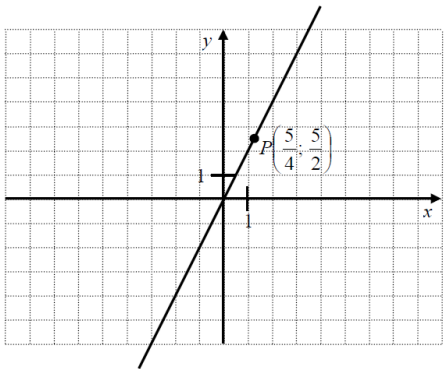
a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)

b) Milyen *x*, illetve *y* valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)

d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

Megoldás:



a) Ábra (2 pont)

b) Az (1) egyenlet miatt $y > -1$ (1 pont)

és $x > -11$ (1 pont)

c) $\lg(y+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

$\lg(2x+1)^2 = \lg(x+11)$ (1 pont)

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt (1 pont)

$(2x+1)^2 = (x+11)$ (1 pont)

$4x^2 + 3x - 10 = 0$ (2 pont)

$x_1 = \frac{5}{4}$ és $x_2 = -2$ (1 pont)

$y_1 = \frac{5}{2}$ és $y_2 = -4$ (1 pont)

A másodfokú egyenletrendszer megoldásai: $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$ illetve $(-2;-4)$ (1 pont)

amiből a második számpár nem tartozik az eredeti egyenlet értelmezési tartományába, (1 pont)

az első számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert. (1 pont)

d) **A $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$ pont bejelölése.** (2 pont)

Összesen: 17 pont

8) Adja meg az $5x - 3y = 2$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

A metszéspont: $\left(0;-\frac{2}{3}\right)$ (2 pont)

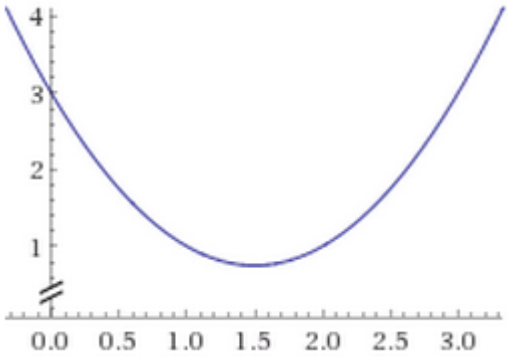
9)

a) Ábrázolja a $[-2;4]$-on értelmezett, $x \to (x-1,5)^2 + 0,75$ hozzárendeléssel megadott függvényt! (2 pont)

b) Állapítsa meg a fenti függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

c) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 - 2x$ egyenletet! (8 pont)

Megoldás:



a) Ábrázolás (2 pont)

b) A minimum helye: $x = 1,5$ (1 pont)

Értéke: **0,75** (1 pont)

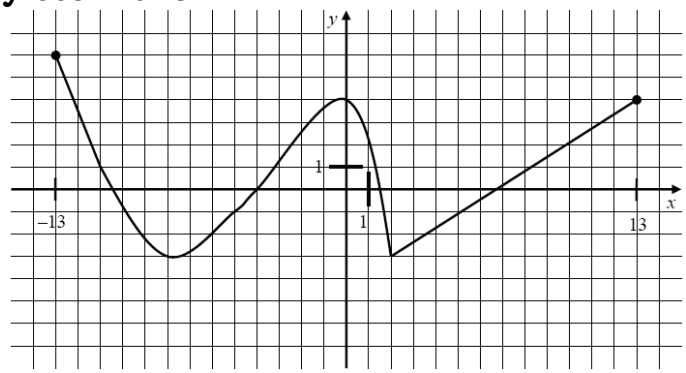
c) Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:
$x^2 - 3x + 3 = 1 - 4x + 4x^2$ (2 pont)
Rendezve $3x^2 - x - 2 = 0$ (1 pont)
Gyökei: $x_1 = 1$ illetve $x_2 = -\frac{2}{3}$ (2 pont)
De $x_1 = 1$ nem megoldás (nem teszi igazzá az eredeti egyenletet) (1 pont)
Az $x = -\frac{2}{3}$ esetén mindkét oldal értéke $\frac{7}{3}$, ezért ez megfelelő valós gyök.
(2 pont)
Összesen: 12 pont

10) A valós számok halmazán értelmezett $x \to -(x-1)^2 + 4$ függvénynek minimuma vagy maximuma van? Adja meg a szélsőérték helyét és értékét! (3 pont)

Megoldás:

Maximuma van, (1 pont)
szélsőérték helye: **1**; (1 pont)
értéke: **4**. (1 pont)
Összesen: 3 pont

11) Adjon meg egy olyan zárt intervallumot, ahol a grafikonjával megadott alábbi függvény csökkenő! (2 pont)



Megoldás:

Például: **$[0;2]$ vagy $[-13;-8]$** (2 pont)

12) Adott az $f: \mathbb{R}^- \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x}$ függvény. Határozza meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték 4. (2 pont)

Megoldás:

$x = -16$ (2 pont)

13) Adja meg a $[-2;3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 + 1$ függvény értékkészletét! (3 pont)

Megoldás:

A függvény legkisebb értéke az 1, (1 pont)
az adott intervallum végpontjaiban a függvény értéke 5, illetve 10, (1 pont)
a függvény értékkészlete az $[1;10]$ intervallum. (1 pont)
Összesen: 3 pont

14) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett az $x \mapsto x^2 - 5x$ másodfokú függvény zérushelyeit! Számítsa ki a függvény helyettesítési értékét az 1,2 helyen! (3 pont)

Megoldás:

Zérushelyek: **0** és **5**. (2 pont)
A helyettesítési érték $-4,56$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

15) Mennyi az $f(x) = -|x| + 10$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legnagyobb értéke, és hol veszi fel ezt az értéket? (2 pont)

Megoldás:

A legnagyobb érték: **10**. (1 pont)
Ezt az $x = 0$ helyen veszi fel. (1 pont)

Összesen: 2 pont

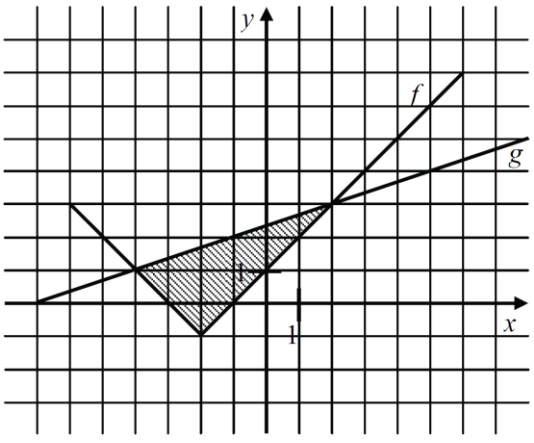
16)

a) Fogalmazza meg, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x+2| - 1$ függvény grafikonja milyen transzformációkkal származtatható az $f_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_0(x) = |x|$, függvény grafikonjából! Ábrázolja az *f* függvényt a $[-6;6]$ intervallumon! (5 pont)

b) Írja fel az $A(-4;1)$ és $B(5;4)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét! Mely pontokban metszi az *AB* egyenes az *f* függvény grafikonját? (Válaszát számítással indokolja!) (7 pont)

Megoldás:

a) Ha az $f_0 = |x|$ grafikonját előbb a $(-2;0)$, (1 pont)
majd a $(0;-1)$ vektorral eltoljuk, az *f* függvény grafikonját kapjuk. (1 pont)
Helyes grafikon. (3 pont)



b) Az AB egyenes egyenlete: $x - 3y = -7$ (3 pont)
Az egyik közös pont: $A(-4;1)$ (2 pont)
Az egyik közös pont: $B(2;3)$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

17) Adja meg a $3x + 2y = 18$ egyenletű egyenes és az *y* tengely metszéspontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

$(0;9)$ (2 pont)

18) A valós számok halmazán értelmezett *f* másodfokú függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját a $v(2;-4,5)$ vektorral eltoltuk.

a) Adja meg az *f* függvény hozzárendelési utasítását képlettel! (3 pont)

b) Határozza meg *f* zérushelyeit! (4 pont)

c) Ábrázolja *f* grafikonját a [–2; 6] intervallumon! (4 pont)

Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

d) $\frac{1}{2}x^2 \le 2x+\frac{5}{2}$ (6 pont)

Megoldás:

a) A függvény hozzárendelési szabálya:

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-4,5$ (3 pont)

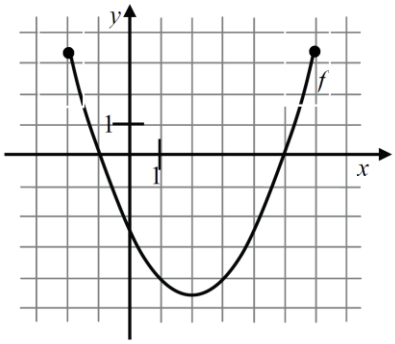
b) A $0,5(x-2)^2-4,5=0$ egyenletet kell megoldani. (1 pont)

$0,5(x-2)^2-4,5=0$ (1 pont)

$x_1=5$ (1 pont)

$x_2=-1$ (1 pont)

c) Ábra (4 pont)



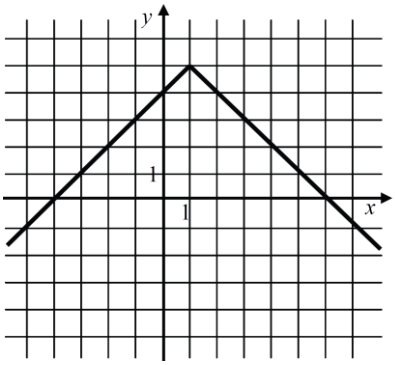
d) Átrendezve az egyenlőtlenséget, éppen az $f(x)\le 0$ alakhoz jutunk. (3 pont)

Ennek az egész megoldásai: $-1;0;1;2;3;5$. (3 pont)

A feladat megoldható grafikusan is.

Összesen: 17 pont

19) A valós számok halmazán értelmezett $x\mapsto|x|$ függvényt transzformáltuk. Az alábbi ábra az így kapott *f* függvény grafikonjának egy részletét mutatja. Adja meg *f* hozzárendelési utasítását képlettel! (3 pont)



Megoldás:

A hozzárendelési utasítás: $x\mapsto -|x-1|+5$ (3 pont)

A hozzárendelési utasítás megadható a függvény két részre bontásával is.

20) Legyen *f* a valós számok halmazán értelmezett függvény,

$$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Mennyi az *f* függvény helyettesítési értéke, ha $x=\frac{\pi}{3}$?

Írja le a számolás menetét! (3 pont)

Megoldás:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ (1 pont)

$=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=$ (1 pont)

$=-1$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

21) Az $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto 3+\log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

A: $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto 3\log_2 x$

B: $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto \log_2(8x)$

C: $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto \log_2(3x)$

D: $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto \log_2(x^3)$ **(2 pont)**

Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **B** (2 pont)

22)

a) Rajzolja meg derékszögű koordinátarendszerben a $]-1;6]$ intervallumon értelmezett, $x\mapsto -|x-2|+3$ hozzárendelésű függvény grafikonját! (4 pont)

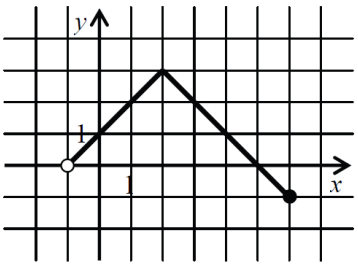
b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét, és adja meg az összes zérushelyét! (3 pont)

c) Döntse el, hogy a $P(3,2;1,58)$ pont rajta van-e a függvény grafikonján! Válaszát számítással indokolja! (2 pont)

d) Töltse ki az alábbi táblázatot, és adja meg a függvényértékek (a hét szám) mediánját! (3 pont)

Megoldás:

a) Ábra (4 pont)



b) Az értékkészlet az $[-1;3]$ intervallum, (2 pont)

a függvény zérushelye az $(x=)\,5$ (1 pont)

c) ***P* nincs a grafikonon**, (1 pont)

mert pl. $-|3,2-2|+3=1,8$ (1 pont)

d)

x	-0,5	0	1,7	2	2,02	4	5,5
$-\|x-2\|+3$	0,5	1	2,7	3	2,98	1	-0,5

(1 pont)

Sorba rendezés: –0,5; 0,5; 1; 1; 2,7; 2,98; 3. (1 pont)

A medián **1**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

23) Milyen valós számokat jelöl az a, ha tudjuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő? (2 pont)

Megoldás:

$a > 1$ (2 pont)

24) Adja meg képlettel egy olyan, a valós számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési utasítását, amelynek (abszolút) maximuma van! A megadott függvénynek állapítsa meg a maximumhelyét is! (3 pont)

Megoldás:

Például: $f: x \mapsto -x^2 - 2x - 1$ (2 pont)

Abszolút maximuma van $x = -1$ helyen. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) A következő két függvény mindegyikét a valós számok halmazán értelmezzük:
$f(x) = 3\sin x$; $g(x) = \sin 3x$.
Adja meg mindkét függvény értékkészletét! (2 pont)

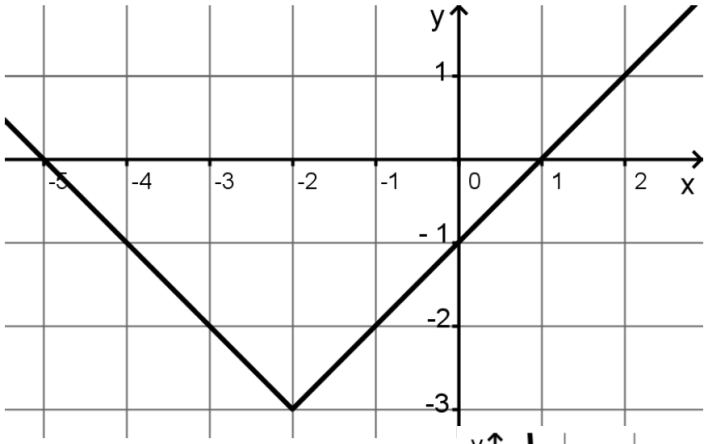
Megoldás:

f értékkészlete: $R_f = [-3;3]$ (1 pont)

g értékkészlete: $R_g = [-1;1]$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

26) Az ábrán a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x + a| + b$ függvény grafikonjának egy részlete látható. Adja meg a és b értékét! (2 pont)



Megoldás:

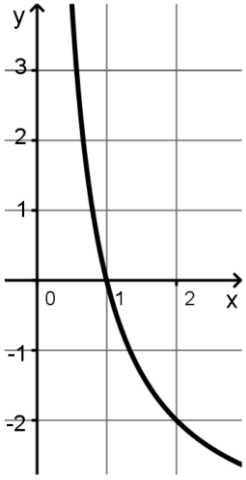
$a = 2$ (1 pont)

$b = -3$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

27) István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ $(x > 0)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).
Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.
b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.
c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. (2 pont)



Megoldás:

b). (2 pont)

28) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=(x+2)^2+4$ függvény. Adja meg az *f* függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

Megoldás:

A minimum helye: -2 (1 pont)
A minimum értéke: 4 (1 pont)
Összesen: (2 pont)

29) Az alább felsorolt, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk. A három függvény közül kettőnek a grafikonja megegyezik, a harmadik eltér tőlük. Melyik függvény grafikonja tér el a másik két függvény grafikonjától? (2 pont)

a) $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$

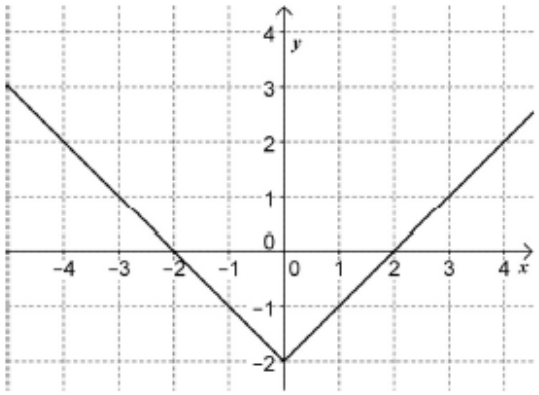
b) $x \mapsto \sin x$

c) $x \mapsto \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

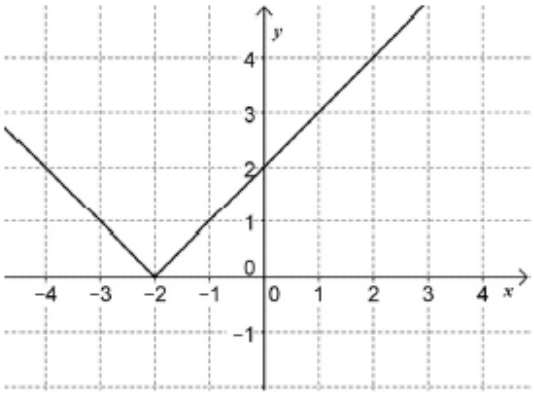
Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **a)** (2 pont)

30) Az alábbi hozzárendelési utasítással megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények közül kettőnek egy-egy részletét ábrázoltuk. Adja meg a grafikonokhoz tartozó hozzárendelési utasítások betűjelét! (2 pont)



1)



2)

A) $x \mapsto |x+2|$ B) $x \mapsto |x-2|$ C) $x \mapsto |x|-2$ D) $x \mapsto |x|+2$

Megoldás:

1) párja **C)** (1 pont)
2) párja **A)** (1 pont)
Összesen: 2 pont

31) Adja meg az $x \to x^2 + 10x + 21 \left(x \in \mathbb{R}\right)$ másodfokú függvény minimumhelyét és minimumának értékét! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

$x^2 + 10x + 21 = (x+5)^2 - 4$ (2 pont)

A minimumhely **–5**. (1 pont)

A minimum értéke **–4**. (1 pont)

Összesen: 4 pont

32) Legyenek *f* és *g* a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá: $f(x) = 5x + 5{,}25$ és $g(x) = x^2 + 2x + 3{,}5$

a) Számítsa ki az alábbi táblázatok hiányzó értékeit! (3 pont)

x	**3**	x	
$f(x)$		$g(x)$	**2,5**

b) Adja meg a *g* függvény értékkészletét! (3 pont)

c) Oldja meg az $5x + 5{,}25 > x^2 + 2x + 3{,}5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (6 pont)

Megoldás:

a) $f(3) = 20{,}25$ (1 pont)

$x^2 + 2x + 3{,}5 = 2{,}5$ (1 pont)

$x = -1$ (1 pont)

b) A függvény hozzárendelési utasítását átalakítva: $x^2 + 2x + 3{,}5 = (x+1)^2 + 2{,}5$ (1 pont)

A függvény minimuma a 2,5. (1 pont)

Az értékkészlet: $[2{,}5; \infty[$ (1 pont)

c) Rendezés után: $x^2 - 3x - 1{,}75 < 0$. (1 pont)

Az $x^2 - 3x - 1{,}75 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = -\frac{1}{2}$ és $x_2 = \frac{7}{2}$. (2 pont)

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, (1 pont)

ezért az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

33) Adja meg az alábbi hozzárendelési szabályokkal megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét!

$f(x) = 2\sin x$

$g(x) = \cos 2x$ **(2 pont)**

Megoldás:

f értékkészlete: $[-2; 2]$ (1 pont)

g értékkészlete: $[-1; 1]$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

34) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm²-ben mért számértéke. (1 pont)

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)
c) **igaz** (1 pont)
d) **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

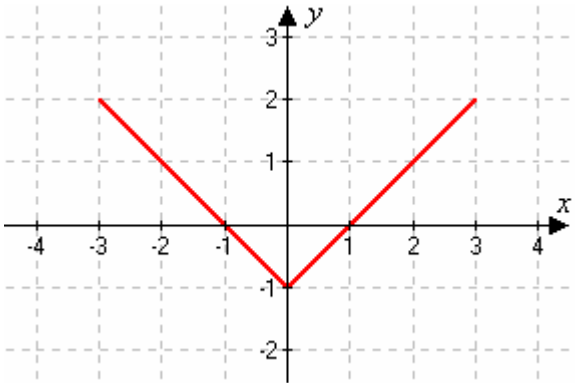
35)

a) Rajzolja fel a $[-3;3]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto |x|-1$ függvény grafikonját! (2 pont)

b) Mennyi a legkisebb függvényérték? (1 pont)

Megoldás:

a)

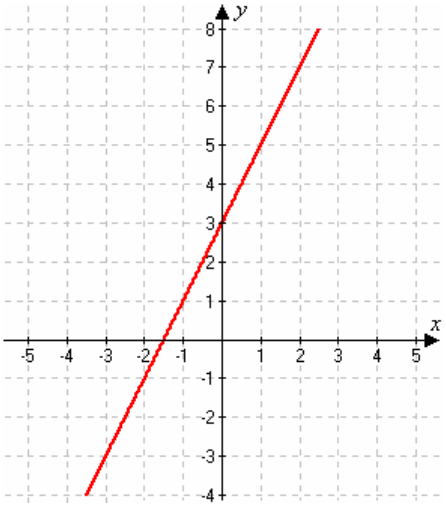


b) A legkisebb függvényérték: **−1**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) Melyik az ábrán látható egyenes egyenlete az alábbiak közül? (2 pont)

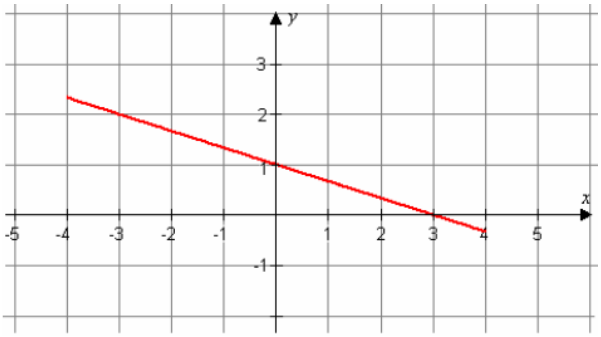
A: $y=2x+3$
B: $y=-2x+3$
C: $y=2x-1,5$
D: $y=2x-3$



Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **A.** (2 pont)

37) Az ábrán egy $[-4;4]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki, hogy melyik formula adja meg helyesen a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



a) $x \mapsto \frac{1}{3}x+1$

b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x+1$

c) $x \mapsto -3x+1$

d) $x \mapsto -\frac{1}{3}x+3$

Megoldás:

b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x+1$ (2 pont)

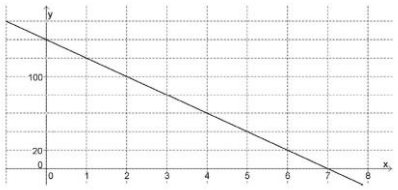
Összesen: 2 pont

38) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x-4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x)=6$? (2 pont)

***Megoldás*:**

$x_1=-2$, $x_2=10$ (2 pont)

39) Az ábrán az $x \mapsto m\cdot x+b$ lineáris függvény grafikonjának egy részlete látható. Határozza meg m és b értékét! (3 pont)



Megoldás:

$b=140$ (1 pont)

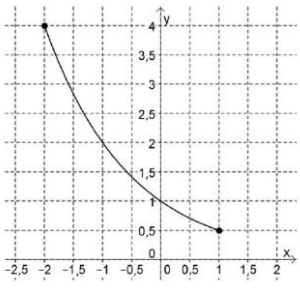
$m=-20$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

40) Az ábrán az $f:[-2;1] \Rightarrow \mathbb{R}$; $f(x)=a^x$ függvény grafikonja látható.

a) Adja meg az f függvény értékkészletét! (1 pont)

b) Határozza meg az a szám értékét! (2 pont)



Megoldás:

Az f értékkészlete $[0,5;4]$. (1 pont)

$a=0,5$. (2 pont)

Összesen: 3 pont

41) Válassza ki az f függvény hozzárendelési szabályát az A, B, C, D lehetőségek közül úgy, hogy az megfeleljen az alábbi értéktáblázatnak! (2 pont)

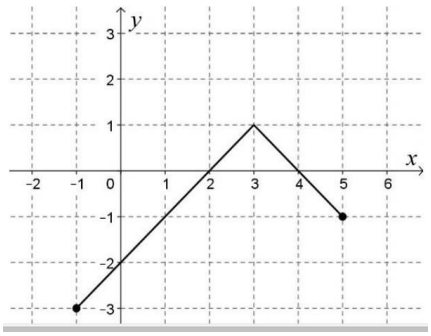
x	-2	0	2
$f(x)$	-4	0	-4

A: $f(x)=2x$ **B:** $f(x)=x^2$ **C:** $f(x)=-2x$ **D:** $f(x)=-x^2$

Megoldás:

D (2 pont)

42) Az ábrán a $[-1;5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.
Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



A: $x \mapsto |x-3|+1$

B: $x \mapsto -|x+3|+1$

C: $x \mapsto -|x-3|+1$

D: $x \mapsto -|x+3|-1$

Megoldás:

C (2 pont)

43)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$ **(6 pont)**

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

III) A $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

Megoldás:

a) (A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$ (1 pont)

Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, (1 pont)

azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = 60°$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{\pi}{3}$, vagy $x = \frac{5\pi}{3}$. (2 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

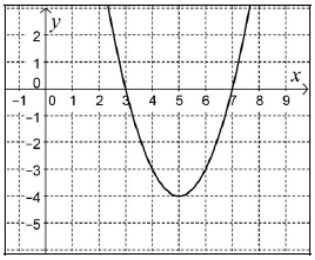
akkor a megadott intervallumon $x = \frac{2\pi}{3}$, vagy $x = \frac{4\pi}{3}$. (2 pont)

c)

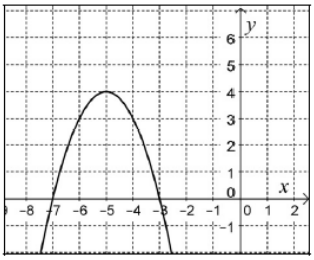
I) **igaz**
II) **hamis**
III) **hamis** (2 pont)

Összesen: 12 pont

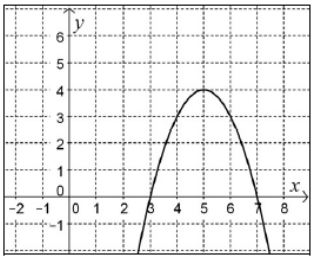
44) Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto -(x-5)^2+4$ függvény. Melyik ábrán látható e függvény grafikonjának egy részlete? (2 pont)



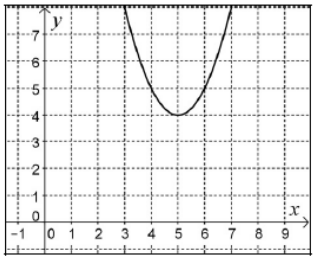
A



B



C



D

Megoldás:

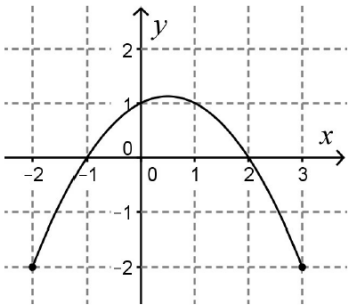
A helyes válasz: **C** (2 pont)

45) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1+\cos x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[0;2]$ (2 pont)

46) Az ábrán látható függvény értelmezési tartománya a $[-2;3]$ intervallum, két zérushelye a -1 és 2. Az értelmezési tartományának mely részhalmazán vesz fel a függvény pozitív értéket? (2 pont)



Megoldás:

A kérdéses intervallum: $]-1;2[$ (2 pont)

47) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto (x-2)^2$ függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

Megoldás:

A minimum helye: **2**. (1 pont)
A minimum értéke: **0**. (1 pont)
Összesen: 2 pont

48)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$|x-3| = 3x-1$. (7 pont)

Az $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x = 4$ helyen a függvényérték 6.
b) Adja meg a és b értékét! (6 pont)

Megoldás:

a) Az egyenlet alakja $x \geq 3$ esetén: $x-3 = 3x-1$, (1 pont)
amiből $x = -1$, (1 pont)
ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)
Az egyenlet alakja $x < 3$ esetén: $-(x-3) = 3x-1$, (1 pont)
amiből $\boldsymbol{x = 1}$. (2 pont)
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

b) A megadott feltételek szerint $a\cdot(-4)+b=0$, (2 pont)
továbbá $a\cdot 4+b=6$. (1 pont)
Az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve és a másik egyenletbe helyettesítve vagy a két egyenletet összeadva kapjuk, hogy (1 pont)
$\boldsymbol{b=3}$, (1 pont)
$\boldsymbol{a=0,75}$. (1 pont)

Összesen: 13 pont

49) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=1+\sin x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

***Megoldás*:**

Felírjuk a $\sin x$ függvény értékkészletét.
$-1\le \sin x\le 1$
Ha az így kapott egyenlőtlenség minden oldalához hozzáadunk egyet, megkapjuk az $1+\sin x$ függvény értékkészletét.
$0\le 1+\sin x\le 2$ (2 pont)
Tehát a megoldás $\boldsymbol{[0;2]}$.

Összesen: 2 pont

50) Az alábbi függvények a pozitív számok halmazán értelmezettek:

$$\boldsymbol{f(x)=-5x}$$
$$\boldsymbol{g(x)=5\sqrt{x}}$$
$$\boldsymbol{h(x)=\frac{5}{x}}$$
$$\boldsymbol{i(x)=5-x}$$

Adja meg annak a függvénynek a betűjelét, amelyik fordított arányosságot ír le! (2 pont)

***Megoldás*:**

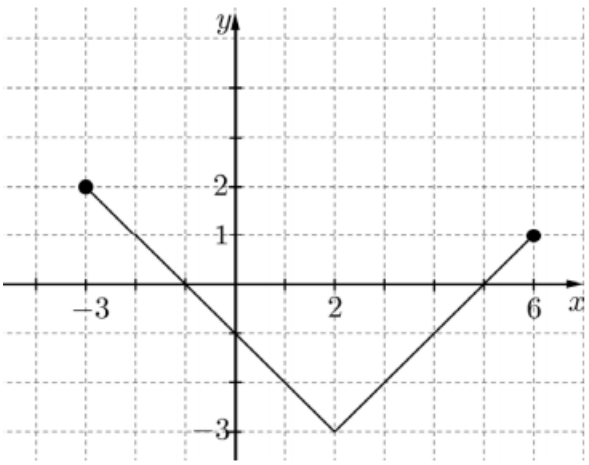
Egy függvény akkor ír le fordított arányosságot, ha x és y értékek szorzata állandó, így a $\boldsymbol{h(x)}$ függvény a megoldás. (2 pont)

Összesen: 2 pont

51) Ábrázolja a $[-3;6]$ intervallumon értelmezett $x\mapsto |x-2|-3$ függvényt! (4 pont)

***Megoldás*:**

A függvény grafikonja az abszolútérték függvény grafikonjából származik. (1 pont)
Az abszolút értéken belüli $|x-2|$ miatt vízszintesen pozitív irányba, az abszolút értéken kívüli $|x-2|-3$ miatt pedig függőlegesen negatív irányba toljuk az eredeti függvényt. (2 pont)
Végül a függvényt a megadott intervallumra szűkítjük. (1 pont)



Összesen: 4 pont

52)

a) Az *ABC* háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a *C* csúcs koordinátáit! (3 pont)

b) Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely –3-hoz –1-et és 3-hoz 7-et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax+b$ alakban adja meg!) (5 pont)

c) Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az *x* tengely melyik pontjából látható derékszögben az *AB* szakasz! (9 pont)

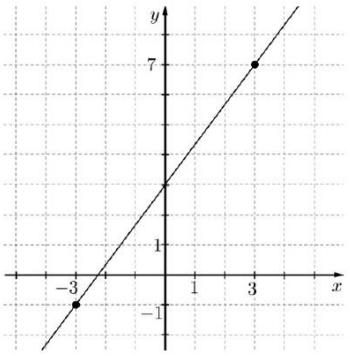
***Megoldás*:**

a) A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, a $C(c_1;c_2)$ pont koordinátáira felírhatóak az alábbi egyenletek. (1 pont)

$0=\frac{-3+3+c_1}{3}$, amelyre $\boldsymbol{c_1=0}$ (1 pont)

$0=\frac{-1+7+c_2}{3}$, amelyre $\boldsymbol{c_2=-6}$ (1 pont)

b) A függvény képe egy egyenes, meredeksége $m=\frac{7-(-1)}{3-(-3)}=\frac{4}{3}$. (2 pont)



A $(3;7)$ ponton átmenő $\frac{4}{3}$ meredekségű egyenes egyenlete pedig $y-7=\frac{4}{3}(x-3)$, így a hozzárendelés szabálya $\boldsymbol{x \mapsto \frac{4}{3}x+3}$. (3 pont)

c) Jelöljük a kérdéses pontot *P*-vel! Mivel a *P* pont az *x* tengelyen van, így a második koordinátája 0. (1 pont)

Ha $P(x;0)$, akkor $\overrightarrow{PA}=(-3-x;-1)$ és $\overrightarrow{PB}=(3-x;7)$. (2 pont)

$\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok skaláris szorzata 0. (1 pont)

$(-3-x)\cdot(3-x)+(-1)\cdot 7 \Rightarrow x^2-8-7=0$, amelynek gyökei $x_1=4$ és $x_2=-4$. (4 pont)

Tehát a feladatnak két megoldása van, $\boldsymbol{P_1(4;0)}$ és $\boldsymbol{P_2(-4;0)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

53) Az alábbi hozzárendelési utasítások közül adja meg annak a betűjelét, amely a 0-hoz 4-et, a 2-höz pedig 0-t rendel!

A: $x \mapsto 2x+4$ B: $x \mapsto 2x-4$ C: $x \mapsto -2x+4$ D: $x \mapsto -2x-4$

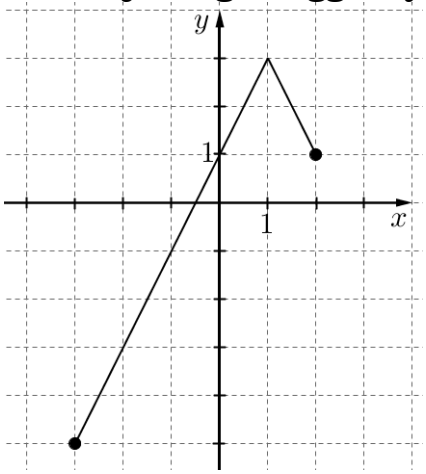
(2 pont)

Megoldás:

$f(0)=-2\cdot(0)+4=4$
$f(2)=-2\cdot(2)+4=0$
$\Rightarrow$ tehát a megoldás a **C: $x \mapsto -2x+4$** (2 pont)

Összesen: 2 pont

54) Az alábbi ábrán a $[-3;2]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto -2|x-1|+3$ függvény grafikonja látható. Adja meg a függvény értékkészletét! (2 pont)



Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[-5;3]$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

55) Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény: $f: x \mapsto (x-1)^2 - 4$.

a) Számítsa ki az f függvény $x = -5$ helyen felvett helyettesítési értékét! (2 pont)

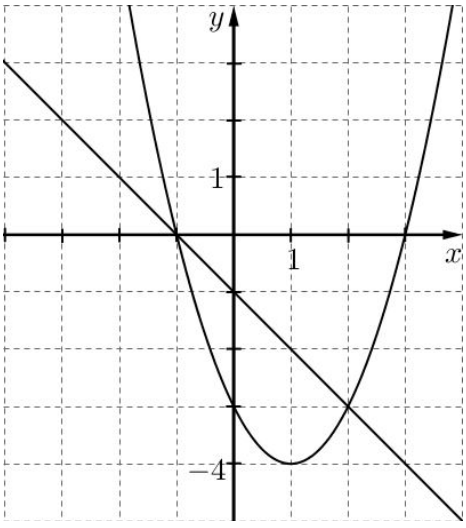
b) Ábrázolja az f függvényt, és adja meg szélsőértékének helyét és értékét! (5 pont)

c) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $(x-1)^2 - 4 = x - 1$. (5 pont)

Megoldás:

a) $f(-5) = (-5-1)^2 - 4 = \mathbf{32}$ (2 pont)

b) Az ábrázolt függvény grafikonja az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából eltolással származik (1 pont)
tengelypontjának első koordinátája 1, (1 pont)
második koordinátája -4. (1 pont)
A függvénynek az $x = 1$ helyen van szélsőértéke (minimuma), (1 pont)
melynek értéke -4. (1 pont)



c) A $g: x \mapsto -x-1$ függvény helyes ábrázolása (ugyanabban a koordinátarendszerben)(2 pont)
A metszéspontok első koordinátáinak leolvasása: $x_1 = -1$ $x_2 = 2$. (2 pont)
A kapott értékek ellenőrzése behelyettesítéssel. (1 pont)

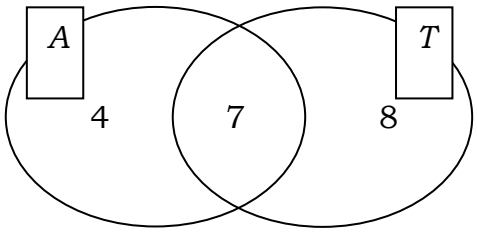
Összesen: 12 pont

Halmazok
Megoldások

1) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.
Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.
a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)
Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.
b) A feladat szövege alapján töltse ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)
c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)
d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

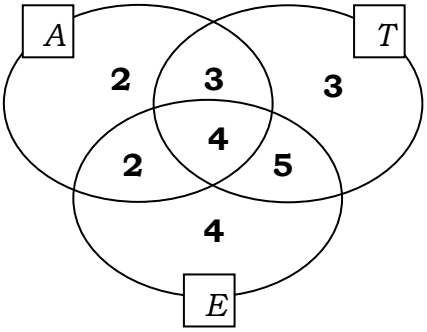
Megoldás:

a)



(2 pont)
Legalább az egyikük által észrevett eltérések száma: $4+7+8=19$ (1 pont)
Egyikük sem vett észre $23-19=\mathbf{4}$ eltérést. (1 pont)
(Halmazábra nélkül is felírható a megtalált eltérések száma.)

b)



(7 pont)

c) **Van olyan eltérés, amit Enikő nem talált meg**.
VAGY: **Enikő nem minden eltérést talált meg**.
VAGY: **Enikő nem találta meg az összes eltérést**. (2 pont)

d) A kedvező esetek száma: 14. (1 pont)
Az összes esetek száma: 23. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{14}{23}\approx \mathbf{0,61}$ vagy 61 %. (2 pont)

Összesen: 17 pont

2) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai szakosztály közül legalább az egyikben. Az atlétika szakosztályban 36 tanuló sportol rendszeresen, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda szakosztály munkájában is részt vesz.

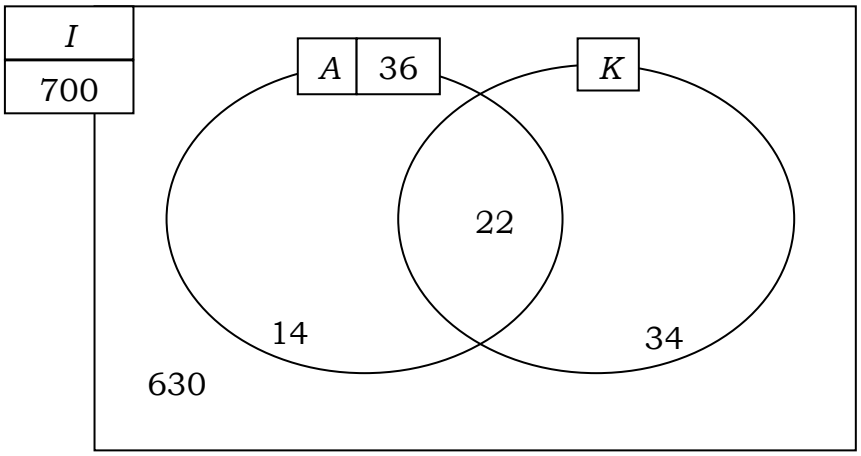
a) Készítsen halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak feltüntetésével! (4 pont)

b) Hányan sportolnak a kosárlabda szakosztályban? (4 pont)

c) Egy másik iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is? (4 pont)

Megoldás:

a)



(4 pont)

b) 36 atlétából 22 kosarazik is, tehát 14-en csak atletizálnak. (1 pont)
70 tanuló sportol összesen, tehát 34 fő csak kosarazik. (2 pont)
$22+34=$ **56 tanuló kosarazik**. (1 pont)

c) A klasszikus modell alkalmazható, 50 kosaras közül választunk. (1 pont)
17 fő atletizál is. (Ezek a kedvező esetek.) (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{17}{50}=$ **0,34** (2 pont)

Összesen: 12 pont

3) Az *A* és a *B* halmazokról a következőket tudjuk: $A\cap B=\{1;2\}$, $A\cup B=\{1;2;3;4;5;6;7\}$, $A\setminus B=\{5;7\}$. Adja meg az *A* és a *B* halmaz elemeit! (4 pont)

Megoldás:

$A=\{1;2;5;7\}$ (2 pont)

$B=\{1;2;3;4;6\}$ (2 pont)

Összesen: 4 pont

4) Egy 10 tagú csoportban mindenki beszéli az angol és a német nyelv valamelyikét. Hatan beszélnek közülük németül, nyolcan angolul. Hányan beszélik mindkét nyelvet? Válaszát indokolja számítással, vagy szemléltesse Venn-diagrammal! (3 pont)

Megoldás:

$(6+8)-10=4$ (2 pont)

Mindkét nyelvet 4 fő beszéli. (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Sorolja fel a *H* halmaz elemeit, ha $H=\{\text{kétjegyű négyzetszámok}\}$ (2 pont)

Megoldás:

$H=\{16;25;36;49;64;81\}$ (2 pont)

6) Egy iskola teljes tanulói létszáma 518 fő. Ők alkotják az *A* halmazt. Az iskola 12. C osztályának 27 tanulója alkotja a *B* halmazt. Mennyi az $A\cap B$ halmaz számossága? (2 pont)

Megoldás:

$A\cap B$ számossága: **27**. (2 pont)

7) Az *A* halmaz elemei a háromnál nagyobb egyjegyű számok, a *B* halmaz elemei pedig a húsznál kisebb pozitív páratlan számok. Sorolja fel az $A\cap B$ halmaz elemeit! (2 pont)

***Megoldás*:**

$A\cap B=\{5;7;9\}$ (2 pont)

8) Egy fordítóiroda angol és német fordítást vállal. Az irodában 50 fordító dolgozik, akiknek 70%-a angol nyelven, 50%-a német nyelven fordít. Hány fordító dolgozik mindkét nyelven? Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

Mindkét nyelven a dolgozók 20%-a fordít. (3 pont)

A mindkét nyelven fordítók száma: **10**. (1 pont)

Összesen: 4 pont

9) Sorolja fel az $A=\{1;10;100\}$ halmaz összes kételemű részhalmazát!(2 pont)

Megoldás:

$A_1=\{1;10\}$; $A_2=\{1;100\}$; $A_3=\{10;100\}$ (2 pont)

10) Az *A* és a *B* halmazok a számegyenes intervallumai: $A=[-1,5;12]$, $B=[3;20]$. Adja meg az $A\cup B$ és a $B\cap A$ halmazokat! (4 pont)

Megoldás:

$A\cup B=[-1,5;20]$ (2 pont)

$B\cap A=[3;12]$ (2 pont)

Összesen: 4 pont

11) Legyen az *A* halmaz a 10-nél kisebb pozitív prímszámok halmaza, *B* pedig a hattal osztható, harmincnál nem nagyobb pozitív egészek halmaza. Sorolja fel az *A*, a *B* és az $A\cup B$ halmazok elemeit! (3 pont)

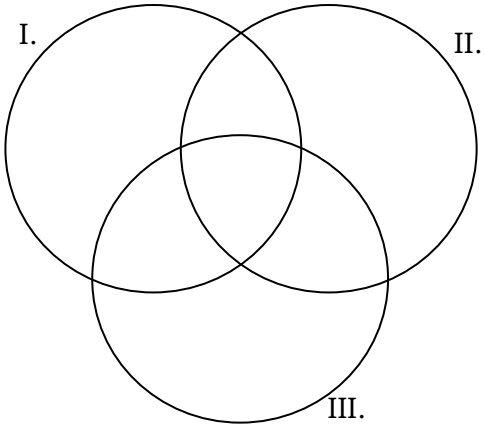
Megoldás:

Az A halmaz elemei: {**2;3;5;7**}. (1 pont)
A B halmaz elemei: {**6;12;18;24;30**}. (1 pont)
Az $A \cup B$ halmaz elemei: {**2;3;5;6;7;12;18;24;30**}. (1 pont)

Összesen: 3 pont

12) Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg:

I. Diákok Hangja
II. Iskolaélet
III. Miénk a suli!



Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében. A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a suli! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5%-a olvasta.

a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt? (2 pont)

b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát! (6 pont)

c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt? (2 pont)

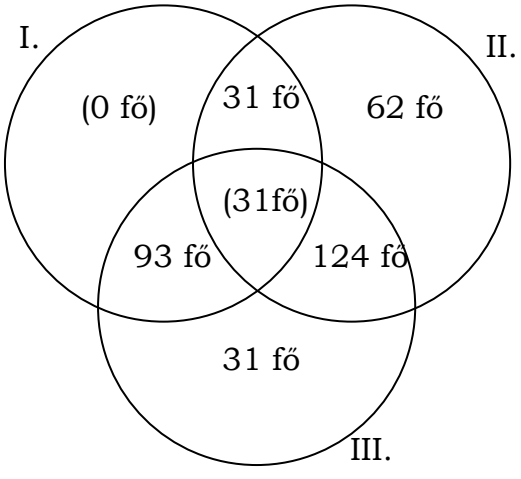
Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélet című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az Iskolaéletet? (7 pont)

Megoldás:

a) **31 tanuló** olvasta mindhárom kiadványt. (2 pont)

b) Ábra 6 pont)



c) (372 fő, tehát) a tanulók **60 %**-a olvasta legalább az egyik kiadványt. (2 pont)

d) 84 fő látogatta, 42 fő nem látogatta a rendezvényeket. (1 pont)
Közülük 28 fő, illetve 21 fő olvasta az Iskolaéletet. (1 pont)
A két megkérdezett diák $\binom{126}{2}$–féleképpen választható ki (összes eset). (1 pont)

A rendezvényt látogatók közül $\binom{28}{1}$-féle olyan diák, a nem látogatók közül $\binom{21}{1}$-féle olyan diák választható, aki olvasta az Iskolaéletet. (1 pont)

A kedvező esetek száma tehát $28 \cdot 21$. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{28 \cdot 21}{\binom{126}{2}} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0,075 (= 7,5\%)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

13) Adott az A és B halmaz: $A\{a;b;c;d\}$, $B\{a;b;d;e;f\}$. Adja meg elemeik felsorolásával az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat! (2 pont)

Megoldás:

$A \cap B = \{a;b;d\}$ (1 pont)

$A \cup B = \{a;b;c;d;e;f\}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

14) Az A halmaz az 5-re végződő kétjegyű pozitív egészek halmaza, a B halmaz pedig a kilenccel osztható kétjegyű pozitív egészek halmaza. Adja meg elemeik felsorolásával az alábbi halmazokat:
A; B; $A \cap B$; $A \setminus B$; (4 pont)

Megoldás:

$A = \{15;25;35;45;55;65;75;85;95\}$ (1 pont)

$B = \{18;27;36;45;54;63;72;81;90;99\}$ (1 pont)

$A \cap B = \{45\}$ (1 pont)

$A \setminus B = \{15;25;35;55;65;75;85;95\}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

15) Jelölje $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát és $\varnothing$ az üres halmazt! Adja meg az alábbi halmazműveletek eredményét!
a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$
b) $\mathbb{Z} \cup \varnothing$
c) $\varnothing \setminus \mathbb{N}$ **(3 pont)**

Megoldás:

a) $\mathbb{N}$ (1 pont)
b) $\mathbb{Z}$ (1 pont)
c) $\varnothing$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

16) Tekintsük a következő halmazokat:

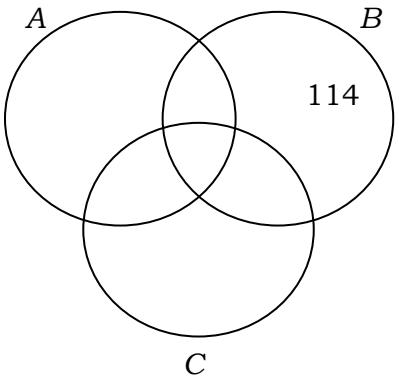
$\boldsymbol{A} = \{$**a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok**$\}$

$\boldsymbol{B} = \{$**a 300-nál nem nagyobb, 3-al osztható pozitív egész számok**$\}$

$\boldsymbol{A} = \{$**a 400-nál nem nagyobb, 4-el osztható pozitív egész számok**$\}$

a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába! (8 pont)

	***A* halmaz**	***B* halmaz**	***C* halmaz**
114	*nem eleme*	*eleme*	*nem eleme*
52			
78			
124			
216			



b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát! (3 pont)

c) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az *A* halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a *B*, sem a *C* halmaznak! (6 pont)

Megoldás:

	***A* halmaz**	***B* halmaz**	***C* halmaz**
52	eleme	nem eleme	eleme
78	eleme	eleme	nem eleme
124	nem eleme	nem eleme	eleme
216	nem eleme	eleme	eleme

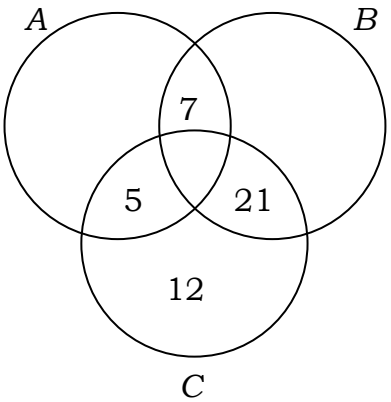
a) Táblázat: (8 pont)

b) A három halmaz közös részében azok a pozitív egész számok vannak, melyek 100-nál nem nagyobbak és 3-mal és 4-gyel is (tehát 12-vel) oszthatók. (1 pont)

Ezek a számok:

$A \cap B \cap C = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96\}$ (1 pont)

Összesen **8 darab** ilyen szám van. (1 pont)



c) Az *A* halmaz elemeinek száma: $|A| = 100$ (1 pont)

Ezek közül hárommal osztható (vagyis B-nek is eleme) 33 darab. (1 pont)

Néggyel osztható (vagyis *C*-nek is eleme) 25 darab. (1 pont)

Tizenkettővel osztható (vagyis mindhárom halmaznak eleme) 8 darab. (1 pont)

Így az *A* halmaz azon elemeinek a száma, melyek nem elemei sem a *B*, sem a *C* halmaznak: $100 - 33 - 25 + 8 = 50$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség: $\boldsymbol{P = \frac{50}{100} = 0{,}5}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

17) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ és $B \setminus A = \{1;2;4;7\}$.
Elemeinek felsorolásával adja meg az A halmazt! (2 pont)

Megoldás:

$A = \{3;5;6;8;9\}$ (2 pont)

18) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6\}$, $A \setminus B = \{1;4\}$ és $A \cap B = \{2;5\}$. Sorolja fel az A és a B halmaz elemeit! (2 pont)

Megoldás:

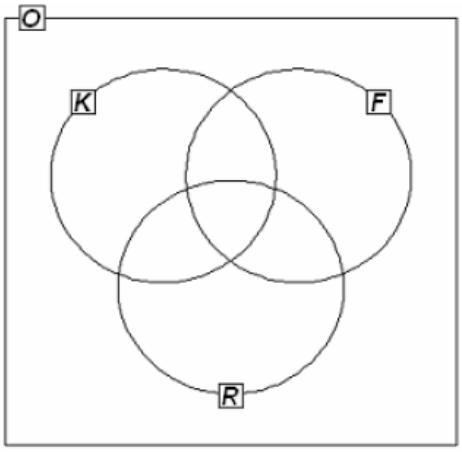
$A = \{1;2;4;5\}$. (1 pont)

$B = \{2;3;5;6\}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

19) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.

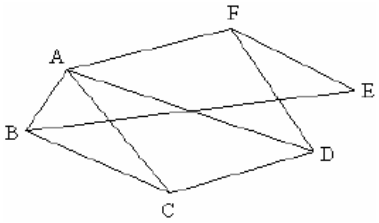
a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat! (4 pont)



1. ábra

b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!
A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére.(2 pont)

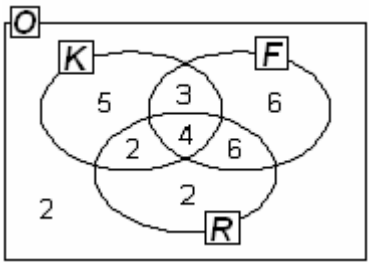
c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)



2. ábra

d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

Megoldás:



a) Ábra (4 pont)

b) **A focira jelentkezettek között van olyan, akinek nincs testvére**. *VAGY:* **A focira jelentkezettek közül nem mindenkinek van testvére**. (2 pont)

c) Az öt tanulót $\binom{19}{5} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{5!} =$ **11628-féleképpen** lehet kiválasztani. (3 pont)

d) A mérkőzések száma összesen: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (1 pont)

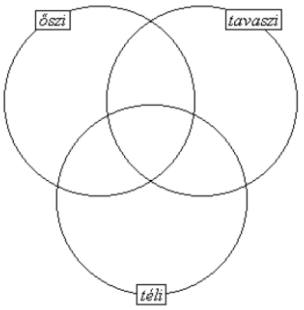
Eddig lejátszottak 9 mérkőzést. (1 pont)

6 mérkőzés van még hátra. (1 pont)

Összesen: 12 pont

20) Egy zeneiskola minden tanulója szerepelt a tanév során szervezett három hangverseny, az őszi, a téli, a tavaszi koncert valamelyikén. 20-an voltak, akik az őszi és a téli koncerten is, 23-an, akik a télin és a tavaszin is, és 18-an, akik az őszi és a tavaszi hangversenyen is szerepeltek. 10 olyan növendék volt, aki mindhárom hangversenyen fellépett.

a) Írja be a halmazábrába a szövegben szereplő adatokat a megfelelő helyre! (4 pont)

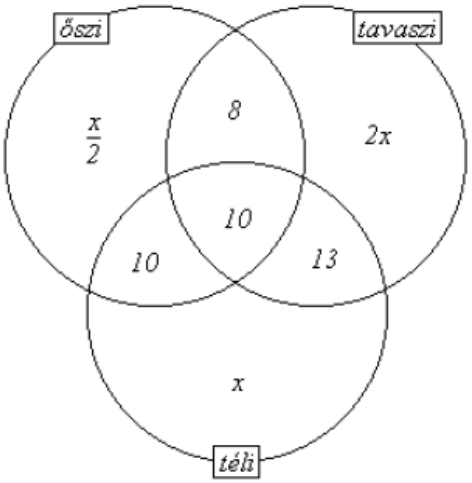


A zeneiskolába 188 tanuló jár. Azok közül, akik csak egy hangversenyen léptek fel, kétszer annyian szerepeltek tavasszal, mint télen, de csak negyedannyian ősszel, mint tavasszal.

b) Számítsa ki, hogy hány olyan tanuló volt, aki csak télen szerepelt! (8 pont)

c) 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5-5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba?(5 pont)

Megoldás:



a) A **8; 10; 10; 13** számokat kell beírni a metszetekbe. (4 pont)

b) Csak télen szerepelt: x tanuló (1 pont)

Csak tavasszal szerepelt: $2x$ tanuló (1 pont)

Csak ősszel szerepelt: $\frac{x}{2}$ tanuló (2 pont)

Az egyenlet: $x + \frac{x}{2} + 2x + 10 + 10 + 13 + 8 = 188$ (2 pont)

Ebből $x = 42$ (1 pont)

Tehát **42** olyan tanuló van, aki csak télen szerepelt (1 pont)

c) Az A osztályból 5 tanulót $\binom{32}{5}$-féleképpen választhatnak ki. (1 pont)

A B osztályból 5 tanulót $\binom{28}{5}$-féleképpen választhatnak ki. (1 pont)

A kedvező esetek száma: $\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}$ (1 pont)

Az összes esetek száma: $\binom{60}{10}$ (1 pont)

A keresett valószínűség tehát: $\frac{\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}}{\binom{60}{10}} \approx \mathbf{0{,}26}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

21) Az *A* halmaz elemei a (-5)-nél nagyobb, de 2-nél kisebb egész számok. *B* a pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az $A \setminus B$ halmazt! (2 pont)

Megoldás:

$A \setminus B = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$ (2 pont)

22) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)

b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	3
1	94
2	89
3	14

Jóska felmérése alapján töltse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.
Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
D) Nem minden háztartásban van televízió. **(2 pont)**

Megoldás:

a) A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje x, a mikrohullámú sütővel rendelkezők számát $2x$. (1 pont)
Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek:
$2x + x - 63 = 141$, (2 pont)
amiből $x = 68$. (1 pont)
Nincs mikrohullámú sütője $150 - 2 \cdot 68 = 14$ megkérdezettnek, (1 pont)
ők az összes megkérdezett kb. **9,3%-át** jelentik. (1 pont)

b) Az egy háztartásban található számítógépek számának átlaga:
$\frac{3 \cdot 0 + 94 \cdot 1 + 89 \cdot 2 + 14 \cdot 3}{200} =$ (1 pont)
$= \mathbf{1,57}$. (1 pont)
A medián **2**, (1 pont)
a módusz **1**. (1 pont)

c) Az állítás tagadásai: **C** és **D.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

23) Legyen *A* halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, *B* pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az *A*, a *B*, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (4 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{A = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}}$ (1 pont)
$\boldsymbol{B = \{3;6;9\}}$ (1 pont)
$\boldsymbol{A \cap B = \{3;6\}}$ (1 pont)
$\boldsymbol{A \setminus B = \{1;2;4;5;7;8\}}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

24) Egy osztályban 25-en tanulnak angolul, 17-en tanulnak németül. E két nyelv közül legalább az egyiket mindenki tanulja. Hányan tanulják mindkét nyelvet, ha az osztály létszáma 30? (2 pont)

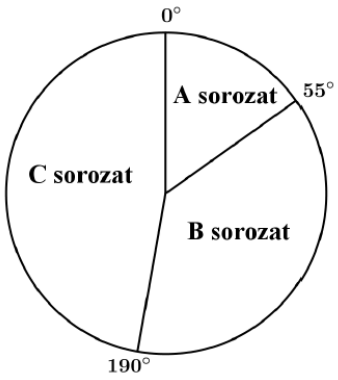
Megoldás:

$30 = 25 + 17 - x$
$-x = 30 - 25 - 17$
$x = 12$
Tehát **12**-en tanulják mindkét nyelvet. (2 pont)

25) Egy közvélemény-kutató intézet azt a feladatot kapta, hogy két alkalommal – fél év különbséggel – mérje fel a TV-ben látható három filmsorozat nézettségi adatait. Az ábrán látható kérdőíven a válaszoló vagy azt jelölhette be, hogy az A, B, és C sorozatok közül melyiket nézi (akár többet is meg lehetett jelölni), vagy azt, hogy egyiket sem nézi. Az első felméréskor kapott 600 kérdőív jelöléseit összesítve megállapították, hogy az A sorozat összesen 90 jelölést kapott, a B sorozat összesen 290-et, a C sorozat pedig összesen 230-at. Érdekes módon olyan válaszadó nem volt, aki pontosan két sorozatot nézett volna, viszont 55-en mindhárom sorozatot bejelölték.

a) A válaszolók hány százaléka nézte az A sorozatot? (2 pont)

b) Hány válaszoló nem nézte egyik sorozatot sem? (5 pont)



A második felmérés során kiválogatták azokat a kérdőíveket, amelyeken valamelyik sorozat meg volt jelölve. Ezeken a három sorozat nézettségére összesen 576 jelölés érkezett. Az adatok feldolgozói minden jelölést megszámoltak, és a végeredményről az itt látható kördiagramot készítették.

c) Számítsa ki, hogy az egyes sorozatok nézettségére hány jelölés érkezett! (5 pont)

Megoldás:

a) Az A sorozatot a válaszolók $\frac{90}{600}\cdot 100 =$ (1 pont)

15%-a nézte. (1 pont)

b) A kizárólag az egyik sorozatot nézők számát megkapjuk, ha az adott sorozatot nézők számából kivonjuk a mindhárom sorozatot nézők számát (55), (1 pont)
ezért csak az a A sorozatot 35, csak a B sorozatot 235, csak a C sorozatot 175 válaszadó nézte. (2 pont)
Így a valamelyik sorozatot nézők száma $35+235+175+55=500$, (1 pont)
ezért egyik sorozatot sem nézte $600-500=$ **100 fő**. (1 pont)

c) Az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek: (az A-val jelölt $55°$), a B-vel jelölt $135°$, a C-vel jelölt $170°$. (2 pont)
A kördiagramon $1°$-nak $\frac{576}{360}=1,6$ válaszadó felel meg. (1 pont)
Az A sorozatra $55\cdot 1,6=$ **88**
A B sorozatra $135\cdot 1,6=$ **216** (2 pont)
A C sorozatra $170\cdot 1,6=$ **272** jelölés érkezett.

Összesen: 12 pont

26) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiatesszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

Megoldás:

a) Az öt lehetőség közül kettőt kiválasztani $\binom{5}{2}=10$-féleképpen lehet (összes esetek száma). (2 pont)

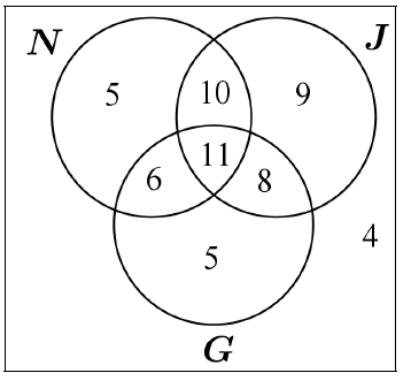
Ezek közül egy esetben kapunk jó megoldást, így a kérdéses valószínűség **0,1**. (1 pont)

b) A pontosan két diák által jól megoldott feladatok száma:

Nóri-Judit: $21-11=10$,

Nóri-Gergő: $17-11=6$ (1 pont)

Judit-Gergő: $19-11=8$



A feladatok között $32-11-10-6=5$ olyan volt, amelyet csak Nóri, és $38-11-10-8=9$ olyan, amelyet csak Judit oldott meg helyesen. (1 pont)

Azon kérdések száma, amelyre a három tanuló közül legalább egyikük helyes választ adott: $58-4=54$. (1 pont)

$32+38-21=49$ olyan kérdés volt, amelyre Nóri vagy Judit helyes választ adott, (1 pont)

így $54-49=5$ olyan feladat volt, amelyet csak Gergő oldott meg helyesen. (1 pont)

A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma: $5+6+8+11=30$. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség $\frac{30}{58}\approx$ (1 pont)

$\approx$ **0,517**. (1 pont)

c) A három megtanulandó biológiai tételt $\binom{28}{3}$, (1 pont)

a kémia tételeket $\binom{30}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

A kiválasztott tételeket tárgyanként $3!(=6)$-féleképpen lehet sorba rendezni. (1 pont)

Az első tétel kétféle tárgyból választható, de a tárgyak sorrendje az első tétel kiválasztása után már adott. (1 pont)

A különböző sorrendek száma: $2\cdot\binom{28}{3}\cdot 3!\cdot\binom{30}{3}\cdot 3!$. (1 pont)

Vagyis Nóri összesen **957640320**-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét. (1 pont)

Összesen: 17 pont

27) Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldását részletezze! (3 pont)

***Megoldás*:**

A halmaz elemei: $A = \{1;2;4;7;14;28\}$

B halmaz elemei: $B = \{1;7;49\}$ (1 pont)

$\boldsymbol{A \cap B = \{1;7\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{B \setminus A = \{49\}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

28) Tekintsük a következő két halmazt: $G = \{1;2;3;4;6;12\}$ és $H = \{1;2;4;8;16\}$. Elemeik felsorolásával adja meg a $G \cap H$ és a $H \setminus G$ halmazokat! (2 pont)

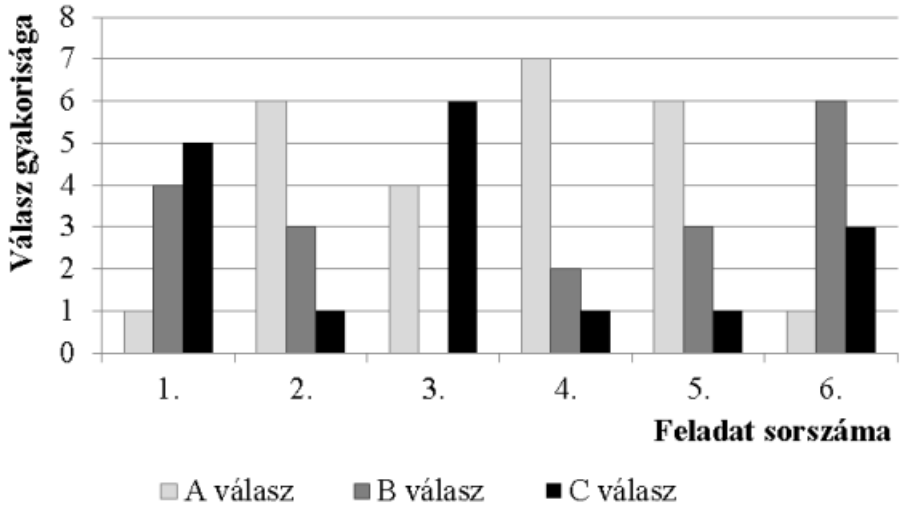
***Megoldás*:**

$\boldsymbol{G \cap H = \{1;2;4\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{H \setminus G = \{8;16\}}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

29) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott választok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)

b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)

Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.

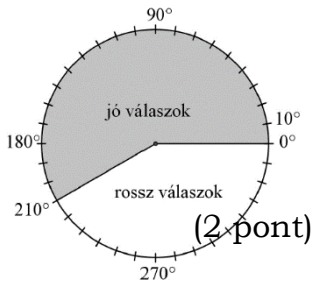
d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben? (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A jó válaszok száma 35, a rossz válaszok száma 25. (1 pont)

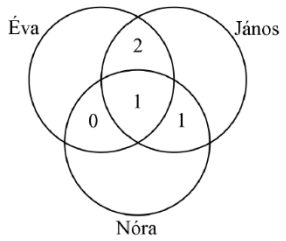
A 10 diák összesen 60 választ adott, ezért 1 válasz 6°-nak felel meg a kördiagramon. (1 pont)

Így a jó válaszok számát egy 210°-os körcikk, a rossz válaszok számát pedig egy 150°-os körcikk szemlélteti. (2 pont)



b) Az ábráról leolvasva, ha az állítás igaz lenne, akkor tanulók összesen $5+6+6+7+6+6=36$ pontot szereztek volna, viszont azt tudjuk, hogy 35 jó válasz volt, ezért az állítás **hamis**. (3 pont)

c) A megválaszolt kérdések számát egy Venn-diagramon ábrázoljuk. (2 pont)



Azért a két feladatért, amit csak egyedül oldottak meg 2 pont jár, így összesen $3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 1+2=\mathbf{11}$ pontot szereztek. (3 pont)

d) Az összes eset száma $3^6=729$, ennyiféleképpen lehet kitölteni a tesztet. (1 pont)

A kedvező esetek számát megkaphatjuk úgy, hogy az összes eset számából levonjuk a kedvezőtlen esetek számát. (1 pont)

Hogy egy válasz se legyen helyes $2^6=64$-féleképpen lehetséges, így a kedvező esetek száma $729-64=665$. (2 pont)

A keresett valószínűség pedig $P=\dfrac{665}{729}=\mathbf{0,91}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

30) Az *A* halmaz elemei a 12 pozitív osztói. A *B* halmaz elemei a 15-nél kisebb (pozitív) prímszámok. Adja meg elemei felsorolásával az *A* , a *B* és az *A* \ *B* halmazt! (3 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{B=\{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{A\setminus B=\{1;\ 4;\ 6;\ 12\}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

31) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.

a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására? (7 pont)

A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4\cdot H-R+F$ képlettel történik, ahol *H* a helyes válaszok, *R* a rossz feladatok, *F* pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.

b) Hány helyes választ adott Vera? (5 pont)

Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.

c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem? (5 pont)

Megoldás:

a) A terv szerint az egyes feladatokra szánt időtartamok olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1 (perc), és az első 25 tagjának összege 75 (perc) (1 pont)
A sorozat különbségét d-vel jelölve az adatok alapján felírható:
$\frac{2\cdot 1+24d}{2}\cdot 25=75$. (1 pont)
Ebből $d=\frac{1}{6}$ (perc). (1 pont)
A számtani sorozat első 21 tagjának összege:
$\frac{2\cdot 1+20\cdot\frac{1}{6}}{2}\cdot 21=56$ (2 pont)
Így az utolsó 4 feladatra összesen $(75-56=)$ **19 percet** szánt Vera a terc szerint. (1 pont)

b) Vera esetében $F=25$, $H+R=22$. (1 pont)
A helyes válaszok számát x-szel jelölve felírató a következő egyenlet:
$4x-(22-x)+25=93$. (2 pont)
Ebből $x=18$, tehát **Vera 18 helyes választ adott**. (1 pont)
Ellenőrzés… (1 pont)

c) Jelölje x azoknak a diákoknak a számát, akik megoldották a 24-es illetve a 25-ös feladatot, illetve azok számát, akik egyik feladatot sem tudták megoldani.
(1 pont)
Csak a 24-es feladatot $x-1$, csak a 25-ös feladatot szintén $x-1$ tanuló oldotta meg. (1 pont)
A feladat szövege alapján $2(x-1)+1+x=11$, (1 pont)
amiből $x=4$, (1 pont)
$(4-1)=$ **3 olyan tanuló volt**, aki a 24-es feladatot megoldotta, de a 25-öst nem. (1 pont)

Összesen: 17 pont

32) Egy 20 fős társaság tagjait az április havi szabadidős tevékenységeikről kérdezték. Mindenki három eldöntendő kérdésre válaszolt (igennel vagy nemmel).

I. Volt-e moziban?
II. Olvasott-e szépirodalmi könyvet?
III. Volt-e koncerten?

A válaszokból kiderült, hogy tizenketten voltak moziban, kilencen olvastak szépirodalmi könyvet, és négy fő járt koncerten. Öten voltak, akik moziban jártak és szépirodalmi könyvet is olvastak, négyen pedig moziban és koncerten is jártak. Hárman mindhárom kérdésre igennel válaszoltak.

a) Hány olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt? (6 pont)

A társaság 20 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.

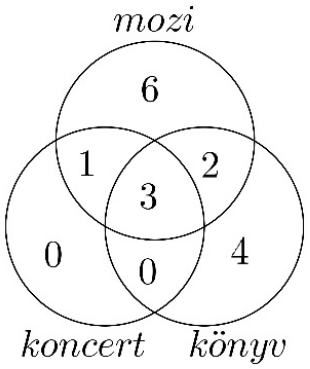
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legalább egyikük volt moziban április folyamán! (5 pont)

Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2.

c) Adja meg ezt a kilenc számot! (6 pont)

Megoldás:

a) Azok száma, akik jártak moziban, és olvastak szépirodalmi könyvet, de koncerten nem voltak: $(5-3=)2$. (1 pont)



Azok száma, akik voltak moziban és koncerten, de nem olvastak szépirodalmi könyvet: $(4-3=)1$. (1 pont)

A társaságban nem volt olyan személy, aki nem volt moziban, de olvasott szépirodalmi könyvet, és koncerten is volt. (1 pont)

Azok száma, akik csak moziban voltak: $12-(2+3+1)=6$ Hasonlóképpen azok száma, akik csak szépirodalmi könyvet olvastak (moziban és koncerten nem voltak): 4, illetve azok száma, akik csak koncerten voltak (moziban nem és könyvet sem olvastak): 0. (2 pont)

$20-(3+2+1+6+4)=$ **4 olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt.** (1 pont)

b) Összesen $\binom{20}{2}(=190)$-féleképpen választhatunk ki két embert. (1 pont)

A komplementer módszert használva az összes lehetséges esetből kivonjuk, azoknak az eseteknek a számát, amikor egyik kiválasztott személy sem volt moziban. (1 pont)

Két olyan embert, aki nem járt moziban, $\binom{8}{2}(=28)$-féleképpen választhatunk ki. (1 pont)

A kedvező esetek száma $190-28=162$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{162}{190}\approx 0{,}853$ (1 pont)

c) Az adatok terjedelme 2, továbbá az adatok között szerepel az 1 és a 2, ezért a válaszok az 1, 2 és 3 számok közül kerülnek ki. (1 pont)

A számok egyetlen módusza az 1, ezért legalább négy 1-es válasz volt. (1 pont)

A nagyság szerint sorba rendezett válaszok közül az ötödik 2 (így pontosan négy 1-es válasz volt). (1 pont)

A válaszok összege (az átlag alapján) 16. (1 pont)

A számok között szerepel legalább egy 3-as, így a hiányzó három szám (melyek 2-esek vagy 3-asok) összege 7. Ez a három szám 2, 2, 3. (1 pont)

A kilenc szám: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. (1 pont)

Összesen: 17 pont

33) Egy 27 fős osztályban mindenki tesz érettségi vizsgát angolból vagy németből. 23 diák vizsgázik angolból, 12 diák pedig németből. Hány olyan diák van az osztályban, aki angolból és németből is tesz érettségi vizsgát? (2 pont)

Megoldás:

$(23+12)-27=$ **8** (2 pont)

Összesen: 2 pont

Kombinatorika
Megoldások

1) A szóbeli érettségi vizsgán az osztály 22 tanulója közül az első csoportba öten kerülnek.

a) Hányféleképpen lehet a 22 tanulóból véletlenszerűen kiválasztani az első csoportba tartozókat? (2 pont)

Először mindenki történelemből felel.

b) Hányféle sorrendben felelhet történelemből az 5 kiválasztott diák? (2 pont)

Megoldás:

a) $\binom{22}{5} = \mathbf{26334}$ (2 pont)

b) $5! = \mathbf{120}$ (2 pont)

Összesen: 4 pont

2) Egy iskolának mind az öt érettségiző osztálya 1-1 táncot mutat be a szalagavató bálon. Az A osztály palotást táncol, ezzel indul a műsor. A többi tánc sorrendjét sorsolással döntik el. Hányféle sorrend alakulhat ki? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az első táncra rögzített az A osztály. A további négy táncnak $4!$ sorrendje lehetséges. (2 pont)

$4! = \mathbf{24}$**-féle sorrend alakulhat ki**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

3) Hány különböző háromjegyű pozitív szám képezhető a 0, 6, 7 számjegyek felhasználásával? (2 pont)

Megoldás:

$2 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{18}$**-féle szám képezhető.** (2 pont)

4) Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.

a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak? (4 pont)

b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás? (4 pont)

c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet? (3 pont)

d) Kis Anna a döntő egyik résztvevője. Ha feltesszük, hogy a résztvevők egyenlő eséllyel versenyeznek, mekkora a valószínűsége, hogy Kis Anna eléri a három dobogós hely egyikét, illetve hogy az öt rangsorolt személy egyike lesz? (6 pont)

Megoldás:

a) $\binom{20}{5}$-féle (3 pont)

15504 jutalmazási sorrend lehetséges. (1 pont)

b) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$, (3 pont)

azaz 1860480 jutalmazási sorrend lehetséges. (1 pont)

c) $\mathbf{5! = 120}$-féle kiosztás lehetséges. (3 pont)

d) Bármelyik helyezés elérésének a versenyen $\frac{1}{20}$ a valószínűsége, (1 pont)

a három, dobogós hely valamelyikének elérése $\frac{3}{20}$ valószínűségű, (2 pont)

mert ezek egymást kizáró események. (1 pont)

Az öt rangsorolt esemény egyikének elérése $\frac{5}{20}\left(=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$ valószínűségű. (2 pont)

Összesen: 17 pont

5) Egy négytagú társaság e-mail kapcsolatban van egymással. Bármelyikük egy-egy társának legfeljebb egy levelet ír hetente. Válassza ki a felsorolt lehetőségek közül, hogy maximum hány levelet írhatott összesen egymásnak a társaság 4 tagja 1 hét alatt? Válaszát indokolja!

a) $\mathbf{4 \cdot 4 = 16}$

b) $\mathbf{4 \cdot 3 = 12}$

c) $\frac{\mathbf{4 \cdot 3}}{\mathbf{2}} = \mathbf{6}$ **(3 pont)**

Megoldás:

Mind a négy ember maximum három levelet írhatott egy héten: $(4 \cdot 3)$. (2 pont)

12 vagy **b**) (1 pont)

Összesen: 3 pont

6) Egy televíziós játékban 5 kérdést tehet fel a játékvezető. A játék során a versenyző, ha az első kérdésre jól válaszol, 40 000 forintot nyer. Minden további kérdés esetén döntenie kell, hogy a játékban addig megszerzett pénzének 50, 75 vagy 100 százalékát teszi-e fel. Ha jól válaszol, feltett pénzének kétszeresét kapja vissza, ha hibázik, abba kell hagynia a játékot, és a fel nem tett pénzét viheti haza.

a) Mennyi pénzt visz haza az a játékos, aki mind az öt feltett kérdésre jól válaszol, s bátran kockáztatva mindig a legnagyobb tétet teszi meg? (4 pont)

b) Az a játékos, aki mindig helyesen válaszol, de óvatos, és a négy utolsó fordulóban pénzének csak 50%-át teszi fel, hány forintot visz haza? (4 pont)

c) A vetélkedő során az egyik versenyző az első négy kérdésre jól válaszolt. A második kérdésnél a pénzének 100 %-át, a 3., 4. és 5. kérdés esetén pénzének 75 %-át tette fel. Az 5. kérdésre sajnos rosszul válaszolt. Hány forintot vihetett haza ez a játékos? (5 pont)

d) Egy versenyző mind az 5 fordulóban jól válaszol, és közben minden fordulóban azonos eséllyel teszi meg a játékban megengedett lehetőségek valamelyikét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elnyerhető maximális pénzt viheti haza? (4 pont)

Megoldás:

a) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig megduplázódik, így a végén $40000 \cdot 2^4 = \mathbf{640000}$ forint a nyeremény. (4 pont)

b) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig másfélszereződik, így a végén $40000 \cdot 1{,}5^4 = \mathbf{202500}$ forint a nyeremény. (4 pont)

c) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy forduló végére $40000 \cdot 2^1 \cdot 1{,}75^2 \cdot 0{,}25 = \mathbf{61250}$ forint a nyeremény. (5 pont)

d) Az összes esetek száma a 4 utolsó fordulóban $3^4 = 81$. (2 pont)
A kedvező esetek száma 1. (1 pont)
A keresett valószínűség (a klasszikus modell szerint): $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{81}} \approx \mathbf{0{,}012}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

7) Októberben az iskolában hat osztály nevezett be a focibajnokságra egy-egy csapattal. Hány mérkőzést kell lejátszani, ha mindenki mindenkivel játszik, és szerveznek visszavágókat is? (3 pont)

Megoldás:

A lejátszandó mérkőzések száma: $\frac{6 \cdot (6-1)}{2} \cdot 2 = \mathbf{30}$. (3 pont)

8) A piacon az egyik zöldségespultnál hétféle gyümölcs kapható. Kati ezekből háromfélét vesz, mindegyikből 1-1 kilót. Hányféle összeállításban választhat Kati? (A választ egyetlen számmal adja meg!) (2 pont)

Megoldás:

$\binom{7}{3} =$ (1 pont)

35-féleképpen választhat. (1 pont)

9) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

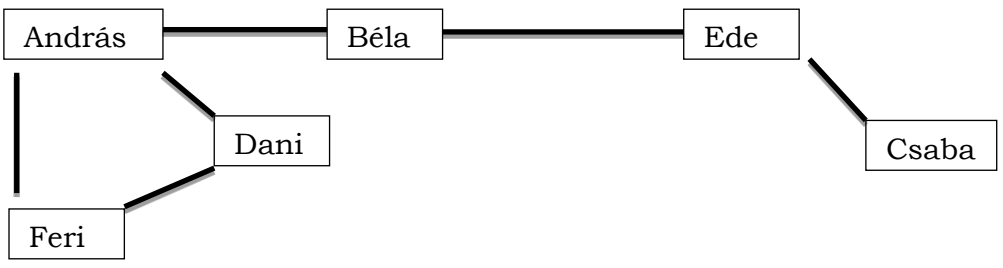
a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket! (4 pont)

b) Hány mérkőzés van még hátra? (3 pont)

c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez? (5 pont)

Megoldás:

a) (4 pont)



b) Ha mindenki mindenkivel egyszer játszik, akkor a mérkőzések száma $\binom{6}{5} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (2 pont)

6 mérkőzést már lejátszottak, **ezért 9 mérkőzés van még hátra.** (1 pont)

c) Ha Dani az első helyen végez, akkor a többiek $5! = 120$-féleképpen „követhetik”. (2 pont)

Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha Dani második. (2 pont)

Így a kérdéses lehetőségek száma: **240**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

10) Hány olyan háromjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyikben csupa különböző számjegyek szerepelnek? (2 pont)

Megoldás:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{60}$ (2 pont)

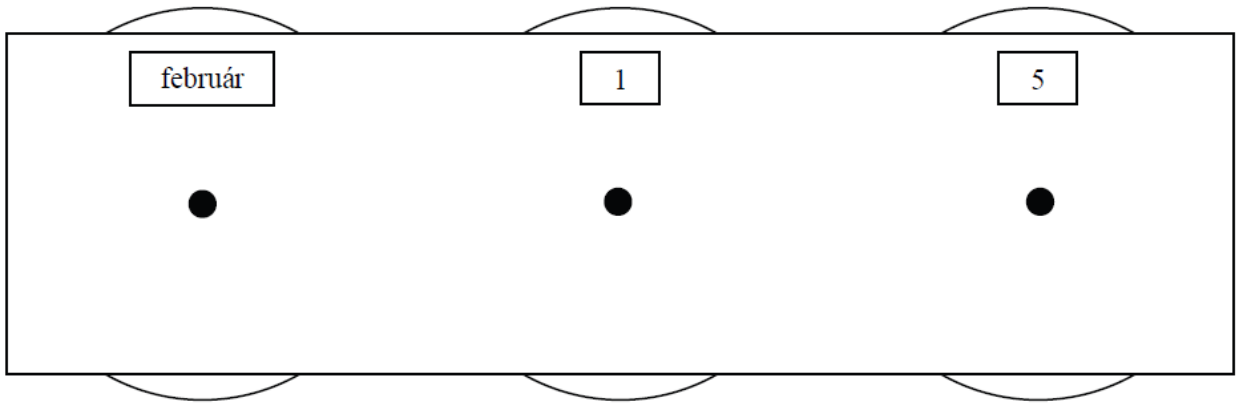
11) Az iskola rajztermében minden rajzasztalhoz két széket tettek, de így a legnagyobb létszámú osztályból nyolc tanulónak nem jutott ülőhely. Minden rajzasztalhoz betettek egy további széket, és így hét üres hely maradt, amikor ebből az osztályból mindenki leült.

a) Hány rajzasztal van a teremben? Hányan járnak az iskola legnagyobb létszámú osztályába? (6 pont)

A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3; a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3, ...8, 9 számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat”.

b) Összesen hány „dátum” forgatható ki? (3 pont)

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen megforgatva olyan dátumot kapunk, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév. (3 pont)



Megoldás:

a) A teremben x rajzasztal van, és az osztály létszáma y. (1 pont)

$2x + 8 = y$ (1 pont)

$3x - 7 = y$ (1 pont)

$x = 15$ és $y = 38$ (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

15 asztal van a teremben, és a kérdéses osztálylétszám 38 fő. (1 pont)

b) A lehetséges „dátumok” száma: $12 \cdot 4 \cdot 10$, (2 pont)
tehát **480 „dátum” forgatható ki.** (1 pont)

c) Valóságos dátumból nem szökőévben 365 van, (1 pont)
minden lehetséges „dátum” egyenlő valószínűséggel forgatható ki*, ezért valóságos dátumot $\frac{365}{480}(=0,7604)$ valószínűséggel kapunk. (2 pont)

Összesen: 12 pont

12) Egy 7-tagú társaságban mindenki mindenkivel egyszer kezet fogott. Hány kézfogás történt? (2 pont)

Megoldás:

21 kézfogás történt. (2 pont)

13) A 9.B osztály létszáma 32 fő. Közülük először egy osztálytitkárt, majd egy titkárhelyettest választanak. Hányféleképpen alakulhat a választás kimenetele? (2 pont)

Megoldás:

$32 \cdot 31 = \mathbf{992}$**-féleképpen.** (2 pont

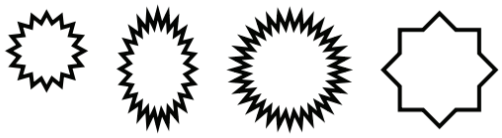
14) Ha az eredetileg $I_0\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugár x mm $(x \geq 0)$ mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0,1^{\frac{x}{6}}\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0 = 800\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15 %-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!) (6 pont)

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel? (8 pont)



Megoldás:

a)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800	**713**	**635**	**505**	**450**	**357**	**253**

(3 pont)

b) Megoldandó a $0{,}15 = 0{,}1^{\frac{x}{6}}$ egyenlet (ahol x a keresett távolság mm-ben mérve). (2 pont)

$$\lg 0{,}15 = \frac{x}{6} \cdot 0{,}1$$

$$x = 6 \cdot \frac{\lg 0{,}15}{\lg 0{,}1}$$ (2 pont)

$\boldsymbol{x \approx 4{,}9}$ (1 pont)

A lézersugár intenzitása kb. 4,9 mm mélységben csökken az eredeti érték **15 %**-ára. (1 pont)

c) Minden csillag esetében három lehetőség van a megvilágításra: kék, zöld, nincs kirajzolva. (3 pont)

A különböző dekorációs tervek száma ezért: $3^4 = 81$. (4 pont)

Legalább egy csillagot ki kell rajzolni, így a lehetőségek száma $\mathbf{81-1=80}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

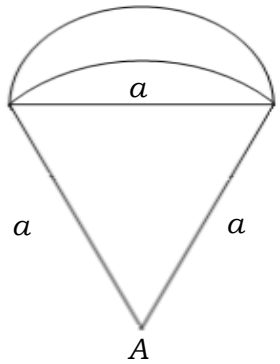
15) Annának kedden 5 órája van, mégpedig matematika (M), német (N), testnevelés (T), angol (A) és biológia (B). Tudjuk, hogy a matematikaórát testnevelés követi, és az utolsó óra német. Írja le Anna keddi órarendjének összes lehetőségét! (2 pont)

Megoldás:

Felsorolás:

MTABN, MTBAN, AMTBN
BMTAN, ABMTN, BAMTN (2 pont)

16) Az ábrán egy ejtőernyős klub kitűzője látható. (Az egyik körív középpontja a szabályos háromszög *A* csúcsa, a másik körív középpontja az *A* csúccsal szemközti oldal felezőpontja.)
Ezt a lapot fogják tartományonként színesre festeni.



a) Számítsa ki egyenként mindhárom tartomány területét, ha $a = 2{,}5$ cm! Számításait legalább két tizedesjegy pontossággal végezze, és az így kapott eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

b) Hányféle módon festhető színesre a kitűző, ha minden tartományt a piros, sárga, zöld és kék színek valamelyikére festenek a következő két feltétel együttes figyelembe vételével:
(1) szomszédos tartományok nem lehetnek azonos színűek;
(2) piros és sárga színű tartomány nem lehet egymás mellett.
(Szomszédos tartományoknak van közös határvonala.) (11 pont)

Megoldás:

a) Az a oldalú szabályos háromszög területe:

$t_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 2,7\left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A szabályos háromszög feletti tartomány egy a sugarú kör 60°-os középponti szögéhez tartozó körszelet, (1 pont)
amelynek területe:

$t_2 = \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,6\left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A legfelső „holdacska” területét úgy kapjuk, hogy az $\frac{a}{2}$ sugarú félkör területéből kivonjuk a körszelet területét. (1 pont)

$t_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi - t_2 = \frac{a^2\pi}{8} - \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ (1 pont)

$= \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx \mathbf{1,9\left(cm^2\right).}$ (1 pont)

b) Ha csak az (1) feltételt vesszük figyelembe, akkor a „holdacska” színe négyféle lehet, (1 pont)
a körszelet színe (1) miatt már csak háromféle, (1 pont)
a szabályos háromszög színe pedig szintén háromféle, hiszen csak a körszelet színével nem lehet azonos. (1 pont)
Az (1) feltételnek megfelelő színezések száma tehát $4\cdot4\cdot3 = 36$. (1 pont)
Ebből a 36 esetből kell elvennünk azokat az eseteket, amelyekre (2) nem teljesül. (1 pont)
Azoknak a lehetőségeknek a száma, amikor 3 színnel színezünk, és piros tartomány van sárga mellett $4\cdot2 = 8$ (2 pont)
ugyanis négyféleképpen helyezkedhet el egymás mellett a piros és a sárga tartomány, és a harmadik szín mindegyik esetben kétféle lehet. (1 pont)
Olyan kifestés, ahol csak a piros és sárga használnánk, kétféle lehet. (2 pont)
Így a mindkét feltételnek megfelelő színezések száma: $36 - (8+2) =$ **26** (1 pont)

Összesen: 17 pont

17) András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papír cetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnevük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut? (5 pont)

b) Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve! A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg! (A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!) (6 pont)

A cédulák megfelelő sorrendjei	A húzó neve				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
					E
					E
					E
					E
					E
					E

c) Az ajándékok átadása után mind az öten moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett? (6 pont)

Megoldás:

a) Az 5 név bármelyike ugyanakkora valószínűséggel kerülhet az első helyre, (3 pont)

tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{5} = 0,2$. (2 pont)

A feladat megoldható a kedvező/összes formulával is.

b) Táblázat (6 pont)

A cédulák megfelelő sorrendjei	A húzó neve				
	A	B	C	D	E
	B	**A**	**D**	**C**	E
	B	**C**	**D**	**A**	E
	B	**D**	**A**	**C**	E
	C	**A**	**D**	**B**	E
	C	**D**	**A**	**B**	E
	C	**D**	**B**	**A**	E
	D	**A**	**B**	**C**	E
	D	**C**	**A**	**B**	E
	D	**C**	**B**	**A**	E

c) Azt a két helyet, ahol a fiúk ülhetnek (nem egymás mellett), 6-féleképpen választhatjuk ki, (1 pont)

mert $\binom{5}{2} - 4 = 6$. (1 pont)

A két kiválasztott helyen a fiúk 2-féleképpen helyezkedhetnek el. (1 pont)

A lányok minden egyes esetben $3! = 6$ különböző módon ülhetnek le egymáshoz képest. (1 pont)

Összesen tehát $6 \cdot 2 \cdot 6 =$ (1 pont)

$= 72$ különböző módon ülhetnek le. (1 pont)

Komplementer halmazzal is számolhatunk.

Összesen: 17 pont

18)

a) Hány olyan négy különböző számjegyből álló négyjegyű számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme az $\{1;2;3;4;5;6;7\}$ halmaznak? (3 pont)

b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből? (6 pont)

c) Hány olyan hatjegyű, hárommal osztható szám írható fel, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazza, és e számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul benne? (8 pont)

Megoldás:

a) Összesen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$, (2 pont)
azaz **840** négyjegyű számot lehet készíteni. (1 pont)

b) Az első öt számjegy mindegyike lehet az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül bármelyik, ez összesen $5^5 (= 3125)$ lehetőség. (2 pont)

Az utolsó két számjegy a 4-gyel való oszthatóság miatt csak a következő öt eset valamelyike lehet: 12, 24, 32, 44, 52. (2 pont)
Összesen $5^5 \cdot 5$ (1 pont)
azaz **15 625** hétjegyű szám alkotható. (1 pont)

c) Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyike szerepel a hatjegyű számban, közülük az egyik pontosan kétszer. (1 pont)
Csak a 3-as számjegy lehet az, amelyik kétszer fordul elő, (1 pont)
mert a számjegyek összegének 3-mal oszthatónak kell lennie, (1 pont)
és 1+ 2+ 3+ 4 + 5 = 15 (ami osztható 3-mal). (1 pont)
A két 3-as számjegy helyét $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk meg. (1 pont)
A megmaradó 4 helyre 4!-féleképpen helyezhető el a többi számjegy. (1 pont)
A megfelelő hatjegyű számokból összesen $\binom{6}{2} \cdot 4!$, (1 pont)
azaz **360 darab** van. (1 pont)

Összesen: 17 pont

19) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis! (2 pont)

a) Hét tanulóból négyet ugyanannyiféleképpen lehet kiválasztani, mint hármat, ha a kiválasztás sorrendjétől mindkét esetben eltekintünk.

b) Van olyan x valós szám, amelyre igaz, hogy $\sqrt{x^2} = -x$

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **igaz** (1 pont)

Összesen: 2 pont

20) Egy futóverseny döntőjébe hat versenyző jutott, jelöljük őket *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* betűvel. A cél előtt pár méterrel már látható, hogy *C* biztosan utolsó lesz, továbbá az is biztos, hogy *B* és *D* osztozik majd az első két helyen. Hányféleképpen alakulhat a hat versenyző sorrendje a célban, ha nincs holtverseny? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

B és *D* az első két helyen 2-féleképpen végezhet. (1 pont)
Mögöttük *A*, *E* és *F* sorrendje $3! = 6$ -féle lehet. (1 pont)
Így összesen $2 \cdot 6 =$ **12**-féleképpen érhetnek célba a versenyzők. (1 pont)

Összesen: 3 pont

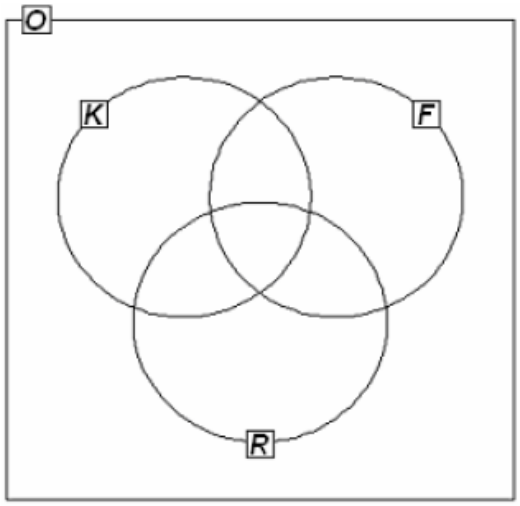
21) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.

a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat! (4 pont)

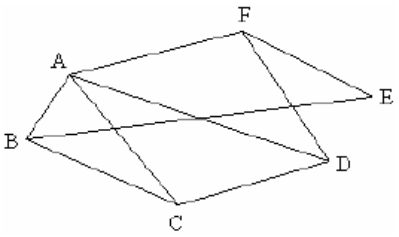
b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvér. (2 pont)

c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)

d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



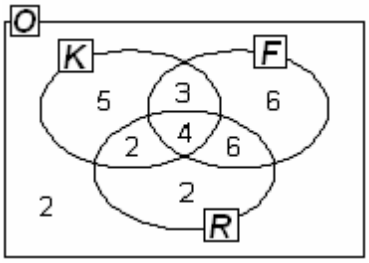
1. ábra



2. ábra

Megoldás:

a) Ábra (4 pont)



b) **A focira jelentkezettek között van olyan, akinek nincs testvére**. *VAGY:* **A focira jelentkezettek közül nem mindenkinek van testvére**. (2 pont)

c) Az öt tanulót $\binom{19}{5} = \frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{5!} = \mathbf{11628}$**-féleképpen** lehet kiválasztani.

(3 pont)

d) A mérkőzések száma összesen: $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ (1 pont)

Eddig lejátszottak 9 mérkőzést. (1 pont)

6 mérkőzés van még hátra. (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a baloldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.

a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre? (2 pont)

b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek? (3 pont)

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna és Béla jegye egymás mellé szól, ha a fenti négy jegyet véletlenszerűen osztjuk ki közöttük? (4 pont)

A színház 1200 személyes. A szombati előadásra az összes jegy elkelt. Az eladott jegyek 40%-a 800 Ft-os, 25%-a 1000 Ft-os, 20%-a 1200 Ft-os, 15%-a 1500 Ft-os jegy volt.

d) Ábrázolja kördiagramon az eladott jegyek jegyárak szerinti százalékos megoszlását! (3 pont)

e) Számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe kerül egy színházjegy! (5 pont)

Megoldás:

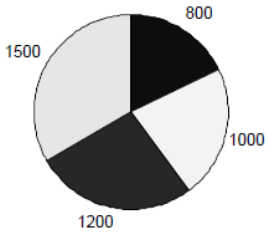
a) $\mathbf{4! = 24}$. (2 pont)

b) Anna és Béla egymás mellett ülnek, ezért egy „elemnek” tekinthetjük őket, azaz 3 elemet kell permutálnunk: 3!. (2 pont)
Anna és Béla bármelyik fenti sorrendben helyet cserélhetnek egymással, ezért azon esetek száma, amikor Anna és Béla egymás mellett ülnek: $\mathbf{3! \cdot 2 = 12}$ (1 pont)

c) $\dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \dfrac{2 \cdot 3!}{4!}$ (3 pont)

A kérdezett valószínűség: $\mathbf{\dfrac{2}{4}}$ vagy $\mathbf{0,5}$ vagy $\mathbf{50\%}$. (1 pont)

d) A megadott százalékértékeknek megfelelő szögek:
800Ft, 40%: 144°,
1000 Ft, 25%: 90°,
1200 Ft, 20%: 72°,
1500 Ft, 15%: 54°. (1 pont)
Helyes diagram (2 pont)



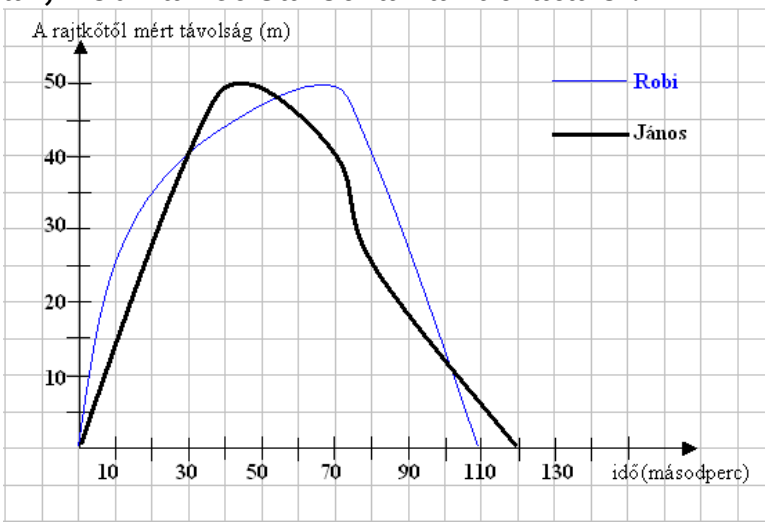
e) Kiszámolható, hogy a különböző árú jegyekből hány darab fogyott:
480 db – 800 Ft-os jegy;
300 db – 1000 Ft-os jegy;
240 db – 1200 Ft-os jegy;
180 db – 1500 Ft-os jegy. (2 pont)

$\dfrac{480 \cdot 800 + 300 \cdot 1000 + 240 \cdot 1200 + 180 \cdot 1500}{1200} = \mathbf{1035}$ (2 pont)

Az átlagár tehát 1035 Ft. (1 pont)

Összesen: 17 pont

23) Egy sportuszoda 50 méteres medencéjében egy edzés végén úszóversenyt rendeztek. A versenyt figyelve az edző a következő grafikont rajzolta két tanítványának, Robinak és Jánosnak az úszásáról.



Olvassa le a grafikonról, hogy

a) Mennyi volt a legnagyobb távolság a két fiú között a verseny során (1 pont)

b) Mikor előzte meg János Robit (2 pont)

c) Melyikük volt gyorsabb a 35. másodpercben! (2 pont)

A 4*100-as gyorsváltó házi versenyén a döntőbe a Delfinek, a Halak, a Vidrák és a Cápák csapata került.

d) Hányféle sorrend lehetséges közöttük, ha azt biztosan tudjuk, hogy nem a Delfinek csapata lesz a negyedik? (3 pont)

e) A verseny után kiderült, hogy az élen kettős holtverseny alakult ki, és a Delfinek valóban nem lettek az utolsók. Feltéve, hogy valakinek csak ezek az információk jutottak a tudomására, akkor ennek megfelelően hányféle eredménylistát állíthatott össze? (4 pont)

Megoldás:

a) **15 méter** (1 pont)

b) A **30. másodpercnél, vagy a 31. másodpercnél** (2 pont)

c) **János** (2 pont)

d) A lehetséges sorrendek száma: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{18}$ (3 pont)

e) Két esetet kell megvizsgálni (1 pont)

Ha a Delfinek holtversenyben az első helyen végeztek, akkor: $\binom{3}{1}$ a lehetséges sorrendek száma (1 pont)

Ha a Delfinek nem lettek elsők, akkor $\binom{3}{2}$ a megoldás (1 pont)

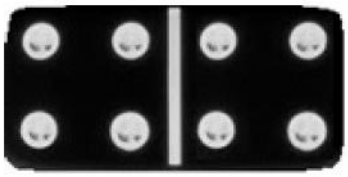
A lehetséges sorrendek száma összesen **9**. (1 pont)

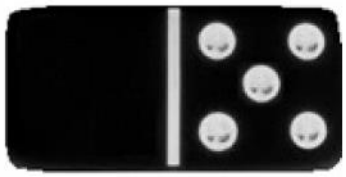
Összesen: 12 pont

24)

a) Egy memóriajáték 30 olyan egyforma méretű lapból áll, melyek egyik oldalán egy-egy egész szám áll az 1, 2, 3, ... 14, 15 számok közül. Mindegyik szám pontosan két lapon szerepel. A lapok másik oldala (a hátoldala) teljesen azonos mintázatú. A 30 lapot összekeverjük. A játék kezdetén a lapokat az asztalra helyezzük egymás mellé, hátoldalukkal felfelé fordítva, így a számok nem látszanak. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játék kezdetén két lapot véletlenszerűen kiválasztva a lapokon álló számok megegyeznek!
(5 pont)

b) Egy dominókészlet azonos méretű kövekből áll. Minden dominókő egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken elhelyezett pöttyök száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egyforma kő nem lehet egy készletben. Az ábrán két kő látható: a 4-4-es és a 0-5-ös (vagy 5-0-ás). Hány kőből áll egy dominókészlet? **(6 pont)**





c) A „Ki nevet a végén?" nevű társasjátékban egy játékos akkor indulhat el a pályán, amikor egy szabályos dobókockával 6-ost dob. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy valaki pontosan a harmadik dobására indulhat el a pályán! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Két lapot kiválasztunk a 30-ból, ezt $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$-féle képpen lehet megtenni, mely az összes lehetséges esetet jelenti. (2 pont)
A kedvező esetek száma (amikor a két lapon szereplő számok megegyeznek) 15. (2 pont)
A keresett valószínűség tehát: $\frac{15}{435} = \frac{1}{29} \approx \mathbf{0,0345}$. (1 pont)

b) Összesen 7 olyan kő van, amelyen a két részben azonos a pöttyök száma. (2 pont)
A kő két részén (a két részt megkülönböztetve) különböző számú pöttyöt $7 \cdot 6 = 42$-féleképpen lehetne elhelyezni, (2 pont)
de így minden ilyen követ kétszer számolnánk, ezért ezek száma 21. (1 pont)
Összesen **28 kő** van a teljes készletben. (1 pont)

c) Aki pontosan a harmadik dobására kezdi el a játékot, az az első két dobásánál öt-ötfélét dobhatott, (1 pont)
a harmadikra viszont csak egyfélét (hatost). (1 pont)
Így a kedvező esetek száma $5 \cdot 5 \cdot 1$ (1 pont)
Az összes eset száma: 6^3. (1 pont)
A kérdéses valószínűség tehát: $\frac{25}{216} \approx \mathbf{0,1157}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

25) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben $1,5\ \mathrm{m}^2$-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a $27\ \mathrm{m}^2$-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

Megoldás:

a) Ha naponta x-szeresére nőtt az algás terület, akkor:

$1,5 \cdot x^7 = 27$. (1 pont)

$x = \sqrt[7]{18} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{1,5}$ (1 pont)

Az algás terület naponta körülbelül a másfélszeresére növekedett. (1 pont)

b) A medence alaplapja egy $2,4\mathrm{m}$ oldalhosszúságú szabályos hatszög, ennek területe $T_{\text{alaplap}} = 6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$ (2 pont)

$\approx 14,96\left(\mathrm{m}^2\right)$ (1 pont)

A medence oldalfalainak összterülete

$T_{oldalfal} = 6 \cdot 2,4 \cdot 0,4 = 5,76\left(\mathrm{m}^2\right)$. (1 pont)

Így összesen körülbelül $\mathbf{20,7\ m^2}$ felületet burkoltak csempével. (1 pont)

A medence térfogata

$V = T_{alaplap} \cdot m = 6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 0,4 \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{5,986\left(m^3\right)}$. (1 pont)

Körülbelül **5986 liter** víz fér el a medencében. (1 pont)

c) Ha például a kék és a sárga színt választották ki, akkor $\binom{6}{3} = 20$ különböző módon választható ki az a három vízsugár, amelyet a kék színnel világítanak meg (a másik három fénysugarat ugyanekkor sárga színnel világítják meg). (2 pont)

A megvilágításhoz két színt háromféleképpen választhatnak ki (kék-sárga, kék-piros, piros-sárga). (1 pont)

$3 \cdot \binom{6}{3} = 60$ (1 pont)

Azaz **60** különböző megvilágítás lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) András és Péter „számkártyázik" egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott lapot. (Például, ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.



a) Hány kártya van Péter előtt az első mérkőzés után, ha András az 1, 2, 3, 4, 5, 6, Péter pedig a 2, 4, 5, 3, 1, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait? (2 pont)

A második mérkőzés során Péter az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait, és így összesen két lapot vitt el.

b) Adjon meg egy lehetséges sorrendet, amelyben András kijátszhatta lapjait! (3 pont)

A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőt küldi csatába).

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg! (6 pont)

A negyedik mérkőzés előtt mindketten úgy döntöttek, hogy az egész mérkőzés során véletlenszerűen játsszák majd ki a lapjaikat. Az első három csata után Andrásnál a 3, 4, 6 számkártyák maradtak, Péternél pedig az 1, 5, 6 számkártyák.

d) Adja meg annak a valószínűségét, hogy András az utolsó három csatából pontosan kettőt nyer meg! (6 pont)

Megoldás:

a) Péter megnyert három csatát (kettőt elvesztett), egy csata pedig döntetlenre végződött, (1 pont)
így Péter előtt összesen **hét kártya van** az első mérkőzés után. (1 pont)

b) Péter úgy vihetett el két lapot, ha egy csatát nyert és ötöt elveszített, vagy két csatában döntetlent ért el, és négyet elveszített. (1 pont)
András lapjainak (egyetlen lehetséges) sorrendje:
2, 3, 4, 5, 6, 1. (2 pont)

c) Péter az első két lapot $6 \cdot 5 = 30$-féleképpen tudja letenni, ez az összes esetek száma (1 pont)
Ezek közül a következő esetekben viszi el András első két lapját: (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6), (5; 4), (5; 6), (6; 4), (6; 5). (3 pont)
Kedvező esetek száma 9. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{9}{30} = 0,3$. (1 pont)

d) Az összes lehetséges csata száma ezekkel a lapokkal $3! \cdot 3! =$ (1 pont)
$= 36$ (1 pont)
András akkor nyer pontosan kettőt, ha valamilyen sorrendben a 3-1, 6-5, 4-6 csaták, (1 pont)
vagy a 4-1, 6-5, 3-6 csaták zajlanak le. (1 pont)
Ezek $2 \cdot 3! = 12$-féleképpen valósulhatnak meg, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)
A kérdéses valószínűség $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

27) A biliárdjáték megkezdésekor az asztalon 15 darab azonos méretű, színezésű biliárdgolyót helyezünk el háromszög alakban úgy, hogy az első sorban 5 golyó legyen, a másodikban 4, a következőkben pedig 3, 2, illetve 1 golyó. (A golyók elhelyezésére vonatkozó egyéb szabályoktól tekintsünk el.)

a) Hányféleképpen lehet kiválasztani a 15-ből azt az 5 golyót, amelyet majd az első sorban helyezünk el? (Az 5 golyó sorrendjét nem vesszük figyelembe.) (3 pont)

b) Hányféle különböző módon lehet az első két sort kirakni, ha a 9 golyó sorrendjét is figyelembe vesszük? (3 pont)

Egy biliárdasztal játékterülete téglalap alakú, mérete 194 cm × 97 cm. A játékterület középpontja felett 85 cm-rel egy olyan (pontszerűnek tekinthető) lámpa van, amely fénykúpjának a nyílásszöge 100°.

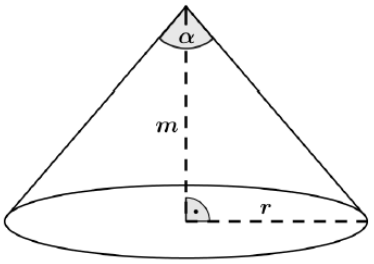
c) Számítással állapítsa meg, hogy a lámpa megvilágítja-e a játékterület minden pontját! (11 pont)

Megoldás:

a) 15 golyóból az első sorba kerülő 5-öt $\binom{15}{5} =$ (2 pont)
$= \mathbf{3003}$-féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

b) A lehetséges különböző kirakások száma:
$15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 7 =$ (2 pont)
$= \mathbf{1816214400}$. (1 pont)

c) Az ábra, melyen a lámpa fénykúpjának nyílásszöge, azaz $\alpha = 100°$, a kúp magassága $m = 85\ \text{cm}$, az alapkör sugara r. (2 pont)
Szögfüggvény alkalmazása a derékszögű háromszögben: $\text{tg}\,50° =$ (1 pont)
$= \frac{r}{m}$. (1 pont)
Ebből az alapkör sugara: $r \approx 101{,}3\,(\text{cm})$. (1 pont)



A kérdés megválaszolásához az asztallap két legtávolabbi pontjának a távolságát kell vizsgálni, vagyis meg kell határozni a téglalap átlóinak (e) a hosszát. (2 pont)
$e^2 = 194^2 + 97^2$ (1 pont)
$e \approx 216{,}9\,(\text{cm})$. (1 pont)
Mivel $e > 2r$, (1 pont)
ezért a lámpa **nem világítja be** az asztallap minden pontját. (1 pont)

Összesen: 17 pont

28) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiatesszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

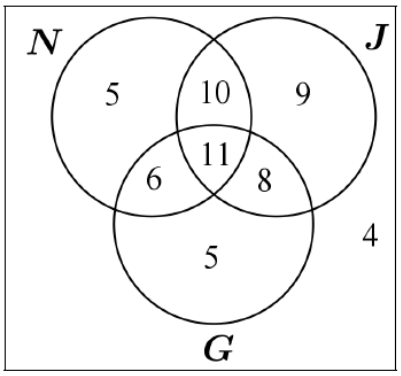
Megoldás:

a) Az öt lehetőség közül kettőt kiválasztani $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen lehet (összes esetek száma). (2 pont)
Ezek közül egy esetben kapunk jó megoldást, így a kérdéses valószínűség **0,1**. (1 pont)

b) A pontosan két diák által jól megoldott feladatok száma:
Nóri-Judit: $21 - 11 = 10$,
Nóri-Gergő: $17 - 11 = 6$ (1 pont)
Judit-Gergő: $19 - 11 = 8$

A feladatok között $32-11-10-6=5$ olyan volt, amelyet csak Nóri, és $38-11-10-8=9$ olyan, amelyet csak Judit oldott meg helyesen. (1 pont)

Azon kérdések száma, amelyre a három tanuló közül legalább egyikük helyes választ adott: $58-4=54$. (1 pont)



$32+38-21=49$ olyan kérdés volt, amelyre Nóri vagy Judit helyes választ adott, (1 pont)

így $54-49=5$ olyan feladat volt, amelyet csak Gergő oldott meg helyesen. (1 pont)

A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma: $5+6+8+11=30$. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség $\frac{30}{58}\approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0,517}$. (1 pont)

c) A három megtanulandó biológiai tételt $\binom{28}{3}$, (1 pont)

a kémia tételeket $\binom{30}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

A kiválasztott tételeket tárgyanként $3!(=6)$-féleképpen lehet sorba rendezni. (1 pont)

Az első tétel kétféle tárgyból választható, de a tárgyak sorrendje az első tétel kiválasztása után már adott. (1 pont)

A különböző sorrendek száma: $2\cdot\binom{28}{3}\cdot 3!\cdot\binom{30}{3}\cdot 3!$. (1 pont)

Vagyis Nóri összesen **957640320**-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét. (1 pont)

Összesen: 17 pont

29) Hány kételemű részhalmaza van a $\{2;3;5;7;11\}$ halmaznak? (2 pont)

***Megoldás*:**

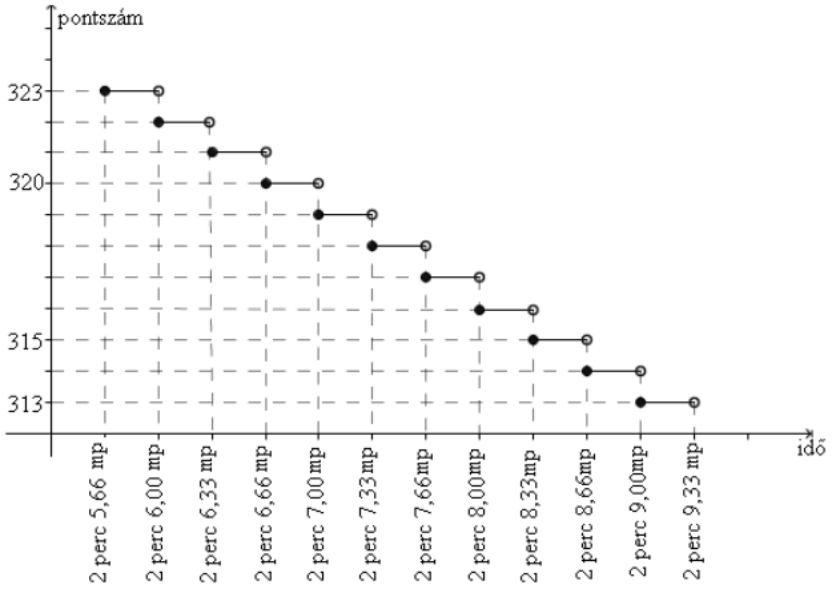
Hogy az adott halmaznak hány kételemű részhalmaza van, egyenlő azzal, ahányféleképpen a halmaz elemeiből kiválaszthatunk 2 elemet úgy, hogy a sorrend nem számít. Vagyis ez ismétlés nélküli kombináció, az összes lehetséges kiválasztási mód pedig $\binom{5}{2}=10$, így **10 db** kételemű részhalmaza van a megadott halmaznak. (2 pont)

Összesen: 2 pont

30) Egy öttusaversenyen 31 résztvevő indult. A vívás az első szám, ahol mindenkivel egyszer mérkőzik meg. Aki 21 győzelmet arat, az 250 pontot kap. Aki ennél több győzelmet arat, az minden egyes további győzelemért 7 pontot kap a 250 ponton felül. Aki ennél kevesebbszer győz, attól annyiszor vonnak le 7 pontot a 250-ből, ahány győzelem hiányzik a 21-hez. (A mérkőzések nem végződhetnek döntetlenre.)

a) Hány pontot kapott a vívás során Péter, akinek 5 veresége volt? (3 pont)

b) Hány győzelme volt Bencének, aki 215 pontot szerzett? (3 pont)



Az öttusa úszás számában 200 métert kell úszni. Az elért időeredményeként járó pontszámot mutatja a grafikon.

c) Jelölje meg az alábbi két kérdés esetén a helyes választ!

Hány pontot kapott Robi, akinek az időeredménye 2 perc 6,28 másodperc? (2 pont)

A: 320
B: 321
C: 322
D: 323

Péter 317 pontot kapott. Az alábbiak közül válassza ki Péter időeredményét!

A: 2 perc 7,00 mp
B: 2 perc 7,60 mp
C: 2 perc 7,80 mp
D: 2 perc 8,00 mp

Az öttusa lovaglás számában egy akadálypályán tizenkét különböző akadályt kell a versenyzőnek átugrania. Egy akadály a nehézsége alapján három csoportba sorolható: A, B vagy C típusú. Ádám a verseny előtti bemelegítéskor először az öt darab A, majd a négy darab B, végül a három darab C típusú akadályokon ugrat át, mindegyiken pontosan egyszer. Bemelegítéskor az egyes akadálytípusokon belül a sorrend szabadon megválasztható.

d) Számítsa ki, hogy a bemelegítés során hányféle sorrendben ugrathatja át Ádám a tizenkét akadályt! (4 pont)

***Megoldás*:**

a) Péter 30 mérkőzést játszott le, ebből 25-öt megnyert. (1 pont)
A 21 győzelemért megkapta a 250 pontot, a további 4 győzelemért pedig 7-7 pontot kapott, így az ő pontszáma összesen $250+7\cdot 4=$ **278**. (2 pont)

b) Bence nem kapta meg a 250 pontot, tehát 21-nél kevesebb győzelme volt. (1 pont)
Minden hiányzó győzelemért 7-7 pontot vontak le a 250-ből. Ez összesen $250-215=35$ pont, ebből következik, hogy (1 pont)
5-ször vontak le 7 pontot, vagyis **16** győzelmet aratott. (1 pont)

c) A grafikon leolvasása után a megoldás:
C : 322 és **2 perc 7,80 mp**. (1+1 pont)

d) Ádám az 5 db A akadályon 5!, a 4 db B akadályon 4! féleképpen, a 3 db C akadályon pedig 3! féleképpen tud átugrani. (2 pont)
Ez összesen $5! \cdot 4! \cdot 3!$, azaz **17280** lehetőség. (2 pont)

Összesen: 12 pont

31) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0{,}854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)
(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

***Megoldás*:**

a) A tigrisek száma minden évben az előző évinek $0{,}854$-szeresére csökken. (1 pont)
Így 2014 és 2016 között a tigrisek száma $0{,}854^2 \approx 0{,}73$-szorosára változik. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a számuk **27%**-kal csökken. (1 pont)

b) A feladat szövege alapján az alábbi egyenletet írhatjuk fel:
$3600 \cdot 0{,}854^x = 900$. (1 pont)
Az egyenlet megoldása $x \approx 8{,}78$. (3 pont)
Így 9 év múlva, azaz **2023**-ban várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökkenni. (1 pont)

c) A (I) és (II) miatt a kisebb kifutóba 3 vagy 4 tigris kerülhet. (1 pont)
Ha 3 tigris kerül a kisebb kifutóba, a (III) miatt (IV) miatt ez csak két nőstény és egy hím lehet. (1 pont)
Két nőstényt és egy hímet $\binom{5}{2} \cdot 4 = 40$-féleképpen lehet összesen kiválasztani. (2 pont)
Ha 4 tigris kerül a kisebb kifutóba, akkor (III) és (IV) miatt ez csak két nőstény és két hím lehet, őket $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$-féleképpen lehet kiválasztani. (2 pont)
Így összesen $40 + 60 = \mathbf{100}$ eset lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

32) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye különböző? (2 pont)

***Megoldás*:**

A százas helyiértékre 9 féle számjegyet írhatunk $(1;2;3;4;6;7;8;9)$, a tízes helyiértékre is 9 félét, mivel minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel, és egyet már kiválasztottunk, viszont a 0-t is választhatjuk. Az egyesek helyére pedig már csak 8 féle számjegyet írhatunk. Így összesen $9 \cdot 9 \cdot 8 = \mathbf{648}$ ilyen háromjegyű szám van. (2 pont)

Összesen: 2 pont

33) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle $6\,\text{cm}$, oldaléle $5\,\text{cm}$ hosszúságú. Egy szaküzletben $11\,\text{cm}$ oldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy $11\,\text{cm}$ oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

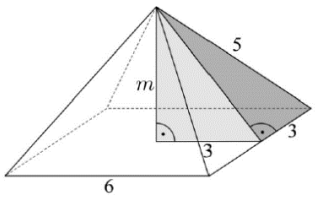
b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot" használ. Mindegyik fajta „varázskanóc" fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A gúla oldallap magasságának kiszámításához Pitagorasz-tételt írunk fel: $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, majd a gúla magasságához újra alkalmazzuk: $m = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \approx 2{,}65\,\text{cm}$. (3 pont)



Ezután kiszámoljuk a gúla térfogatát.

$V_{gúla} = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{7}}{3} = 12\sqrt{7} \approx 31{,}75\,\text{cm}^3$ (1 pont)

Egy kocka alakú tömb térfogata $V_{kocka} = 11^3 = 1331\,\text{cm}^3$, így egy kockából $\dfrac{1331}{31{,}75} \approx 41{,}9$, azaz **41** gyertya önthető ki. (3 pont)

b) Az alaplapot kétféleképpen lehet kiszínezni. (1 pont)
Az oldallapok lehetnek ugyanolyan színűek, mindegyik kék, vagy mindegyik zöld, ez összesen két eset. (1 pont)
Lehet három oldallap zöld és egy kék, vagy három oldallap kék és egy zöld, ez is összesen két eset. (1 pont)

Olyan festésből, amikor két oldallap zöld és két oldallap kék, szintén kétféle lehet, attól függően, hogy az ugyanolyan színű lapok szomszédosak vagy szemköztiek. (1 pont)
Az oldallapokat tehát hatféleképpen lehet kiszínezni, így összesen $2 \cdot 6 = \mathbf{12}$ különböző színezés készíthető. (2 pont)

c) Az első gyertya bármilyen színű lánggal éghet. (1 pont)
Annak, hogy a második gyertya más színű lánggal ég, $\frac{4}{5}$ a valószínűsége. (1 pont)
Annak, hogy a harmadik gyertya más színű lánggal ég, mint az első kettő, $\frac{2}{4}$ a valószínűsége. (1 pont)
Ekkor a kérdéses valószínűség $P = 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5} = \mathbf{0,4}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

34)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! (5 pont)

$$(2x-3)^2 = x^2$$

b) Hány olyan (pozitív) háromjegyű páratlan szám van a tízes számrendszerben, amelynek minden számjegye különböző? (5 pont)

Megoldás:

a) A zárójelet felbontva: $4x^2 - 12x + 9 = x^2$ (1 pont)
Az egyenletet rendezve: $3x^2 - 12x + 9 = 0$ (1 pont)
$x_1 = \mathbf{1}$ és $x_2 = \mathbf{3}$ (2 pont)
Ellenőrzés… (1 pont)

b) A kérdéses számok utolsó számjegye ötféle lehet (1, 3, 5, 7 vagy 9). (1 pont)
Az első számjegy nem lehet 0, (1 pont)
és különböznie kell az utolsótól, így az utolsó számjegy rögzítése után nyolcféle lehet. (1 pont)
A második számjegy (amelynek különböznie kell az elsőtől és az utolsótól, azok rögzítése után) nyolcféle lehet. (1 pont)
A lehetőségek száma ezek szorzata, azaz: $8 \cdot 8 \cdot 5 = \mathbf{320}$. (1 pont)

Összesen: 10 pont

Koordinátageometria
Megoldások

1) Adott két pont: $A\left(-4;\frac{1}{2}\right)$ és $B\left(1;\frac{3}{2}\right)$ Írja fel az *AB* szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

AB felezőpontja legyen *F*. $F\left(\frac{-4+1}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right)=F\left(-\frac{3}{2};1\right)$ (2 pont)

2) Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a $B(-3;5)$ pont. írja fel a kör egyenletét! (2 pont)

Megoldás:

$(x+3)^2+(y-5)^2=16$, vagy $x^2+y^2+6x-10y+18=0$ (2 pont)

3) Írja fel a $(-2;7)$ ponton átmenő, $\underline{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét! (2 pont)

Megoldás:

$5x+8y=-10+56$ (1 pont)

$5x+8y=46$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

4) Adottak az $\underline{a}=(6;4)$ és az $\underline{a-b}=(11;5)$ vektorok. Adja meg a *b* vektort *a* koordinátával! (3 pont)

Megoldás:

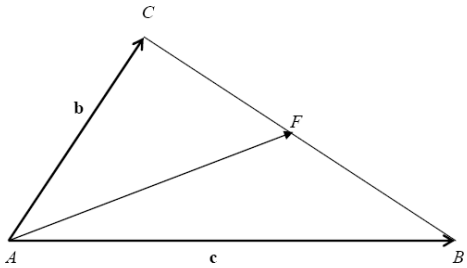
$6-b_1=11$ (1 pont)

$4-b_2=5$ (1 pont)

$\underline{b}(-5;-1)$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Az *ABC* háromszög két oldalának vektora $AB=\underline{c}$ és $AC=\underline{b}$. Fejezze ki ezek segítségével az *A* csúcsból a szemközti oldal *F* felezőpontjába mutató *AF* vektort! (2 pont)



Megoldás:

$\overrightarrow{AF}=\frac{\underline{b}+\underline{c}}{2}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

6) Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x=1$, valamint az $y=1$ egyenletű egyenesek.

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit! (2 pont)

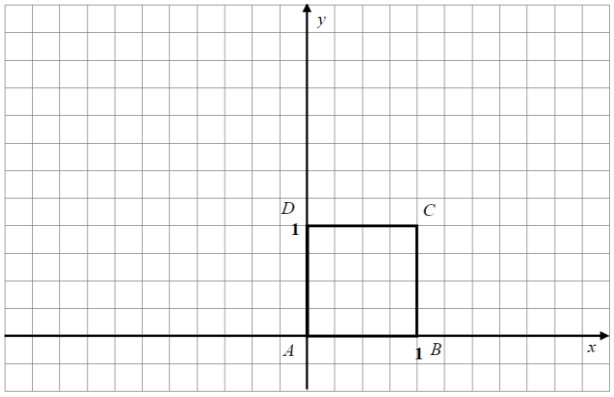
b) Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét! (5 pont)

c) Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének? (2 pont)

d) Az $y=-4x+2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát! (8 pont)

Megoldás:

a)



(1 pont)

A csúcspontok koordinátái: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$. (1 pont)

b) A kör középpontja: $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

A kör sugara: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2 pont)

A kör egyenlete: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. (2 pont)

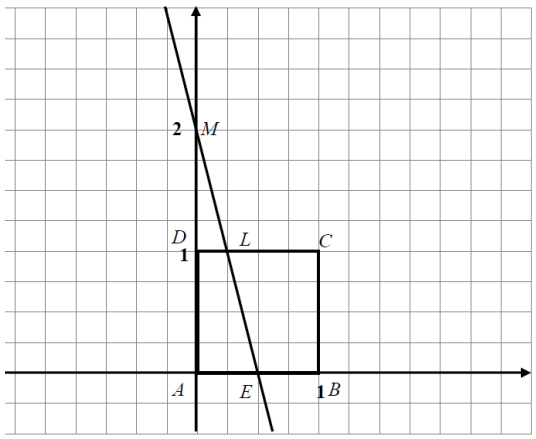
c) $K_{\text{négyzet}}=4$; $K_{\text{négyzet}}=2r\pi=\sqrt{2}\pi\approx 4,44$ (1 pont)

$\frac{4}{4,44}\approx 0,90$ vagyis **90%-a**. (1 pont)

d) L rajta van az $y=1$ és az $y=-4x+2$ egyenesek metszéspontján. (1 pont)

Így $L\left(\frac{1}{4};1\right)$, (1 pont)

ezért $DL=\frac{1}{4}$ (1 pont)



Az AEDL trapéz területe $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}\cdot 1=\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{3}{8}$ (2 pont)

Az EBCL trapéz területe $\frac{5}{8}$ (2 pont)

A két terület aránya 3 : 5 (1 pont)

Összesen: 17 pont

7) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;5)$ ponton és párhuzamos a $4x+5y=0$ egyenletű egyenessel! (3 pont)

Megoldás:

$4x+5y=$ **–13** (3 pont)

Összesen: 3 pont

8) Egy rombusz átlóinak hossza 12 és 20. Számítsa ki az átlóvektorok skalárszorzatát! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az átlóvektorok merőlegesek egymásra, ezért (1 pont)
a skalárszorzat értéke **0**. (2 pont)

Összesen: 3 pont

9)

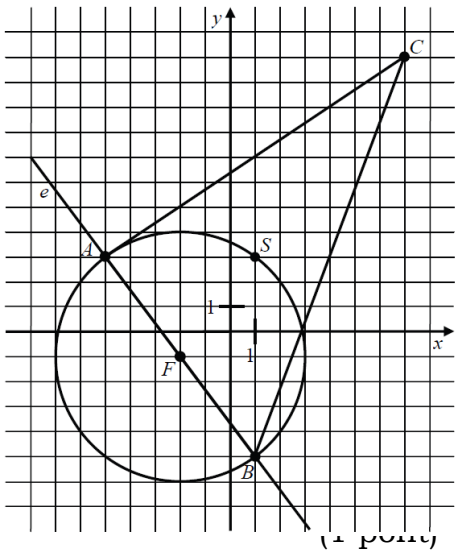
a) Ábrázolja koordináta-rendszerben az *e* egyenest, melynek egyenlete $4x+3y=-11$.
Számítással döntse el, hogy a $P(100;-36)$ pont rajta van-e az egyenesen! Az egyenesen levő *Q* pont ordinátája (második koordinátája) 107.
Számítsa ki a *Q* pont abszcisszáját (első koordinátáját)! (4 pont)

b) Írja fel az *AB* átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5;3)$ és $B(1;-5)$.
Számítással döntse el, hogy az $S(1;3)$ pont rajta van-e a körön! (7 pont)

c) Adja meg az *ABC* háromszög *C* csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az $S(1;3)$ pont a háromszög súlypontja! (6 pont)

Megoldás:

a) Mivel $4\cdot100+3\cdot(-136)\neq-11$ ezért a ***P* pont nincs az egyenesen**. (1 pont)
Az *e* egyenes ábrázolása. (1 pont)
A *Q* pontra: $4x+3\cdot107=-11$, (1 pont)
ahonnan a *Q* pont abszcisszája: $x=$ **–83**. (1 pont)



b) Az *AB* szakasz felezőpontja *F*. $F(-2;-1)$ (2 pont)
A kör sugara: $r=\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{(-2+5)^2+(-1-3)^2}=5$ (2 pont)
A kör egyenlete: $(x+2)^2+(y+1)^2=25$ (2 pont)
Mivel $(1+2)^2+(3+1)^2=25$ **ezért az *S* pont rajta van a körön**. (1 pont)

c) A *C* pont koordinátái: $(x_c;y_c)$
S koordinátáira felírható: $1=\frac{-5+1+x_c}{3}$; $3=\frac{3+(-5)+y_c}{3}$ (3 pont)
Ahonnan $x_c=7$, (1 pont)
$y_c=11$ (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{C(7;11)}$ (1 pont)

A feladat megoldható vektorműveletekkel is azt az összefüggést felhasználva, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópont.

Összesen: 17 pont

10) Fejezze ki az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektorok segítségével a $\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}$ vektort, ha $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$ és $\underline{b} = -\underline{i} + 5\underline{j}$! (3 pont)

Megoldás:

$\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}$; $\underline{c} = 2(3\underline{i} - 2\underline{j}) - (-\underline{i} + 5\underline{j})$ (1 pont)

$\underline{c} = 6\underline{i} - 4\underline{j} + \underline{i} - 5\underline{j}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\underline{c} = 7\underline{i} - 9\underline{j}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Az *ABCD* négyzet középpontja *K*, az *AB* oldal felezőpontja *F*. Legyen $\underline{a} = \overrightarrow{KA}$ és $\underline{b} = \overrightarrow{KB}$. Fejezze ki az *a* és *b* vektorok segítségével a $\overrightarrow{KF}$ vektort! (2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{\overrightarrow{KF} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}}$ (2 pont)

12) Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.

a) Számítsa ki az $y = -16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit! (8 pont)

b) Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)! (4 pont)

Megoldás:

a) A kör egyenlete $(x-9)^2 + (y+8)^2 = 100$ (2 pont)

Ebbe behelyettesítve az $y = -16$-ot:

$(x-9)^2 = 36$ (2 pont)

Az egyenlet megoldva: $x = 15$ vagy $x = 3$ (2 pont)

A közös pontok: $(15;-16)$ és $(3;-16)$ (2 pont)

b) Az érintő normálvektora az $\overrightarrow{AP}$ vektor. (1 pont)

$\overrightarrow{AP} = (-8;6)$ (1 pont)

Az érintő egyenlete $\boldsymbol{4x - 3y = 10}$ (1 pont)

Az érintő iránytangense $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) Az $A(-7;12)$ pontot egy $\underline{r}$ vektorral eltolva a $B(5;8)$ pontot kapjuk. Adja meg az $\underline{r}$ vektor koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

A keresett vektor: $\underline{r} = (12;-4)$. (2 pont)

14) Jelölje X-szel a táblázatban, hogy az alábbi koordináta-párok közül melyikek adják meg a 300°-os irányszögű egységvektor koordinátáit és melyikek nem!

	IGEN	**NEM**
$e\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$		
$e\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)$		

(4 pont)

Megoldás:

	IGEN	NEM
$e\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		**X**
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$		**X**
$e\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	**X**	
$e\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)$	**X**	

(4 pont)

15) Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát! Határozza meg a két vektor által bezárt szöget!

$\underline{a}(5;8)$ $\underline{b}(-40;25)$ (3 pont)

Megoldás:

A két vektor skaláris szorzata **0**. (2 pont)
A két vektor szöge **derékszög**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

16) Adott az $x^2+y^2-6x+8y-56=0$ egyenletű kör és az $x-8,4=0$ egyenletű egyenes.

a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit! (6 pont)

b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől? (5 pont)

Egy 9 cm sugarú kört egy egyenes két körívre bont. Az egyenes a kör középpontjától 5,4 cm távolságban halad.

c) Számítsa ki a hosszabb körív hosszát! (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (6 pont)

Megoldás:

a) Megoldandó az $x^2+y^2-6x+8y-56=0 \ \wedge \ x=8,4$ egyenletrendszer. (1 pont)

Behelyettesítés után: $y^2+8y-35,84=0$ (1 pont)

amelyből $y=3,2$ vagy $y=-11,2$. (2 pont)

Két közös pont van: $\boldsymbol{P_1(8,4;3,2)}$, $\boldsymbol{P_1(8,4;-11,2)}$ (2 pont)

b) A kör egyenlete átalakítva: $(x-3)^2+(y+4)^2=81$ (1 pont)

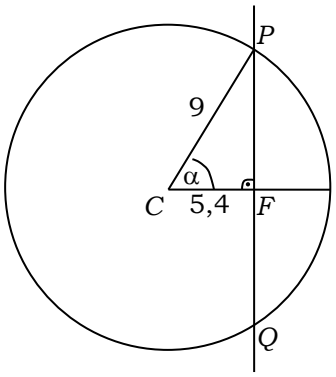
A kör középpontja $C(3;-4)$ (és sugara 9) (1 pont)

Az egyenes párhuzamos az ordinátatengellyel, (1 pont)

ezért a $C(3;-4)$ pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontja $T(8,4;-4)$ (1 pont)

Az egyenes $\boldsymbol{TC}=8,4-3=\boldsymbol{5,4}$ egység távolságra van a kör középpontjától. (1 pont)

c) Helyes ábra (1 pont)



A *CFP* derékszögű háromszögből: $\cos\alpha=\frac{5,4}{9}=0,6$ (1 pont)

tehát $\alpha\approx 53,13^\circ$ (1 pont)

A *PQ* hosszabb körívhez tartozó középponti szög $360^\circ-2\alpha\approx 253,74^\circ$ (1 pont)

A körív hossza:

$\frac{2\cdot 9\cdot\pi\cdot 253,74}{360}\approx 39,9$ (1 pont)

A hosszabb *PQ* körív hossza kb. **39,9 cm**. (1 pont)

A feladat megoldható a rövidebb PQ körívhez tartozó 2α középponti szög kiszámításával, majd ebből a körív hosszának meghatározásával is.

Összesen: 17 pont

17) Az *ABC* háromszög csúcspontjainak koordinátái: $\boldsymbol{A(0;0)}$, $\boldsymbol{B(-2;4)}$, $\boldsymbol{C(4;5)}$.

a) Írja fel az *AB* oldal egyenesének egyenletét! (2 pont)

b) Számítsa ki az *ABC* háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg! (7 pont)

c) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét! (3 pont)

Megoldás:

a) Az egyenes átmegy az origón $m=\frac{4}{-2}=-2$, (1 pont)

Egyenlete: $\boldsymbol{y=-2x}$ (1 pont)

b) A háromszög legnagyobb szöge a legnagyobb oldallal szemben van (vagy mindhárom szöget kiszámolja). (1 pont)

Az oldalhosszúságok: $AB=\sqrt{20}$, $AC=\sqrt{41}$, $BC=\sqrt{37}$. (2 pont)

Az *AC*-vel szemben levő szög legyen β.

Alkalmazva a koszinusztételt: (1 pont)

$41 = 20 + 37 - 2\sqrt{20 \cdot 37}\cos\beta$ (1 pont)

$\cos\beta \approx 0,2941$, (1 pont)

$\beta \approx \mathbf{72,9}^\circ$ (1 pont)

c) A háromszög egy területképlete: $t = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\beta}{2}$ (1 pont)

$t = \frac{\sqrt{20 \cdot 37} \cdot \sin 72,9^\circ}{2}$. (1 pont)

A háromszög területe **13** (területegység). (1 pont)

Összesen: 12 pont

18) Három egyenes egyenlete a következő (*a* és *b* valós számokat jelölnek):

$e: y = -2x + 3$

$f: y = ax - 1$

$g: y = bx - 4$

Milyen számot írjunk az *a* helyére, hogy az *e* és *f* egyenesek párhuzamosak legyenek?
Melyik számot jelöli *b*, ha a *g* egyenes merőleges az *e* egyenesre? (3 pont)

Megoldás:

$a = -2$ (1 pont)

$b = \frac{1}{2}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

19) Egy kör az $(1;0)$ és $(7;0)$ pontokban metszi az *x* tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A középpont a húr felező merőlegesén van, (1 pont)
így az első koordinátája 4. (1 pont)
A középpont: $O(4;4)$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

20) Az *ABC* háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(3;2)$ és $C(0;0)$.

a) Számítsa ki az *ABC* háromszög szögeit! (5 pont)
b) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (7 pont)

Megoldás:

a) Az *ABC* háromszög egyenlő szárú. (1 pont)

Az *AB* alapon fekvő hegyesszögek tangense $\frac{2}{3}$ (2 pont)

tehát az alapon fekvő szögek nagysága **33,7°**, (1 pont)
a szárak szöge pedig **112,6°**. (1 pont)

b) A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek közös pontja, ez a szimmetria miatt az ordinátatengelyen van. (1 pont)

Az *AC* oldal felezőmerőlegese átmegy a $(-1,5;1)$ felezőponton. (1 pont)

Az *AC* oldal felezőmerőlegesének egy normálvektora a *CA*, (1 pont)

$CA(-3;2)$. (1 pont)

Az AC oldal felezőmerőlegesének egyenlete:
$-3x+2y=6,5$. (1 pont)

Ez az y tengelyt a $(0;3,25)$ pontban metszi (ez a körülírt kör középpontja).

A kör sugara 3,25. (1 pont)

A körülírt kör egyenlete: $\boldsymbol{x^2+(y-3,25)^2=3,25^2}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

21) Adott két egyenes: $\boldsymbol{e: 5x-2y=-14,5}$, $\boldsymbol{f: 2x+5y=14,5}$.

a) Határozza meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit! (4 pont)

b) Igazolja, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek! (4 pont)

c) Számítsa ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét! (4 pont)

Megoldás:

a) (A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a P koordinátáit.)

Az első egyenletből: $y=2,5x+7,25$. (1 pont)

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe és rendezve $x=-1,5$. (1 pont)

$y=3,5$ (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{P(-1,5;3,5)}$. (1 pont)

b) Az egyenesek meredeksége: $m_e=-\frac{5}{2}$ (1 pont)

$m_f=-\frac{2}{5}$ (1 pont)

A meredekségek szorzata –1, (1 pont)

tehát a két egyenes **merőleges**. (1 pont)

A feladat megoldható a normálvektorok skaláris szorzatát megvizsgálva is.

c) Az e egyenes meredeksége 2,5, tehát az egyenes x tengellyel bezárt α szögére igaz, hogy $\operatorname{tg}\alpha=2,5$. (3 pont)

Ebből $\boldsymbol{\alpha=68,2^\circ}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $2x-y=5$ egyenletű f egyenessel és áthalad a $P(3;-2)$ ponton! Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

Az f egyenes meredeksége 2, így az e egyenes meredeksége is 2.

$m(x-x_0)=y-y_0$

$\boldsymbol{y=2x-8}$ (2 pont)

23) Adja meg az $(x+2)^2+y^2=9$ egyenletű kör K középpontjának koordinátáit és sugarának hosszát! (3 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{K(-2;0)}$ (2 pont)

$\boldsymbol{r=3}$ (1 pont)

Összesen: (3 pont)

24) Adja meg a $2x+y=4$ egyenletű egyenes és az x tengely M metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét! **(3 pont)**

Megoldás:

A metszéspont $M(2;0)$. (2 pont)

Az egyenes meredeksége -2. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) A PQR háromszög csúcsai: $P(-6;-1)$, $Q(6;-6)$ és $R(2;5)$.

a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét! **(5 pont)**

b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát! **(7 pont)**

Megoldás:

a) A kérdéses súlyvonalra a P csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik. (1 pont)

A QR szakasz felezőpontja $F(4;-0,5)$. (1 pont)

A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{PF}(10;0,5)$. (1 pont)

A súlyvonal egyenlete: $x-20y=14$. (2 pont)

b) (A kérdéses szöget a háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni.) Az oldalvektorok $PQ(12;-5)$ és $PR(8;6)$. (2 pont)

A két vektor skalárszorzata a koordinátákból: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=12\cdot 8+(-5)\cdot 6=66$ (1 pont)

Az oldalvektorok hossza $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=13$ és $\left|\overrightarrow{PR}\right|=10$ (1 pont)

A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\right)=66=13\cdot 10\cdot\cos\alpha$,

ahol α a két vektor által bezárt szöget jelöli. (1 pont)

Innen: $\cos\alpha\approx 0,5077$ (1 pont)

$\alpha=59,5°$ (mivel $0°<\alpha<180°$) (1 pont)

Összesen: 12 pont

26) Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2;-1)$, $B(9;-3)$, és $C(-3;6)$.

a) Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét! **(3 pont)**

b) Számítsa ki a BC oldallal párhuzamos középvonal hosszát! **(3 pont)**

c) Számítsa ki a háromszögben a C csúcsnál lévő belső szög nagyságát! **(6 pont)**

Megoldás:

a) A BC oldalegyenes egy irányvektora a $\overrightarrow{BC}(-12;9)$ vektor. (1 pont)

Ezzel az egyenes egyenlete: $9x+12y=9\cdot 9+12\cdot(-3)$, (1 pont)

azaz: $9x+12y=45$ $(3x+4y=15)$. (1 pont)

b) A BC oldallal párhuzamos középvonal hossza fele a BC oldal hosszának. (1 pont)

A BC oldal hossza: $\sqrt{12^2+(-9)^2}=15$ (1 pont)

A középvonal hossza: $7,5$. (1 pont)

c) Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB=\sqrt{125}$, $BC=15$, $AC=\sqrt{50}$. (2 pont)

A C csúcsnál lévő belső szöget jelölje γ. Alkalmazva a koszinusztételt: (1 pont)

$125=225+50-2\cdot 15\cdot\sqrt{50}\cdot\cos\gamma$ (1 pont)

$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\approx 0,7071\right)$ (1 pont)

(Mivel $0°<\gamma<180°$, így) γ **= 45°** (1 pont)

Összesen: 12 pont

27) Tekintsük a koordinátarendszerben adott $A(6;9)$, $B(-5;4)$ és $C(-2;1)$ pontokat!

a) Mekkora az *AC* szakasz hossza? (2 pont)

b) Írja fel az *AB* oldalegyenes egyenletét! (4 pont)

c) Igazolja (számítással), hogy az *ABC* háromszög *C* csúcsánál derékszög van! (6 pont)

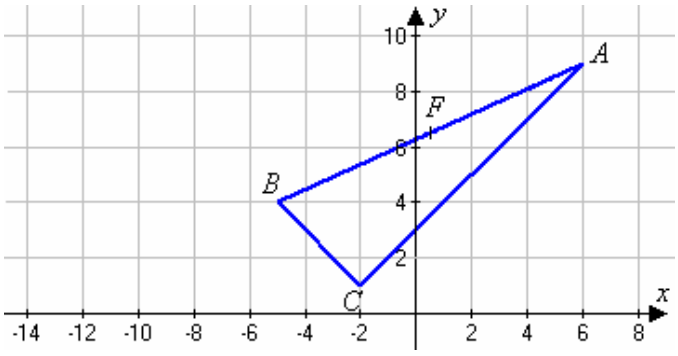
d) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (5 pont)

Megoldás:

a) $\overrightarrow{AC}(-8;-8)$

$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-8)^2+(-8)^2}=\sqrt{128}=$

$\mathbf{8\cdot\sqrt{2}\approx 11,31}$ (2 pont)



b) $\overrightarrow{AB}=\underline{v}(-11;-5)$

$\underline{n}(-5;11)$

$m=\frac{5}{11}$ (2 pont)

Az AB egyenes egyenlete: $\mathbf{-5x+11y=69}$ vagy $\boldsymbol{y=\frac{5}{11}x+\frac{69}{11}}$ (2 pont)

c) A $\overrightarrow{CB}(-3;3)$ (1 pont)

$\overrightarrow{CA}(8;8)$ (1 pont)

A vektorok skaláris szorzata: $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=-3\cdot 8+8\cdot 3=0$ (2 pont)

Mivel a két vektor skaláris szorzata 0, a két vektor merőleges egymásra, azaz **a C csúcsnál derékszög van**. (2 pont)

d) Mivel derékszögű a háromszög, Thalész tétele alapján a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó fele. (1 pont)

$F(0,5;6,5)$ (2 pont)

A kör sugara: $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{146}}{2}\approx 6,04$ (1 pont)

A kör egyenlete: $\mathbf{(x-0,5)^2+(y-6,5)^2=36,5}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

28) Adottak az $\underline{a}(4;3)$ és $\underline{b}(-2;1)$ vektorok.

a) Adja meg az $\underline{a}$ hosszát! (2 pont)

b) Számítsa ki az $\underline{a}+\underline{b}$ koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

a) $\underline{a} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \mathbf{5}$ (2 pont)

b) $\underline{a} + \underline{b} = (4 + (-2); 3 + 1) = \mathbf{(2;4)}$ (2 pont)

29) Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör.

a) Állapítsa meg, hogy az $A(7;7)$ pont illeszkedik-e a körre! (2 pont)

b) Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát! (5 pont)

c) Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű körön. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit! (10 pont)

Megoldás:

a) $49 + 49 + 14 - 14 - 47 \neq 0$ **Tehát a pont nem illeszkedik a körre.** (2 pont)

b) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 49$ (3 pont)

$\boldsymbol{K = (-1;1)}$ $\boldsymbol{r = 7}$ (2 pont)

c) A háromszög harmadik csúcsa az alap felezőmerőlegesén van. (1 pont)

Az AB oldal felezőpontja: $F(3,5;3,5)$ (1 pont)

Az AB oldal felezőmerőlegesének normálvektora $\underline{n}(7;7)$ (1 pont)

A felezőmerőleges egyenlete $x + y = 7$. (1 pont)

A háromszög harmadik csúcsát a kör és a felezőmerőleges metszéspontja adja: $\left.\begin{matrix}(x+1)^2 + (y-1)^2 = 49 \\ y = 7 - x\end{matrix}\right\}$ (1 pont)

$x^2 - 5x - 6 = 0$ $x_1 = 6$ $x_2 = -1$ (3 pont)

$y_1 = 1$ $y_2 = 8$ (1 pont)

$\boldsymbol{C_1 = (6;1)}$ $\boldsymbol{C_2 = (-1;8)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

30) Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1;-3)$ és $B(7;-1)$.

a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét! (4 pont)

b) Számítással igazolja, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát! (4 pont)

Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra.

c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A-tól különböző) metszéspontjának koordinátáit! (9 pont)

Megoldás:

a) $\overrightarrow{AB}(6;2)$ (1 pont)

Az e egyenes egy normálvektora: $\underline{n}(1;-3)$, (1 pont)

egyenlete: $x - 3y = 7 - 3 \cdot (-1) \Rightarrow$ (1 pont)

$\Rightarrow \boldsymbol{x - 3y = 10}$ (1 pont)

b) *A* pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:
$1^2+(-3)^2-6\cdot 1-2\cdot(-3)=10$, tehát az *A* pont illeszkedik a *k* körre. (1 pont)
B pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:
$7^2+(-1)^2-6\cdot 7-2\cdot(-1)=10$, tehát a *B* pont illeszkedik a *k* körre. (1 pont)
Az *AB* húr hossza $\sqrt{(7-1)^2+(-1+3)^2}=$ (1 pont)
$=\sqrt{\mathbf{40}}\,(\approx \mathbf{6,32})$. (1 pont)

c) Az *f* egyenes egy normálvektora: $\underline{n}(3;1)$ (1 pont)
Az *f* egyenes egyenlete $3x+y=0$. (2 pont)
A metszéspont koordinátáit a *k* kör és az *f* egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk. (1 pont)
Az *f* egyenes egyenletéből $y=-3x$. (1 pont)
Ezt a kör egyenletébe helyettesítve:
$x^2+9x^2-6x-2\cdot(-3x)=10$. (1 pont)
Egyszerűsítés után adódik: $x^2=1$. (1 pont)
Ennek (az 1-től különböző) megoldása $x=-1$. (1 pont)
Így a keresett pont: $\boldsymbol{C(-1;3)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

31) Adott az $A(5;2)$ és a $B(-3;-2)$ pont.

a) Számítással igazolja, hogy az *A* és *B* pontok illeszkednek az $x-2y=1$ egyenletű *e* egyenesre! (2 pont)

b) Írja fel az *AB* átmérőjű kör egyenletét! (5 pont)

c) Írja fel annak az *f* egyenesnek az egyenletét, amely az *AB* átmérőjű kört a *B* pontban érinti! (5 pont)

Megoldás:

a) $5-2\cdot 2=$ **1** (igaz) (1 pont)
$(-3)-2\cdot(-2)=$ **1** (igaz) (1 pont)

b) A kör középpontja az *AB* szakasz *C* felezőpontja, (1 pont)
ennek koordinátái $(1;0)$. (1 pont)
A kör sugara az *AC* szakasz, (1 pont)
ennek hossza $\sqrt{20}$. (1 pont)
A kör egyenlete: $\boldsymbol{(x-1)^2+y^2=20}$. (1 pont)

c) Az *f* merőleges az *AB* szakaszra. (1 pont)
Az *f* egy normálvektora a $\overrightarrow{BA}$ vektor, (1 pont)
ennek koordinátái $(8;4)$ (1 pont)
Az *f* egyenlete: $8x+4y=8\cdot(-3)+4\cdot(-2)$ (1 pont)
azaz $\boldsymbol{8x+4y=-32}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

32) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $(1;-3)$ ponton és egyik normálvektora a $(8;1)$ vektor! (2 pont)

***Megoldás*:**

$8x + y$ (1 pont)
$= 5$ (1 pont)
Összesen: 2 pont

33) Egy kör érinti az y tengelyt. A kör középpontja a $K(-2;3)$ pont. Adja meg a kör sugarát, és írja fel az egyenletét! (3 pont)

Megoldás:

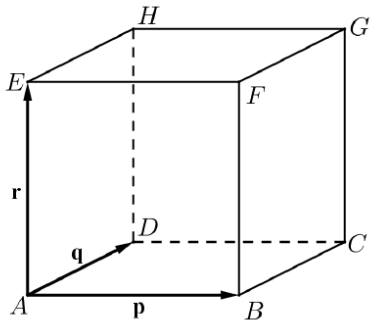
A kör sugara: $r = 2$, (1 pont)
egyenlete: $(x+2)^2 + (y-3)^2 =$ (1 pont)
$= 4$ (1 pont)
Összesen: 3 pont

34) Egy kör egyenlete $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Adja meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör átmérőjének hosszát! (3 pont)

Megoldás:

A kör középpontja $(-3;4)$. (1 pont)
A kör átmérője **10**. (2 pont)
Összesen: 3 pont

35) Az ábrán látható kocka A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB} = \underline{p}$; $\overrightarrow{AD} = \underline{q}$ és $\overrightarrow{AE} = \underline{r}$. Fejezze ki $\underline{p}$, $\underline{q}$, és $\underline{r}$ segítségével a $\overrightarrow{GC}$, az $\overrightarrow{AG}$ és az $\overrightarrow{FH}$ vektorokat! (3 pont)



Megoldás:

$\overrightarrow{GC} = -\underline{r}$ (1 pont)
$\overrightarrow{AG} = \underline{p} + \underline{q} + \underline{r}$ (1 pont)
$\overrightarrow{FH} = \underline{q} - \underline{p}$ (1 pont)
Összesen: 3 pont

36) Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! (3 pont)

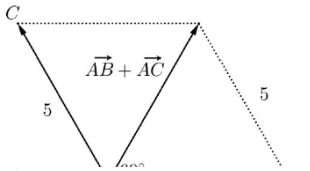
b) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! (4 pont)

A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4;-3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7;1)$ pont. Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának.

c) Adja meg a P; az R és az S csúcsok koordinátáit! (10 pont)

***Megoldás*:**

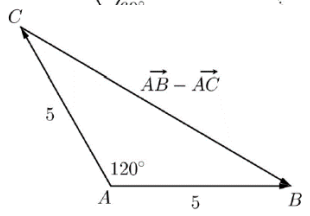
a) Ábra. (1 pont)



Az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ és az $\overrightarrow{AB}$ vektorok egy olyan egyenlő szárú háromszög két oldalát határozzák meg, amelynek egyik szöge 60°-os, így a háromszög szabályos. (1 pont)

Az összegvektor hossza ezért **5 egység**. (1 pont)

b) Ábrázoljuk a $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ vektort. (1 pont)



Az így kapott háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt. (1 pont)

$\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\cos120^\circ}\approx$ **8,66 egység.**

(1 pont)

c) A rombusz átlói felezik egymást a K pontban, így a K pont a TR átló felezőpontja. Ezt kihasználva megkaphatjuk az $R(x_R;y_R)$ pont koordinátáit.

$\frac{7+x_R}{2}=4$, illetve $\frac{1+y_R}{2}=-3$. (1 pont)

Ebből $x_R=1$ és $y_R=-7$, tehát $\boldsymbol{R(1;-7)}$. (1 pont)

A $\overrightarrow{KT}(3;4)$ vektort 90°-kal elforgatva megkapjuk a $(-4;3)$ vektort. (3 pont)

Ennek kétszerese a $\overrightarrow{KP}(-8;6)$ vektor, amelynek ellentettje a $\overrightarrow{KS}(8;-6)$ vektor. (2 pont)

A K pont koordinátáihoz adva ezeknek a vektoroknak a megfelelő koordinátáit, megkapjuk a hiányzó csúcsok koordinátáit. (1 pont)

Ebből $\boldsymbol{P(-4;3)}$ és $\boldsymbol{S(12;-9)}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

37)

a) Az *ABC* háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja azorigó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit! (3 pont)

b) Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely –3-hoz –1-et és 3-hoz 7-et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x\mapsto ax+b$ alakban adja meg!) (5 pont)

c) Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az *AB* szakasz! (9 pont)

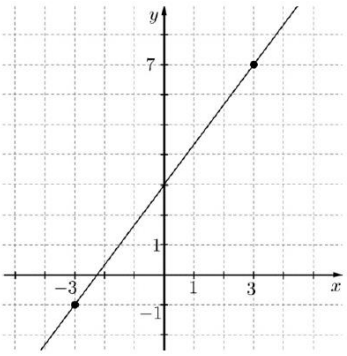
***Megoldás*:**

a) A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, a $C(c_1;c_2)$ pont koordinátáira felírhatóak az alábbi egyenletek. (1 pont)

$0=\frac{-3+3+c_1}{3}$, amelyre $\boldsymbol{c_1=0}$ (1 pont)

$0=\frac{-1+7+c_2}{3}$, amelyre $\boldsymbol{c_2=-6}$ (1 pont)

b) A függvény képe egy egyenes, meredeksége $m = \frac{7-(-1)}{3-(-3)} = \frac{4}{3}$. (2 pont)



A $(3;7)$ ponton átmenő $\frac{4}{3}$ meredekségű egyenes egyenlete pedig $y-7=\frac{4}{3}(x-3)$, így a hozzárendelés szabálya $\boldsymbol{x \mapsto \frac{4}{3}x+3}$. (3 pont)

c) Jelöljük a kérdéses pontot P-vel! Mivel a P pont az x tengelyen van, így a második koordinátája 0. (1 pont)

Ha $P(x;0)$, akkor $\overrightarrow{PA}=(-3-x;-1)$ és $\overrightarrow{PB}=(3-x;7)$. (2 pont)

$\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok skaláris szorzata 0. (1 pont)

$(-3-x)\cdot(3-x)+(-1)\cdot 7=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-9-7=0$, amelynek gyökei $x_1=4$ és $x_2=-4$. (4 pont)

Tehát a feladatnak két megoldása van, $\boldsymbol{P_1(4;0)}$ és $\boldsymbol{P_2(-4;0)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

38) Adott két pont a koordinátasíkon: $A(2;6)$ és $B(4;-2)$.

a) Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (6 pont)

b) Írja fel az A ponton átmenő, B középpontú kör egyenletét! (4 pont)

Adott z $y=3x$ egyenletű és az $x^2+8x+y^2-4y=48$ egyenletű kör.

c) Adja meg koordinátáikkal az egyenes és a kör közös pontjait! (7 pont)

Megoldás:

a) Az AB szakasz felezőpontja:

$F_{AB}=\left(\frac{2+4}{2};\frac{6+(-2)}{2}\right)=(3;2)$ (2 pont)

A felezőmerőleges egy normálvektora: $n=\overrightarrow{AB}=(2;-8)$ (2 pont)

Az egyenes egyenlete: $\boldsymbol{2x-8y=-10}$ (2 pont)

b) $AB=\sqrt{(4-2)^2+((-2)-6)^2}=\sqrt{2^2+(-8)^2}=\sqrt{68}$ (2 pont)

A kör egyenlete: $\boldsymbol{(x-4)^2+(y+2)^2=68}$ (2 pont)

c) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} y&=3x \\ x^2+8x+y^2-4y&=48 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenletből y-t a másodikba helyettesítve $x^2+8x+9x^2-12x-48=0$ (1 pont)

$10x^2-4x-48=0$ (1 pont)

$x_1=-2 \quad x_2=2{,}4$ (2 pont)

$y_1=-6 \quad y_2=7{,}2$ (1 pont)

A közös pontok: $\boldsymbol{P(-2;-6)}$ és $\boldsymbol{Q(2{,}4;7{,}2)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

39) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $4x + y = 17$ egyenletű e egyenes, továbbá az e egyenesre illeszkedő $C(2;9)$ és $T(4;1)$ pont. Az A pont az origóban van.

a) Igazolja, hogy az ATC szög derékszög! (4 pont)

Az A pont e egyenesre vonatkozó tükörképe a B pont.

b) Számítsa ki a B pont koordinátáit! (4 pont)

c) Határozza meg az ABC egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontjának koordinátáit! (9 pont)

Megoldás:

a) Az ATC háromszög oldalainak hossza:
$AT = \sqrt{17}$, $CT = \sqrt{68}$, $AC = \sqrt{85}$. (2 pont)

Mivel $\left(\sqrt{17}\right)^2 + \left(\sqrt{68}\right)^2 = \left(\sqrt{85}\right)^2$ teljesül, (1 pont)

így a (Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) a **kérdéses szög valóban derékszög**. (1 pont)

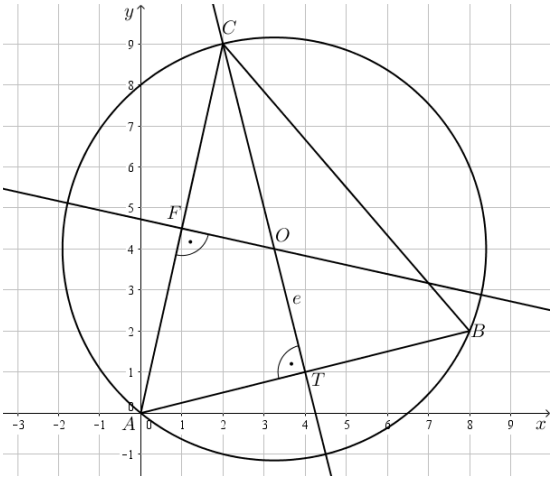
b) Mivel az ATC szög derékszög, ezért az A pontból az e egyenesre bocsátott merőleges talppontja a T pont, (1 pont)

ezért a T pont felezi az AB szakaszt. (1 pont)

Így $B(b_1;b_2)$ koordinátáira $\frac{0+b_1}{2} = 4$ és $\frac{0+b_2}{2} = 1$. (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{B(8;2)}$ (1 pont)

c) Az ABC háromszög körülírt körének középpontja az e egyenesnek és az AC szakasz f felezőmerőlegesének metszéspontja. (1 pont)



Jelölje F az AC szakasz felezőpontját. Ekkor $F(1;4,5)$. (1 pont)

Az f egyenes egy normálvektora: $\overrightarrow{AC}(2;9)$. (1 pont)

f egyenlete: $2x + 9y = 42,5$. (2 pont)

A kör középpontjának $(x;y)$ koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 9y &= 42,5 \\ 4x + y &= 17 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenlet 2-szereséből kivonva a második egyenletet:
$17y = 68$. (1 pont)

amiből $y = 4$, majd $x = 3,25$. (1 pont)

Tehát a körülírt kör középpontja: $\boldsymbol{O(3,25;4)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

Logika, gráfok
Megoldások

1) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.
Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.

a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)

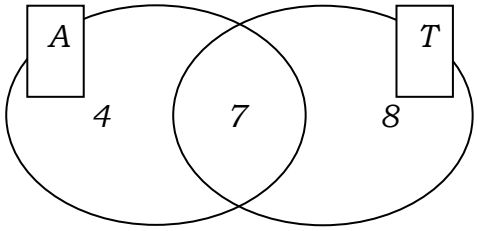
Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

b) A feladat szövege alapján töltse ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)

c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

Megoldás:

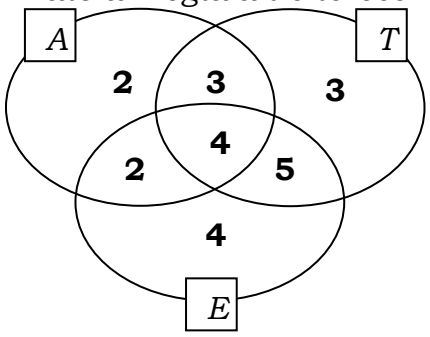


a) (2 pont)

Legalább az egyikük által észrevett eltérések száma: $4+7+8=19$ (1 pont)

Egyikük sem vett észre $23-19=\mathbf{4}$ eltérést. (1 pont)

(Halmazábra nélkül is felírható a megtalált eltérések száma.)



b) (7 pont)

c) **Van olyan eltérés, amit Enikő nem talált meg**.
VAGY: **Enikő nem minden eltérést talált meg**.
VAGY: **Enikő nem találta meg az összes eltérést**. (2 pont)

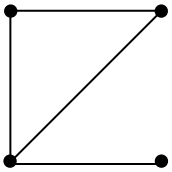
d) A kedvező esetek száma: 14. (1 pont)

Az összes esetek száma: 23. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{14}{23} \approx \mathbf{0,61}$ vagy 61 %. (2 pont)

Összesen: 17 pont

2) Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsokból 3; 2; 2; 1 él indul. Hány éle van a gráfnak? (2 pont)

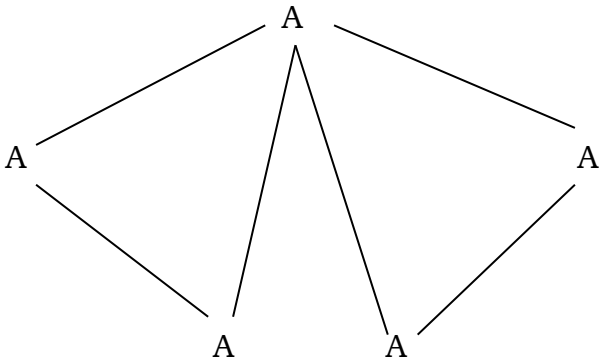


Megoldás:

Egy lehetséges ábrázolás:
A gráfnak **4 éle** van. (ábra nélkül is jár a 2 pont) (2 pont)

3) Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!
(3 pont)

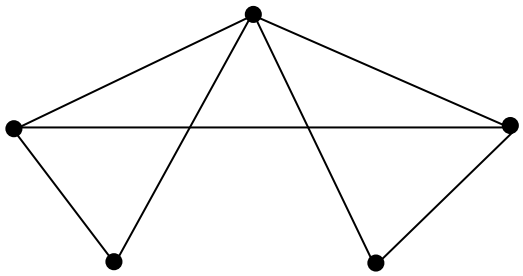
Megoldás:



(3 pont)

4) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2! (2 pont)

Megoldás:



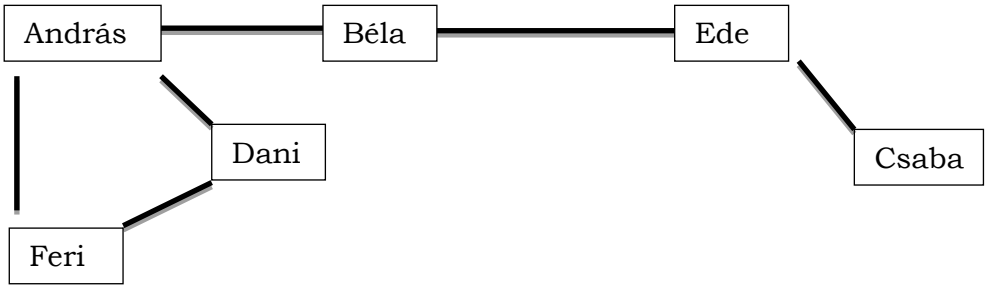
(2 pont)
Összesen: 2 pont

5) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket! (4 pont)
b) Hány mérkőzés van még hátra? (3 pont)
c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez? (5 pont)

Megoldás:

a)



(4 pont)

b) Ha mindenki mindenkivel egyszer játszik, akkor a mérkőzések száma $\binom{6}{5} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (2 pont)

6 mérkőzést már lejátszottak, **ezért 9 mérkőzés van még hátra.** (1 pont)

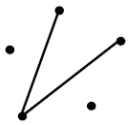
c) Ha Dani az első helyen végez, akkor a többiek $5! = 120$-féleképpen „követhetik”. (2 pont)

Ugyanennyi lehetőség van akkor is, ha Dani második. (2 pont)

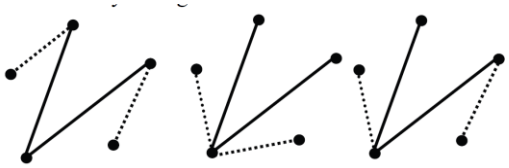
Így a kérdéses lehetőségek száma: **240**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült. Rajzolja be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton! (2 pont)



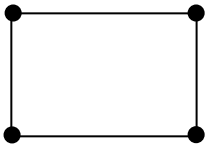
Megoldás:



(2 pont)

7) Egy négytagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltessen gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.) (2 pont)

Megoldás:



Például: (2 pont)

8) Egy baráti társaság minden tagja írt egy-egy SMS üzenetet a társaság minden további tagjának. Így mindenki 11 üzenetet írt. Hány SMS-t írtak egymásnak összesen a társaság tagjai? (2 pont)

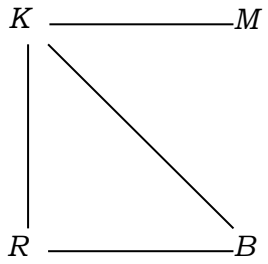
Megoldás:

A társaság 12 tagú. (1 pont)

132 SMS-t írtak összesen. (1 pont)

9) A diákönkormányzat újonnan választott négytagú vezetősége: Kata, Mari, Réka és Bence. Közülük Kata három, Réka és Bence pedig két-két vezetőségi tagot ismert korábbról. Mari a négyes csoportnak csak egy tagját ismerte. (Az ismeretségek kölcsönösek.)
Rajzolja fel a négytagú vezetőség választás előtti ismeretségi gráfját!
(2 pont)

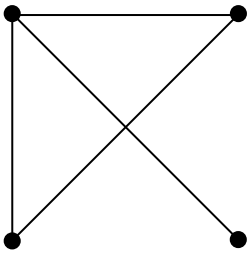
Megoldás:



(2 pont)
Összesen: 2 pont

10) Rajzoljon le egy 4 pontú egyszerű gráfot, amelyben a pontok fokszáma rendre 3, 2, 2, 1! (2 pont)

***Megoldás*:**



(2 pont)

11) Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

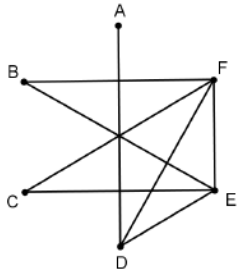
a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját! (4 pont)

b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!) (6 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket! (7 pont)

Megoldás:

a) Az egyik lehetséges megoldás (a résztvevőket nevük kezdőbetűjével jelölve):
(4 pont)



b) Ha Andi egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta volna, akkor például Feri eddigi mérkőzéseit Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszotta volna. (3 pont)
Ekkor azonban Enikőnek már nem lehet meg a négy mérkőzése, hiszen legfeljebb Csabával, Danival és Ferivel játszhatott volna. (2 pont)
Tehát igazoltuk, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését nem játszhatta Barnabással. (1 pont)

c) A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott – illetve nem lejátszott – mérkőzéseiket vizsgáljuk. (2 pont)
Összesen $\left(\frac{6\cdot 5}{2}\right)=15$ mérkőzés szükséges (összes eset száma). (2 pont)
Eddig 8 mérkőzés zajlott le, tehát 7 mérkőzést kell még lejátszani (kedvező esetek száma). (2 pont)
A keresett valószínűség $\frac{7}{15}\left(\approx 0{,}47\right)$ (1 pont)

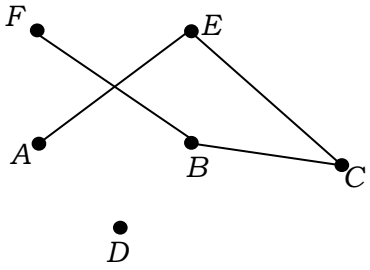
Összesen: 17 pont

12) Rajzoljon egy gráfot, melynek 5 csúcsa és 5 éle van, továbbá legalább az egyik csúcsának a fokszáma 3. (2 pont)

Megoldás:

A feltételeknek megfelelő gráf. (2 pont)

13) Az ábrán látható hatpontú gráfba rajzoljon be 2 élt úgy, hogy a kapott gráf minden csúcsából 2 él induljon ki! A berajzolt éleket két végpontjukkal adja meg! (2 pont)

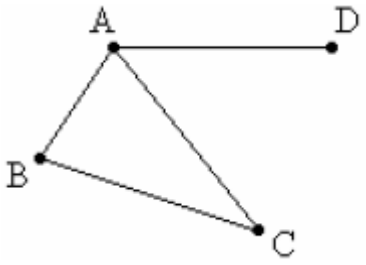


Megoldás:

A berajzolt élek: ***A-D*** és ***D-F*.** (2 pont)

14) Egy álláshirdetésre négyen jelentkeznek: Aladár, Béla, Cecil és Dénes. Az adott időben megjelennek a vállalatnál, s akkor kiderül, hogy közülük hárman, Aladár, Béla és Cecil osztálytársak voltak. Dénes csak Aladárt ismeri, ők régebben egy kosárlabdacsapatban játszottak. Szemléltesse az ismeretségeket gráffal! (Az ismeretségek kölcsönösek.) (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

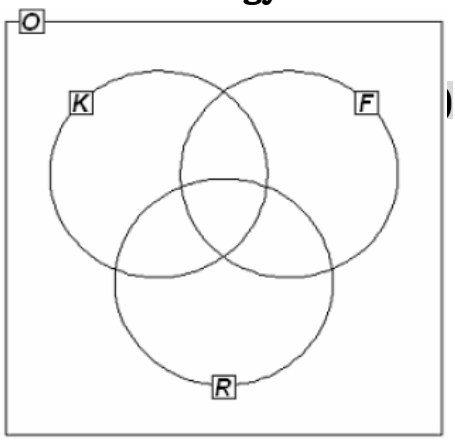
15) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.

a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat!

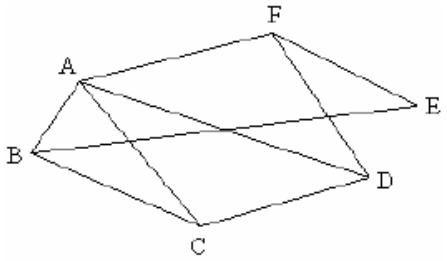
b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!
A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére. **(2 pont)**

c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)

d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



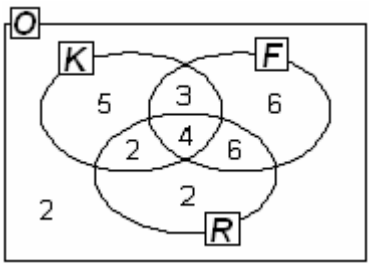
1. ábra



2. ábra

Megoldás:

a) Ábra (4 pont)



b) **A focira jelentkezettek között van olyan, akinek nincs testvére**. *VAGY:* **A focira jelentkezettek közül nem mindenkinek van testvére**. (2 pont)

c) Az öt tanulót $\binom{19}{5} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{5!} =$ **11628-féleképpen** lehet kiválasztani. (3 pont)

d) A mérkőzések száma összesen: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (1 pont)

Eddig lejátszottak 9 mérkőzést. (1 pont)

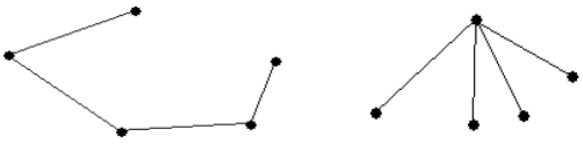
6 mérkőzés van még hátra. (1 pont)

Összesen: 12 pont

16) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelynek 4 éle van! (2 pont)

Megoldás:

Több megoldás is elképzelhető, például:



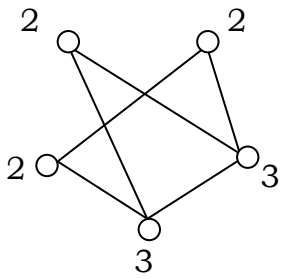
(2 pont)

Összesen: 2 pont

17) Rajzoljon egy olyan 5 csúcsú gráfot, melyben a csúcsok fokszámának összege 12. (2 pont)

Megoldás:

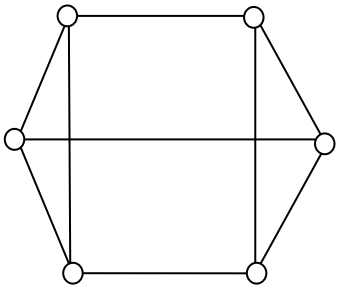
A feltételeknek megfelelő gráf. (2 pont)
Például:



18) Egy irodai számítógép-hálózat hat gépből áll. Mindegyik gép ezek közül három másikkal van közvetlenül összekötve. Rajzoljon egy olyan gráfot, amely ezt a hálózatot szemlélteti! (2 pont)

Megoldás:

Egy megfelelő gráf például:



(2 pont)

19) Döntse el, hogy az alább felsoroltak közül melyik mondat a tagadása a következő állításnak! (2 pont)

Minden érettségi feladat egyszerű.

a) Minden érettségi feladat bonyolult.
b) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.
c) Sok érettségi feladat bonyolult.
d) Van olyan érettségi feladat, ami egyszerű.

Megoldás:

b) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű. (2 pont)

Összesen: 2 pont

20) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)

b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	**3**
1	**94**
2	**89**
3	**14**

Jóska felmérése alapján töltse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.
Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
D) Nem minden háztartásban van televízió. (2 pont)

Megoldás:

a) A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje x, a mikrohullámú sütővel rendelkezők számát $2x$. (1 pont)
Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek:
$2x + x - 63 = 141$, (2 pont)
amiből $x = 68$. (1 pont)
Nincs mikrohullámú sütője $150 - 2 \cdot 68 = 14$ megkérdezettnek, (1 pont)
ők az összes megkérdezett kb. **9,3%-át** jelentik. (1 pont)

b) Az egy háztartásban található számítógépek számának átlaga:
$\frac{3 \cdot 0 + 94 \cdot 1 + 89 \cdot 2 + 14 \cdot 3}{200} =$ (1 pont)
$= \mathbf{1,57}$. (1 pont)
A medián **2**, (1 pont)
a módusz **1**. (1 pont)

c) Az állítás tagadásai: **C** és **D.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

21) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)
b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)

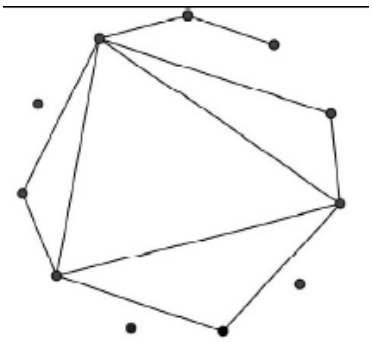
Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapítottuk meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.

c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)

Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

Megoldás:



a) Több lehetőség is van, például: (3 pont)

b) Annyi kézfogás történt, ahány éle van a gráfnak, (1 pont)
összesen **11**. (1 pont)

c) A vizsgázó által megadott számok egyetlen módusza 2, (1 pont)
mediánja 3, (1 pont)
átlaga 4, (1 pont)
terjedelme 5. (1 pont)
Egy lehetséges megoldás például 2; 2; 2; 2; 2; 3; 6; 6; 6; 6; 7. (1 pont)

d) Annak a valószínűsége, hogy a játékos nem lő be egy tizenegyest $(1-0,9)=0,1$. (1 pont)
Összesen három lehetőséget kell figyelembe venni. (1 pont)
Pontosan egyszer talál be, és kétszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{1}\cdot 0,9\cdot 0,1^2\,(=0,027)$. (1 pont)
Pontosan kétszer talál be, és egyszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{2}\cdot 0,9^2\cdot 0,1\,(=0,243)$. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy mindháromszor betalál: $0,9^3\,(=0,729)$. (1 pont)
A keresett valószínűség ezek összege, (1 pont)
azaz **0,999**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

22) "Minden szekrény barna."
Válassza ki az alábbiak közül annak a mondatnak a betűjelét, amelyik tagadása a fenti kijelentésnek!
A: Van olyan szekrény, amelyik nem barna.
B: Nincs barna szekrény.
C: Van olyan szekrény, amelyik barna.
D: Pontosan egy szekrény barna. (2 pont)

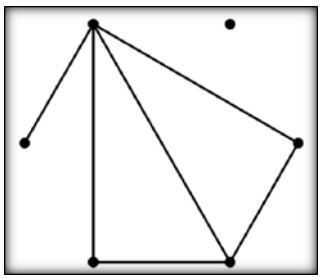
Megoldás:

A (2 pont)

23) Rajzoljon olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0; 1; 2; 2; 3; 4. (2 pont)

Megoldás:

Például:



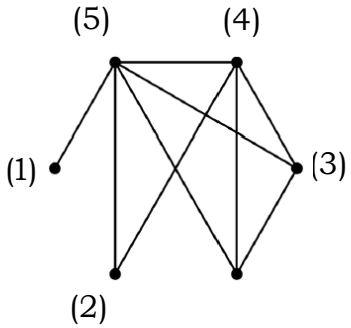
(2 pont)

24) Egy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismertségek kölcsönösek). Az első öt megkérdezett személy válasza: $5, 4, 3, 2, 1$.

a) Ábrázolja gráffal a hatfős társaság ismertségi viszonyait! (2 pont)

b) Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban? (1 pont)

***Megoldás*:**



a) (2 pont)

b) A hatodik főnek az ábráról leolvasva **3** ismerőse van. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) Egy fiókban néhány sapka van. Tekintsük a következő állítást: „A fiókban minden sapka fekete.” Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!

A: A fiókban minden sapka fehér.

B: A fiókban nincs fekete sapka.

C: A fiókban van olyan sapka, amely nem fekete.

D: A fiókban nem minden sapka fekete. (2 pont)

***Megoldás*:**

A helyes tagadás ***C*** és ***D***. (2 pont)

Összesen: 2 pont

26) Hány éle van egy 8 pontú teljes gráfnak? (2 pont)

Megoldás:

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\frac{8\cdot 7}{2}=\mathbf{28}$$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

27) Egy születésnapi összejövetelen egy 7 fős társaság tagjai közül néhányan koccintottak egymással. Lehetséges-e, hogy az egyes résztvevők 1; 2; 2; 3; 3; 6; 6 másik résztvevővel koccintottak az összejövetel során? Válaszát indokolja! (3 pont)

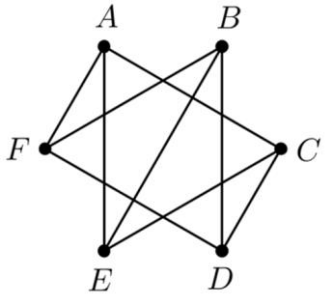
Megoldás:

(Tekinthetjük a résztvevőket egy gráf csúcsainak, a koccintásokat a gráf éleinek.) Bármely gráfban a csúcsok fokszámának összege páros. (1 pont)
$1+2+2+3+3+6+6=23$ (1 pont)
Ilyen gráf nincs, tehát **nem lehetséges**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

28) Egy hatfős asztaltársaság tajgai: Anna, Balázs, Cili, Dezső, Egon és Fruzsina. Mindegyikük pontosan három másik személyt ismer a társaságban. Cili ismeri Dezsőt és Egont, Anna pedig nem ismeri sem Balázst, sem Dezsőt. Szemléltesse gráffal a társaság ismeretségi viszonyait! (Minden ismeretség kölcsönös.) (4 pont)

Megoldás:



Összesen: 4 pont

29) Egy dobozban lévő színes golyókról szól az alábbi állítás:
„A dobozban van olyan golyó, amelyik kék színű”
Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!

A: A dobozban van olyan golyó, amelyik nem kék színű.
B: A dobozban minden golyó kék színű.
C: A dobozban egyik golyó sem kék színű.
D: A dobozban nincs olyan golyó, amelyik kék színű. (2 pont)

Megoldás:

A helyes megoldások: **C és D állítás**

Összesen: 2 pont

Síkgeometria
Megoldások

1) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
a) A háromszög köré írható kör középpontja mindig valamelyik súlyvonalra esik. (1 pont)
b) Egy négyszögnek lehet 180°-nál nagyobb belső szöge is. (1 pont)
c) Minden trapéz paralelogramma. (1 pont)

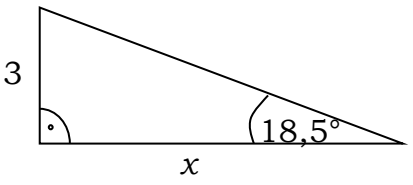
Megoldás:

a) **Hamis** (1 pont)
b) **igaz** (1 pont)
c) **hamis** (1 pont)
Összesen: 3 pont

2) Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza 3 cm, a vele szemközti szög 18,5°. Mekkora a másik befogó? Készítsen vázlatot, és válaszát számítással indokolja! (3 pont)

Megoldás:

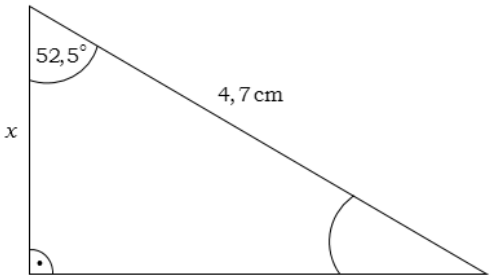
Helyes ábra: (1 pont)



$\text{tg}18{,}5^\circ = \frac{3}{x}$ (1 pont)

A másik befogó $x \approx 8{,}966 \approx$ **9** (1 pont)

3) Egy derékszögű háromszög átfogója 4,7 cm hosszú, az egyik hegyesszöge 52,5°. Hány cm hosszú a szög melletti befogó? Készítsen vázlatot az adatok feltüntetésével! Válaszát számítással indokolja, és egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (3 pont)



Megoldás:

Helyes ábra. (1 pont)

$x = 4{,}7\ \cos 52{,}5^\circ = 2{,}861$ (1 pont)

A befogó hossza kerekítve: 2,9 cm (1 pont)

4) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
a) A szabályos ötszög középpontosan szimmetrikus. (1 pont)
b) Van olyan háromszög, amelynek a súlypontja és a magasságpontja egybeesik. (1 pont)
c) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus. (1 pont)

Megoldás:

a) **hamis** (1 pont)
b) **igaz** (1 pont)
c) **hamis** (1 pont)
Összesen: 3 pont

5) Egy háromszög belső szögeinek aránya 2:5:11. Hány fokos a legkisebb szög? (2 pont)

Megoldás:

A legkisebb szög **20°** . (2 pont)

6) Egy függőleges tartórúdra a talajtól 4 m magasan mozgásérzékelőt szereltek, a hozzákapcsolt lámpa 140°-os nyílásszögű forgáskúpban világít függőlegesen lefelé.

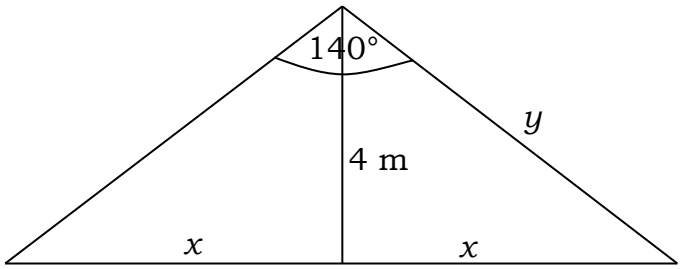
a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével! (2 pont)

b) Milyen messze van a lámpától a legtávolabbi megvilágított pont? (4 pont)

c) Megvilágítja-e az érzékelő lámpája azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától 15 m távolságra van? (4 pont)

d) A tartórúdon méterenként kampókat helyeztünk el, amelyekre fel tudjuk akasztani a mozgásérzékelő lámpáját. Alulról számítva hányadik kampót használjuk, ha azt akarjuk, hogy a vízszintes talajon ne világítson meg a lámpa 100 m2-nél nagyobb területet? (7 pont)

Megoldás:



a) Ábra (2 pont)

b) $y = \dfrac{4}{\cos 70^\circ}$ (3 pont)

$\approx \mathbf{11,7\ (m)}$ (1 pont)

c) A legtávolabbi megvilágított pont a talajon a rúd aljától $x = 4 \cdot \mathrm{tg}70^\circ$ távolságra van, (2 pont)

$x \approx 11\ (\mathrm{m})$ (1 pont)

így a 15 méterre levő pont már nincs megvilágítva. (1 pont)

d) $r^2\pi \le 100$ (1 pont)

$r \le \sqrt{\dfrac{100}{\pi}} \approx 5,64\ (\mathrm{m})$ (2 pont)

$h \le \dfrac{5,65}{\mathrm{tg}70^\circ} \approx 2,05\ (\mathrm{m})$ (2 pont)

Tehát az első vagy a második kampóra kell akasztani az érzékelőt. (2 pont)

Összesen: 17 pont

7) Mekkora az egységsugarú kör 270°-os középponti szögéhez tartozó ívének hossza? (2 pont)

Megoldás:

A középponti szögekre és az ívhosszakra vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

Innen $\boldsymbol{x = \dfrac{3\pi}{2}}$ (2 pont)

8) Döntse el, hogy az alábbi *B* állítás igaz vagy hamis!
***B*: Ha egy négyszög két szemközti szöge derékszög, akkor az téglalap.**
Írja le az állítás megfordítását (*C*).
Igaz vagy hamis a *C* állítás? (3 pont)

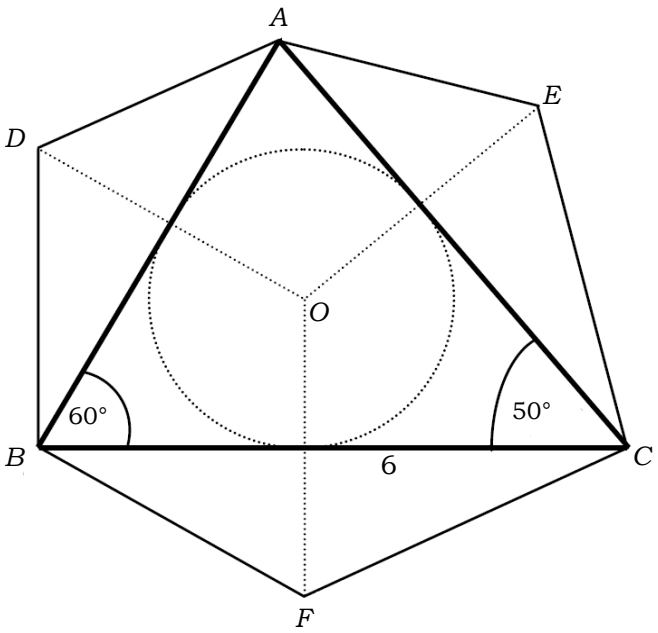
Megoldás:

B logikai értéke: **HAMIS** (1 pont)
C állítás: **Ha egy négyszög téglalap, akkor két szemközti szöge derékszög.** (1 pont)
C logikai értéke: **IGAZ** (1 pont)
Összesen: 3 pont

9) Egy háromszög egyik oldalának hossza 6 cm. Az ezeken nyugvó két szög 50° és 60°. A háromszög beírt körének középpontját tükröztük a háromszög oldalaira. E három pont a háromszög csúcsaival együtt egy konvex hatszöget alkot.
a) Mekkorák a hatszög szögei? (6 pont)
b) Számítsa ki a hatszög azon két oldalának hosszát, amely a háromszög 60°-os szögének csúcsából indul! (5 pont)
c) Hány négyzetcentiméter a hatszög területe? (6 pont)
A b) és a c) kérdésekben a választ egy tizedes pontossággal adja meg!

Megoldás:

a) A háromszög harmadik szöge $BAC\sphericalangle = 70^\circ$ (1 pont)
A beírt kör *O* középpontja a belső szögfelezők metszéspontja. (1 pont)
A tükrözésnél ezért az eredeti háromszög csúcsainál a belső szögek felének kétszerese adódik hozzá az eredeti szöghöz, (1 pont)
vagyis a keletkezett hatszög szögei:
$DAE\sphericalangle = 140^\circ$ $ECF\sphericalangle = 100^\circ$
$FBD\sphericalangle = 120^\circ$ (1 pont)
Az *ABC* háromszög szögfelezői által (az *O* középpontnál) bezárt szögek a tükrözés miatt rendre megegyeznek a hatszög *D*, *E* és *F* csúcsú szögeivel: (1 pont)
$BDA\sphericalangle = 115^\circ$ $AEC\sphericalangle = 120^\circ$ $CFB\sphericalangle = 125^\circ$
$\boldsymbol{BDA\sphericalangle = 115^\circ}$, $\boldsymbol{AEC\sphericalangle = 120^\circ}$, $\boldsymbol{CFB\sphericalangle = 125^\circ}$, (1 pont)



b) A tükrözés miatt $BO = BD = BF$
Elegendő tehát az $x = BO$ belső szögfelező szakasz hosszát kiszámítani. (2 pont)
A *BOC* háromszögben a szinusztétel alapján:
A tükrözés miatt $\frac{x}{6} = \frac{\sin 25^\circ}{\sin 125^\circ}$ (2 pont)
amiből $\boldsymbol{x \approx 3{,}1\ (\mathrm{cm})}$
a hatszög keresett két oldalának hossza egyaránt **3,1 cm.** (1 pont)

c) A tükrözés miatt a hatszög területe a háromszög területének kétszerese. (1 pont)

A háromszög $AB = c$ oldalára:

$\frac{c}{6} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$ (1 pont)

amiből $c = 4,9\ (\text{cm})$ (1 pont)

A háromszög területe $\frac{6c\sin 60^\circ}{2} \approx 12,7\ (\text{cm}^2)$ (2 pont)

A hatszög területe $\mathbf{2 \cdot 12,7 = 25,4\ (cm^2)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

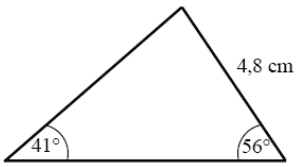
10) Egy háromszög oldalhosszúságai egész számok. Két oldala 3 cm és 7 cm. Döntse el a következő állításokról, hogy igaz vagy hamis! (2 pont)
1. állítás: A háromszög harmadik oldala lehet 9 cm.
2. állítás: A háromszög harmadik oldala lehet 10 cm.

Megoldás:

1. állítás: **Igaz** (1 pont)
2. állítás: **Hamis** (1 pont)

Összesen: 2 pont

11) Az ábrán látható háromszögben hány cm hosszú az 56°-os szöggel szemközti oldal? (Az eredményt egy tizedes jegy pontossággal adja meg!) Írja le a számítás menetét! (3 pont)



Megoldás:

$\frac{x}{4,8} = \frac{\sin 56^\circ}{\sin 41^\circ}$ (1 pont)

$\boldsymbol{x \approx 6,1}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

12) Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal 13 cm hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya 2:1.
a) Mekkora a rombusz magassága? (5 pont)
b) Mekkorák a rombusz szögei? (3 pont)
c) Milyen hosszú a rombusz hosszabbik átlója? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

Megoldás:

a) Helyes ábra (1 pont)

$\left(T_{\text{négyzet}} = a^2 \text{ és } T_{\text{rombusz}} = am_a\right)$

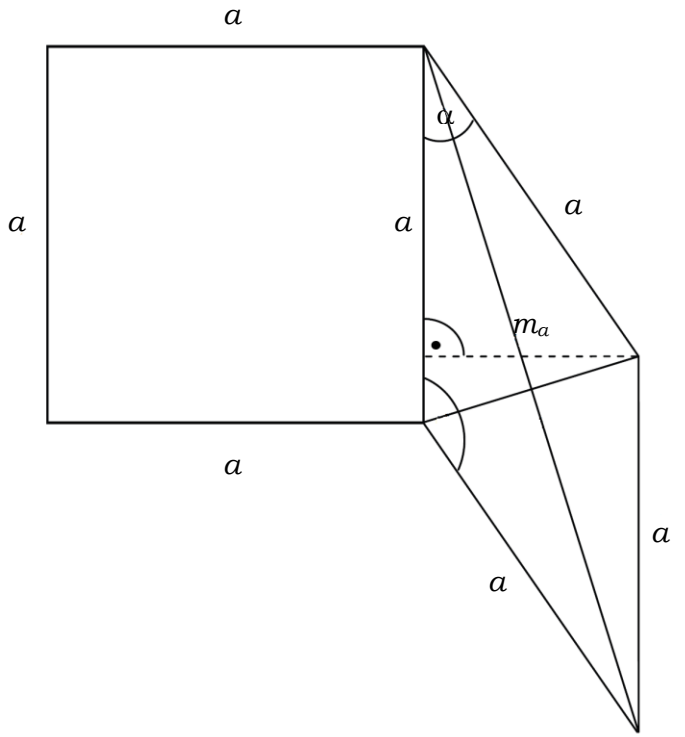
$\frac{a^2}{am_a} = \frac{2}{1}$ (3 pont)

A rombusz magassága $\boldsymbol{m_a = 6{,}5\ (\text{cm})}$ (1 pont)

$\sin\alpha = \frac{m_a}{a}$ (ahol α hegyesszög) (1 pont)

$\boldsymbol{\alpha = 30^\circ}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\beta = 150^\circ}$ (1 pont)



b) Bármelyik lehetséges derékszögű háromszögből jó összefüggést felír a hosszabbik átló segítségével, például

$\cos 15^\circ = \frac{\frac{e}{2}}{13}$ (2 pont)

$e = 2 \cdot 13 \cdot \cos 15^\circ$ (1 pont)

$\boldsymbol{e = 25{,}11\ (\text{cm})}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) Adja meg az alábbi állítások igazságértékét (igaz vagy hamis), majd döntse el, hogy a b) és a c) jelű állítások közül melyik az a) jelű állítás megfordítása! (4 pont)

a) Ha az ABCD négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.

b) Ha az ABCD négyszög átlói felezik egymást, akkor ez a négyszög téglalap.

c) Ha az ABCD négyszög nem téglalap, akkor átlói nem felezik egymást.

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)

b) **hamis** (1 pont)

c) **hamis** (1 pont)

Az a) megfordítása a b). (1 pont)

Összesen: 4 pont

14) Hányszorosára nő egy 2 cm sugarú kör területe, ha a sugarát háromszorosára növeljük? (2 pont)

Megoldás:

$\left(3^2 =\right)$ **9**-szeresére nő a terület. (2 pont)

15) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogója 13 cm hosszú. Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (Válaszát egész fokra kerekítve adja meg!) (2 pont)

Megoldás:

A hegyesszögek: $\mathbf{23}^\circ$ és $\mathbf{67}^\circ$ (2 pont)

16) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét! A táblázatban karikázza be a helyes választ! (4 pont)
***A* állítás: Minden rombusznak pontosan két szimmetriatengelye van. (1 pont)**
***B* állítás: Minden rombusznak van két szimmetriatengelye. (1 pont)**
***C* állítás: Van olyan rombusz, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van. (1 pont)**
***D* állítás: Nincs olyan rombusz, amelynek négy szimmetriatengelye van. (1 pont)**

Megoldás:

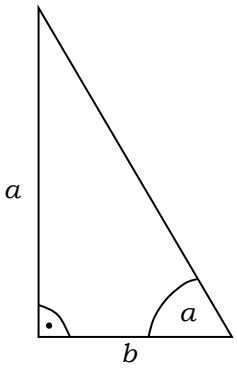
A állítás: **hamis** (1 pont)
B állítás: **igaz** (1 pont)
C állítás: **igaz** (1 pont)
D állítás: **hamis** (1 pont)
Összesen: 4 pont

17) Valamely derékszögű háromszög területe 12 cm², az α hegyesszögéről pedig tudjuk, hogy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

a) Mekkorák a háromszög befogói? (8 pont)
b) Mekkorák a háromszög szögei, és mekkora a köré írt kör sugara? (A szögeket fokokban egy tizedesjegyre, a kör sugarát cm-ben szintén egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

Megoldás:

a) A befogók aránya $3:2$. (2 pont)
Az egyik befogó $3x$, a másik $2x$. (1 pont)
A háromszög területe: $\frac{a \cdot b}{2}$. (1 pont)
$12 = \frac{3x \cdot 2x}{2}$. (1 pont)
$x^2 = 4$. (1 pont)
A (pozitív) megoldás: $x = 2$. (1 pont)
A befogók hossza **6 cm** és **4 cm**. (1 pont)



b) Az α hegyesszög 56,3° (1 pont)
a másik hegyesszög 33,7°-os. (1 pont)
A derékszögű háromszög átfogója (Pitagorasz tétele szerint) $\sqrt{\mathbf{52}} \approx \mathbf{7,2}\ \mathbf{(cm)}$, (1 pont)
a kör sugara (az átfogó fele): $\sqrt{\mathbf{13}} \approx \mathbf{3,6}\ \mathbf{(cm)}$. (1 pont)
Összesen: 12 pont

18) A következő kérdések ugyanarra a 20 oldalú szabályos sokszögre vonatkoznak.

a) Mekkorák a sokszög belső szögei? Mekkorák a külső szögek? (3 pont)
b) Hány átlója illetve hány szimmetriatengelye van a sokszögnek? Hány különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból? (6 pont)

c) Milyen hosszú a legrövidebb átló, ha a szabályos sokszög beírt körének sugara 15 cm? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

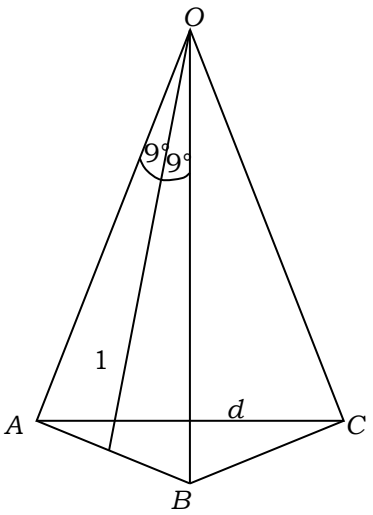
Megoldás:

a) A belső szögek **162°**-osak, (2 pont)
a külső szögek **18°**-osak. (1 pont)

b) Az összes átlók száma $\frac{20\cdot 17}{2}=170$ (2 pont)

Szemközti csúcsokat összekötő átlóból 10 van, (ezek egyenese 1–1 szimmetriatengely) szemközti oldalak felezőpontját összekötő szimmetriatengelyből szintén 10, (1 pont)
tehát összesen 20 szimmetriatengelye van a sokszögnek. (1 pont)
Egy csúcsból 17 átló húzható, ezek között 8–8 páronként egyenlő hosszú, (1 pont)
tehát **9** különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból. (1 pont)

c) A szabályos 20-szög egy oldalához tartozó (konvex) középponti szög 18°-os. (1 pont)



$\operatorname{tg}9^\circ=\frac{a}{2\cdot 15}$ (1 pont)

$a=30\cdot\operatorname{tg}9^\circ$ (1 pont)

$a\approx 4{,}75\ (\text{cm})$ (1 pont)

A legrövidebb átló egy 162°szárszögű egyenlő szárú háromszögből számolható ki, amelynek szárai ≈ 4,75 cm hosszúak. (1 pont)

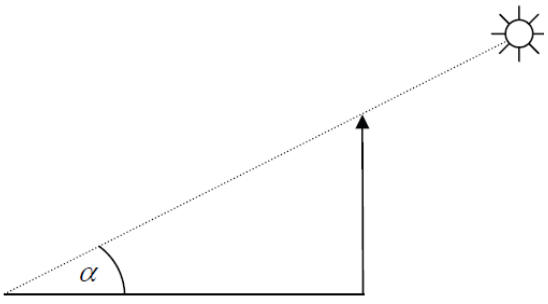
$\sin 81^\circ\approx\frac{d}{2\cdot 4{,}75}$ (1 pont)

$d\approx 9{,}5\cdot\sin 81^\circ$ (1 pont)

$\boldsymbol{d\approx 2\cdot 4{,}75\cdot\sin 81^\circ\approx 9{,}38\ (\text{cm})}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

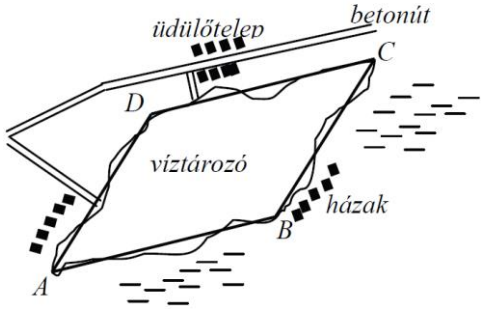
19) Egy torony árnyéka a vízszintes talajon kétszer olyan hosszú, mint a torony magassága. Hány fokos szöget zár be ekkor a Nap sugara a vízszintes talajjal? A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg! (2 pont)



Megoldás:

$\alpha=\mathbf{27}^\circ$ (2 pont)

20) Egy víztározó víztükrének alakját az ábrán látható módon az *ABCD* paralelogrammával közelítjük. A paralelogrammának az 1:30000 méretarányú térképen mért adatai: $AB = 4,70$ cm, $AD = 3,80$ cm és $BD = 3,30$ cm.



a) A helyi önkormányzat olyan kerékpárút építését tervezi, amelyen az egész víztározót körbe lehet kerekezni. Hány km hosszúságú lesz ez az út, ha hossza kb. 25%-kal több a paralelogramma kerületénél? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Mekkora az a legnagyobb távolság, amelyet motorcsónakkal, irányváltoztatás nélkül megtehetünk a víztározó víztükrén? Válaszát km-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

c) Körülbelül hány m^3-rel lesz több víz a víztározóban, ha a vízszintet 15 cm-rel megemelik? Válaszát ezer m^3-re kerekítve adja meg! (6 pont)

Megoldás:

a) A térképen a paralelogramma kerülete 17,0 cm, a kerékpárút pedig $17,0 \cdot 1,25 = 21,25$ cm hosszú. (1 pont)

A valóságban a kerékpárút hossza $21,25 \cdot 3 \cdot 10^4$ cm, (1 pont)

azaz 6,375 km. (1 pont)

Egy tizedes jegyre kerekítve tehát a kerékpárút hossza **6,4 km**. (1 pont)

A számításokat kezdhetjük a térkép adatainak valós méretre váltásával is.

b) Az *AC* szakasz a leghosszabb. (1 pont)

Az *ABD* háromszögre felírjuk a koszinusztételt:

$3,3^2 = 4,7^2 + 3,8^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 3,8 \cdot \cos BAD\sphericalangle$ (1 pont)

Ebből: $\cos BAD\sphericalangle = \dfrac{4,7^2 + 3,8^2 - 3,3^2}{2 \cdot 4,7 \cdot 3,8} \approx$ (1 pont)

$\approx 0,7178$

(tehát $BAD\sphericalangle \approx 44,1^\circ$ és így $ABC\sphericalangle \approx 135,9^\circ$) (1 pont)

Az *ABC* háromszögből koszinusztétellel:

$AC^2 = 4,7^2 + 3,8^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 3,8 \cdot \cos ABC\sphericalangle$ (1 pont)

amiből $AC \approx 7,9\ (\text{cm})$ (1 pont)

Ez a valóságban (egy tizedes jegyre kerekítve) **2,4 km**. (1 pont)

c) A vízfelszín területe a valóságban:

$9 \cdot 10^8 \cdot 4,7 \cdot 3,8 \cdot \sin 44,1^\circ \approx 1,119 \cdot 10^{10}\ (\text{cm}^2)$

(Heron-képlet is használható.), (2 pont)

ami $1,119 \cdot 10^6$ m^2. (1 pont)

Tehát kb. $1,119 \cdot 10^6 \cdot 0,15 \approx \mathbf{1,679 \cdot 10^5}$ **m^3-rel lesz több víz a tárolóban,** (2 pont)

ami ezer köbméterre kerekítve **168 ezer m^3** vízmennyiséget jelent. (1 pont)

Összesen: 17 pont

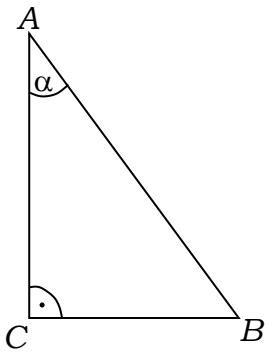
21) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 5 cm, a szára 6 cm hosszú. Hány fokosak a háromszög alapon fekvő szögei? A szögek nagyságát egész fokra kerekítve adja meg! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot. (1 pont)
A keletkező derékszögű háromszögben a keresett α szögre (1 pont)
Az alapon fekvő szögek $\approx \mathbf{65}^\circ$-osak. (1 pont)

Összesen: 3 pont

22) Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyben az átfogó hossza 1, az α hegyesszög melletti befogó hossza pedig $\sin\alpha$. Mekkora az α szög? Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:

(A szögfüggvények definíciója miatt) $BC = \sin\alpha$, (1 pont)
$\boldsymbol{AC = BC}$ (1 pont)
tehát $\boldsymbol{\alpha = 45^\circ}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

23) Egyenlő szárú háromszög alapja 40 cm, szárainak hossza 52 cm. A háromszöget megforgatjuk a szimmetriatengelye körül.
(A válaszait két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

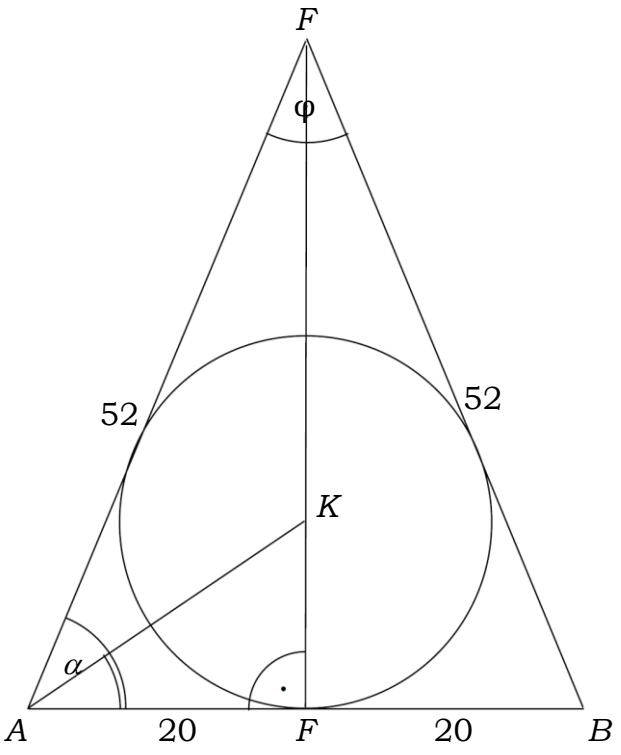
a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével, és számítsa ki, hogy mekkora a keletkező forgáskúp nyílásszöge? (4 pont)
b) Számítsa ki a keletkező forgáskúp térfogatát! (3 pont)
c) Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelyik érinti a kúp alapkörét és a palástját? (6 pont)
d) Mekkora a kúp kiterített palástjának területe? (4 pont)

Megoldás:

a) Jó vázlatrajz az adatok feltüntetésével. (2 pont)
Ha a kúp nyílásszöge φ, akkor
$\sin\varphi = \frac{20}{52} = 0,3846$ (1 pont)
Ebből $\boldsymbol{\varphi = 45,24^\circ}$ (1 pont)

b) $m = \sqrt{2704 - 400} = 48$ (1 pont)
$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{400 \cdot \pi \cdot 48}{3}$ (1 pont)
$\boldsymbol{V \approx 20106,19\ (cm^3)}$ (1 pont)

c) A kúpba írt gömb sugara megegyezik az egyenlő szárú háromszögbe írt kör sugarával. (2 pont)
A háromszög alapon fekvő szöge
$\alpha = 67,38^\circ$ (1 pont)
$tg33,69^\circ = \frac{\rho}{20}$ (1 pont)



$\rho = 13{,}33\ (\text{cm})$ (1 pont)

A gömb felszíne: $A \approx 2234{,}01\ (\text{cm}^2)$ (1 pont)

d) A körcikk ívének hossza $i = 2r\pi$, $i = 2 \cdot 20\pi \approx 125{,}66\ (\text{cm})$ (2 pont)

$T_{palást} = \frac{i \cdot R}{2} \approx 2 \cdot 20\pi \cdot 26$ (1 pont)

$T_{palást} \approx 3267{,}26\ (\text{cm}^2)$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

24) Az *ABC* hegyesszögű háromszögben *BC* = 14 cm, *AC* = 12 cm, a *BCA* szög nagysága pedig 40°.

a) Számítsa ki a *BC* oldalhoz tartozó magasság hosszát! (2 pont)

b) Számítsa ki az *AB* oldal hosszát! (3 pont)

Válaszait cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Az *AB* oldal felezőpontja legyen *E*, a *BC* oldal felezőpontja pedig legyen *D*. Határozza meg az *AEDC* négyszög területét!

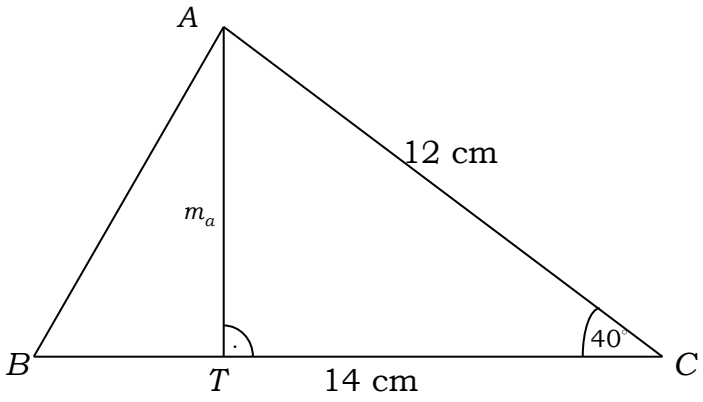
c) Válaszát cm^2-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Az ATC derékszögű háromszögben

$m_a = 12\sin 40^\circ \approx$ **7,7 cm** (2 pont)

A magasság kifejezhető a trigonometrikus területképletből is.



b) A háromszög kérdéses oldalára a koszinusztételt felírva: (1 pont)

$AB^2 = 14^2 + 12^2 - 2 \cdot 14 \cdot 12 \cdot \cos 40^\circ$ (1 pont)

$AB \approx 9{,}1$ cm (1 pont)

c) Az *AEDC* négyszög trapéz, mert az *ED* szakasz az *ABC* háromszögben középvonal, így párhuzamos az *AC* oldallal. (1 pont)

$ED = 6\,\text{cm}$ (1 pont)

A trapéz magassága az *ABC* háromszög *AC* oldalhoz tartozó magasságának a fele. (1 pont)

Az ABC háromszög területe: $T = \frac{12 \cdot 14 \cdot \sin 40^\circ}{2} \left(\approx 54\ \text{cm}^2\right)$ (1 pont)

Ebből az *AC* oldalhoz tartozó m_b magasság:

$m_b = \frac{T \cdot 2}{12} \approx 9\ (\text{cm})$ (1 pont)

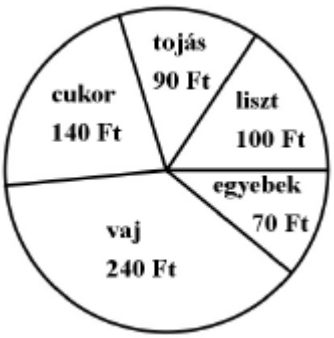
Az *AEDC* trapéz területe: $T = \frac{12+6}{2} \cdot \frac{m_b}{2}$ (1 pont)

$\approx 40{,}5\ \text{cm}^2$ (1 pont)

A feladat megoldható hasonló háromszögek területarányának felhasználásával is.

Összesen: 12 pont

25) Az ábra egy sütemény alapanyagköltségeinek megoszlását mutatja. Számítsa ki a „vaj” feliratú körcikk középponti szögének nagyságát fokban! Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:

A sütemény összköltsége 640 Ft. (1 pont)

A vaj költsége ennek $\frac{3}{8}$ része. (1 pont)

A kérdéses körcikk középponti szöge **135°**. (1 pont)

26) A vízszintessel 6,5°-ot bezáró egyenes út végpontja 124 méterrel magasabban van, mint a kiindulópontja.
Hány méter hosszú az út? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az adatokat feltüntető helyes ábra, az út hossza x. (1 pont)

$x = \frac{124}{\sin 6,5^\circ} \approx 1095$ (1 pont)

1095 méter hosszú az út. (1 pont)

Összesen: 3 pont

27) Két gömb sugarának aránya $2:1$. A nagyobb gömb térfogata k-szorosa a kisebb gömb térfogatának.
Adja meg k értékét! (2 pont)

Megoldás:

(Mivel két hasonló test térfogatának aránya, a hasonlósági arány köbével egyenlő, ezért $k = 2^3$.)

$\boldsymbol{k = 8}$ (2 pont)

28) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, mindkét vektor hossza 4 cm. Határozza meg az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor hosszát! (2 pont)

Megoldás:

Az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor hossza **4 cm**. (2 pont)

29) Számítsa ki a szabályos tizenkétszög egy belső szögének nagyságát! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A (szabályos) tizenkétszög belső szögeinek összege: $(12-2)\cdot 180^\circ = 1800^\circ$,

(2 pont)

így egy belső szöge **150°** . (1 pont)

Összesen: 3 pont

30) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm²-ben mért számértéke. (1 pont)

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)
c) **igaz** (1 pont)
d) **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

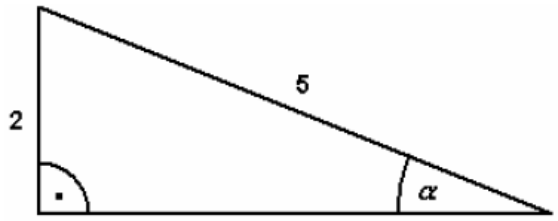
31) Egy háromszög egyik oldalának hossza 10 cm, a hozzá tartozó magasság hossza 6 cm. Számítsa ki a háromszög területét! (2 pont)

Megoldás:

A háromszög területe **30 cm²**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

32) Számítsa ki az α szög nagyságát az alábbi derékszögű háromszögben! (2 pont)



Megoldás:

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$

$\alpha \approx \mathbf{23,58°}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

33) Egy kör sugara 6 cm. Számítsa ki ebben a körben a 120°-os középponti szöghöz tartozó körcikk területét! (2 pont)

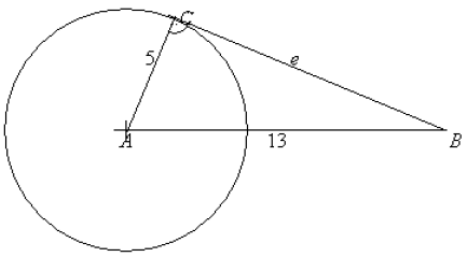
Megoldás:

$t = \frac{\alpha \cdot r^2\pi}{360^\circ} = 12\pi\,\text{cm}^2 \approx \mathbf{37,7\,cm^2}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

34) Egy 5 cm sugarú kör középpontjától 13 cm-re lévő pontból érintőt húzunk a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza? Írja le a számítás menetét! (3 pont)

Megoldás:



Ábra felrajzolása: (1 pont)
Az ABC háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz tételét: $e^2 = 13^2 - 5^2$ (1 pont)
$\boldsymbol{e = 12\,cm}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

35) Adja meg, hogy az alábbi geometriai transzformációk közül melyek viszik át önmagába az ábrán látható, háromszög alakú (sugárveszélyt jelző) táblát! (2 pont)

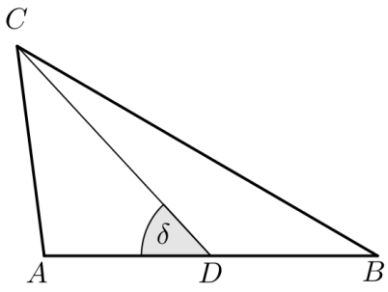
a) 60°-os elforgatás a tábla középpontja körül.
b) 120°-os elforgatás a tábla középpontja körül.
c) Középpontos tükrözés a tábla középpontjára.
d) Tengelyes tükrözés a tábla középpontján és a tábla egyik csúcsán átmenő tengelyre.



Megoldás:

b) és **d)** (2 pont)

36) Az ábrán látható *ABC* háromszögben a *D* pont felezi az *AB* oldalt. A háromszögben ismert: $AB = 48\ \text{mm}$, $CD = 41\ \text{mm}$, $\delta = 47°$.



a) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét! (5 pont)

b) Számítással igazolja, hogy (egész milliméterre kerekítve) a háromszög *BC* oldalának hossza 60 mm! (4 pont)

c) Számítsa ki a háromszög *B* csúcsánál lévő belső szög nagyságát! (3 pont)

Megoldás:

a) Az *ADC* háromszög *C* csúcsához tartozó magasság hossza:
$41 \cdot \sin 47° \approx$ (1 pont)
$\approx 30(\text{mm})$. (1 pont)
Ez ugyanakkora, mint az *ABC* háromszög *C* csúcsához tartozó magassága, (1 pont)
így a kérdezett terület $T = \frac{48 \cdot 30}{2} =$ (1 pont)
= 720 mm². (1 pont)

b) A *CDB* szög $133°$. (1 pont)
$BC = \sqrt{24^2 + 41^2 - 2 \cdot 24 \cdot 41 \cdot \cos 133°}$ (2 pont)
Így a *BC* oldal hossza a kért kerekítéssel **valóban 60 mm**. (1 pont)

c) Az *ABC* szög legyen β, ekkor a szinusztételt felírva a *BCD* háromszögben:
$\frac{\sin\beta}{\sin 133°} = \frac{41}{60}$. (1 pont)
$\sin\beta \approx 0{,}4998$ (1 pont)
Mivel a *BCD* háromszög *D* csúcsánál lévő belső szöge tompaszög:
$\beta \approx 30°$. (1 pont)
A feladat koszinusz-tétel megoldásával is helyes!

Összesen: 12 pont

37) Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza 4,2 cm és 5,6 cm. Mekkora a téglalap körülírt körének sugara? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A téglalap körülírt körének átmérője a téglalap átlója. (1 pont)

A téglalap átlójának hossza: $\sqrt{4,2^2+5,6^2}\,(=7)(\text{cm})$ (1 pont)

A kör sugara $\mathbf{3,5\,(cm)}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

38)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}\ (x \in \mathbb{R}).$$ **(6 pont)**

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $g(x)=\cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

III) A $h:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $h(x)=\cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

Megoldás:

a) (A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos\alpha$ (1 pont)

Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, (1 pont)

azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = \mathbf{60°}$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{\pi}{3}$, (1 pont)

vagy $x = \frac{5\pi}{3}$. (1 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{2\pi}{3}$, (1 pont)

vagy $x = \frac{4\pi}{3}$. (1 pont)

c)

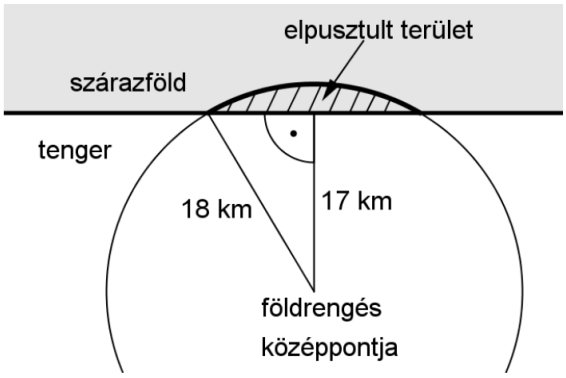
I) **igaz**

II) **hamis**

III) **hamis** (2 pont)

Összesen: 12 pont

39) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

a) $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg\left(1,344 \cdot 10^{14}\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{M \approx 5}$ (2 pont)

b) $9,3 = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$ (1 pont)

$\lg E = 20,58$ (1 pont)

Tehát a felszabadult energia körülbelül

$\boldsymbol{E \approx 3,8 \cdot 10^{20}\ \left(\mathrm{J}\right)}$ (1 pont)

c) A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai:

$-4,42 + \frac{2}{3}\lg E_c = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E_k + 2$ (1 pont)

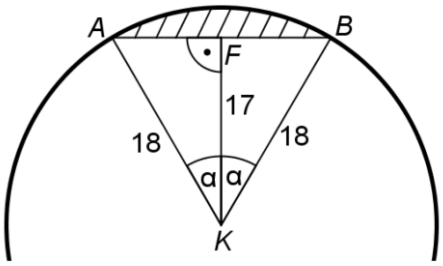
Rendezve: $\lg E_c - \lg E_k = 3$ (1 pont)

(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg \frac{E_c}{E_k} = 3$ (1 pont)

Ebből $\frac{E_c}{E_k} = 1000$ (1 pont)

1000-szer akkora volt a felszabadult energia. (1 pont)

d) Az ábra jelöléseit használjuk.



Az *AKF* derékszögű háromszögből:

$\cos\alpha = \frac{17}{18}$ (1 pont)

$\alpha \approx 19{,}2^\circ. \left(2\alpha \approx 38{,}4^\circ\right)$ (1 pont)

$T_{AKB\Delta} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38{,}4^\circ}{2} \left(\approx 100{,}6 \text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körcikk} \approx 18^2\pi \frac{38{,}4^\circ}{360^\circ} \left(\approx 108{,}6 \text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körszelet} \approx 108{,}6 - 100{,}6 = 8 \ \left(\text{km}^2\right)$ (1 pont)

Az elpusztult rész területe körülbelül **8 km²**. (1 pont)

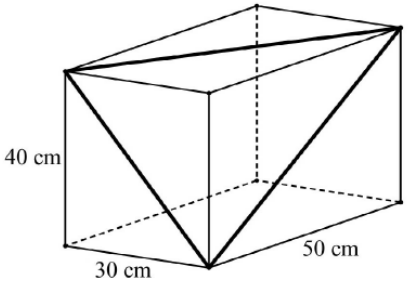
Összesen: 17 pont

40) Egy téglatest alakú akvárium egy csúcsból kiinduló élei 30 cm, 40 cm, illetve 50 cm hosszúak.

a) Hány literes ez az akvárium? (A számolás során tekintsen el az oldallapok vastagságától!) (3 pont)

Tekintsük azt a háromszöget, amelynek oldalait az ábrán látható téglatest három különböző hosszúságú lapátlója alkotja.

b) Mekkora ennek a háromszögnek a legkisebb szöge? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)



Megoldás:

a) $V = 30 \times 40 \times 50 = 60000 \left(\text{cm}^3\right)$ (1 pont)

$V = 60 \,\text{dm}^3$. (1 pont)

Az akvárium térfogata **60 liter**. (1 pont)

b) Az egyes lapátlók hossza:

$\sqrt{50^2 + 40^2} = \sqrt{4100} \left(\approx 64{,}03\right) \left(\text{cm}\right)$,

$\sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{3400} \left(\approx 58{,}31\right) \left(\text{cm}\right)$, (2 pont)

$\sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \ \left(\text{cm}\right)$.

A legkisebb szög a legrövidebb oldallal van szemben. (1 pont)

A legrövidebb oldallal szemközti szöget α-val jelölve, koszinusztétellel:

$2500 = 4100 + 3400 - 2 \times \sqrt{4100} \times \sqrt{3400} \cdot \cos\alpha$. (2 pont)

Ebből cosα $\cos\alpha \approx 0{,}6696$. (2 pont)

A háromszög legkisebb szöge: α **= 48°**. (1 pont)

Összesen: 11 pont

41) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus négyszög.

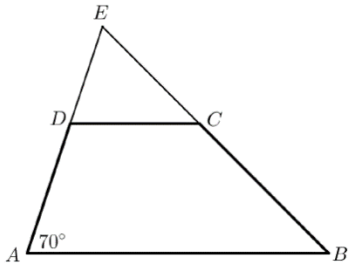
b) A kocka testátlója 45°-os szöget zár be az alaplappal.

c) A szabályos tizenhétszögben az egyik csúcsból kiinduló összes átló a tizenhétszöget 15 háromszögre bontja. (2 pont)

Megoldás:

a) **Hamis**
b) **Hamis**
c) **Igaz** (2 pont)

42) Az *ABCD* trapéz oldalainak hossza: $AB = 10\,\text{cm}$; $CD = 6\,\text{cm}$; $AD = 7\,\text{cm}$. Az *A* csúcsnál fekvő belső szög nagysága 70°.



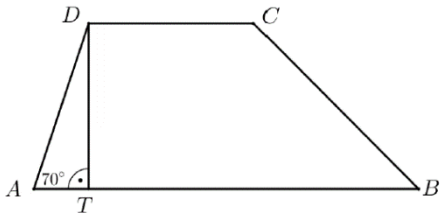
a) Mekkora távolságra van a *D* pont az *AB* oldaltól? (3 pont)

b) Számítsa ki a négyszög *AC* átlójának hosszát! (4 pont)

Az *E* pont az *AD* és *BC* szárak egyenesének metszéspontja.

c) Számítsa ki az *ED* szakasz hosszát! (4 pont)

Megoldás:



a) A *D* pont merőleges vetületét az *AB* oldalon jelölje *T*.
Meghatározandó a *DT* szakasz. (1 pont)
Az *ATD* derékszögű háromszögben:
$\sin 70° = \frac{DT}{7}$. (1 pont)
$DT = 7 \cdot \sin 70° \approx \mathbf{6,58\,cm}$. (1 pont)

b) A trapéz *D* csúcsnál lévő belső szöge 110°. (1 pont)
Írjuk fel az *ACD* háromszögben a koszinusztételt: (1 pont)
$AC^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 110°$. (1 pont)
Kb. **10,66 cm** az *AC* átló hossza. (1 pont)

c) Az *AB* szakasz párhuzamos a *CD* szakasszal, így az *EDC* és *EAB* háromszögek hasonlósága miatt: (1 pont)
$\frac{x}{6} = \frac{x+7}{10}$ (1 pont)
Ebből $10x = 6x + 42$, (1 pont)
azaz $\boldsymbol{x = 10,5\,\text{cm}}$. (1 pont)

Összesen: 11 pont

43) Egy *ABC* háromszög *A* csúcsánál lévő külső szöge 104°-os, *B* csúcsnál lévő belső szöge 74°-os. Hány fokos a háromszög *C* csúcsnál lévő külső szöge? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az *A* csúcshoz tartozó α belső szög 76°-os. (1 pont)
Felhasználva azt az összefüggést, hogy a háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével, adódik, hogy: (1 pont)
$\gamma' = 76° + 74° = \mathbf{150°}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

44) Az *ABC* derékszögű háromszög *AC* befogója 6 cm, *BC* befogója 8 cm hosszú.

a) Számítsa ki az *ABC* háromszög hegyesszögeinek nagyságát! (3 pont)

A *DEF* derékszögű háromszög *DE* befogója 7 cm-rel rövidebb, mint a *DF* befogó. Az átfogó 2 cm-rel hosszabb, mint a *DF* befogó.

b) Számítsa ki a *DEF* háromszög oldalainak hosszát! (8 pont)

***Megoldás*:**

a) Az *ABC* derékszögű háromszög *A* csúcsnál lévő szögére felírjuk a tangens szögfüggvényt: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{6}$ (1 pont)

$\alpha \approx \mathbf{53{,}13^\circ}$ és $\beta = \mathbf{36{,}87^\circ}$. (2 pont)

b) Vezessünk be ismeretlent *DE* oldalra!
Ekkor $DE = x$, $DF = x + 7$ és $EF = x + 7 + 2 = x + 9$. (1 pont)
Ezután Pitagorasz-tételt írunk fel a derékszögű háromszögre.
$x^2 + (x+7)^2 = (x+9)^2$ (1 pont)
Az egyenlet rendezésével egy másodfokú egyenletet kapunk, ez az $x^2 - 4x - 32 = 0$, melynek gyökei $x_1 = 8$ és $x_2 = -4$ lesznek. (2 pont)
Mivel x oldalhosszúságot jelöl, az x csak 8 cm lehet. (1 pont)
Visszahelyettesítve a háromszög oldalai tehát $\boldsymbol{DE = 8\,\text{cm}}$, $\boldsymbol{DF = 15\,\text{cm}}$ és $\boldsymbol{EF = 17\,\text{cm}}$. (2 pont)

Összesen: 11 pont

45) Az *ABCD* húrtrapéz oldalainak hossza:
$AB = 5\,\text{cm}$; $BC = 2{,}5\,\text{cm}$, $CD = 2\,\text{cm}$ és $DA = 2{,}5\,\text{cm}$.

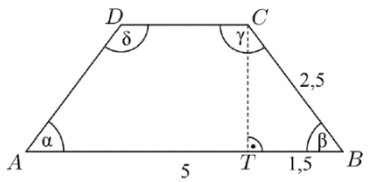
a) Számítsa ki a trapéz szögeit! (5 pont)

b) Határozza meg az *ABC* és *ACD* háromszögek területének arányát! (5 pont)

c) A trapéz belső szögeit egy-egy 5 mm sugarú körívvel jelöltük. Számítsa ki a négy körív hosszának összegét! (3 pont)

***Megoldás*:**

a) Berajzoljuk a húrtrapéz *C* csúcsból kiinduló magasságát, majd az így keletkezett *BCT* derékszögű háromszögre felírunk egy koszinusz-szögfüggvényt.

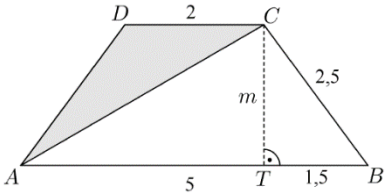


$\cos\beta = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$, amelyből $\beta \approx 53{,}13^\circ$ (2 pont)

A húrtrapéz alapon fekvő szögei egyenlők, ezért $\boldsymbol{\alpha = \beta = 53{,}13^\circ}$. (1 pont)

Továbbá a húrtrapéz egy száron fekvő szögeinek összege 180°, így $\gamma = \delta =$
$= 180^\circ - 53{,}13^\circ = \mathbf{126{,}87^\circ}$. (2 pont)

b) A *BCT* háromszögre Pitagorasz-tételt írunk fel:



$m = \sqrt{2{,}5^2 - 1{,}5^2} = 2\,\text{cm}$ (1 pont)
Így az *ABC* háromszög területe
$T_{ABC} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Az *ACD* háromszög területét az *ABCD* trapéz és az *ABC* háromszög területének különbségeként számítjuk ki.

$T_{ABCD} = \frac{(5+2)}{2} \cdot 2 = 7\,\text{cm}^2$ (1 pont)

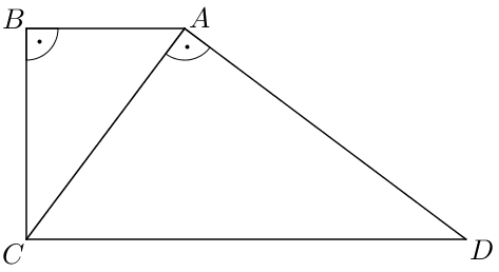
$T_{ACD} = T_{ABCD} - T_{ABC} = 2\,\text{cm}^2$ (1 pont)

Így a háromszögek területének aránya $\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \mathbf{\frac{5}{2}}$. (1 pont)

c) Mivel a trapéz belső szögeinek összege 360°, így a négy szöghöz tartozó körívek hossza összesen egy $5\,\text{mm}$ sugarú kör kerületével egyenlő. (1 pont)
A kérdezett ívhossz ezért $K = 2 \cdot 5 \cdot \pi = 10\pi \approx \mathbf{31,42\,mm}$. (2 pont)

Összesen: 13 pont

46) Két derékszögű háromszöget egy-egy oldalukkal egymáshoz illesztettünk az ábrának megfelelően. Így az *ABCD* derékszögű trapézt kaptuk.



a) Igazolja, hogy az *ABC* és a *CAD* háromszög hasonló! (3 pont)

Legyen $AB = 9\,\text{cm}$, $AC = 15\,\text{cm}$.

b) Számítsa ki a trapéz *AD* oldalán fekvő szögeinek nagyságát! (4 pont)

c) Számítsa ki a trapéz területét! (7 pont)

Megoldás:

a) Legyen $BAC\angle = \alpha$, ekkor $ACB\angle = 90^\circ - \alpha$. (1 pont)
Mivel $BCD\angle = 90^\circ$, ezért $ACD\angle = \alpha$. (1 pont)
A két háromszög szögei páronként egyenlők, így a két háromszög valóban hasonló. (1 pont)

b) $BAC\angle = \alpha$, ekkor $\cos\alpha = \frac{9}{15}$, (1 pont)

amiből $\alpha \approx 53{,}1^\circ$, (1 pont)

így a trapéz A csúcsnál lévő szöge $\alpha + 90^\circ \approx 143{,}1^\circ$. (1 pont)

a D csúcsnál lévő szög pedig kb. $180^\circ - 143{,}1^\circ = \mathbf{36{,}9^\circ}$ (1 pont)

c) A trapéz területének meghatározásához kiszámítjuk a CD alap és a BC oldal (a trapéz magassága) hosszát. (1 pont)
Az ABC és CAD háromszögek hasonlósága miatt
$\frac{CD}{15} = \frac{15}{9}$, (1 pont)
amiből $CD = 25\,\text{cm}$. (1 pont)
Az ABC derékszögű háromszögből (Pitagorasz-tétellel):
$BC = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,\text{cm}$. (2 pont)
Az $ABCD$ trapéz területe $\frac{25+9}{2} \cdot 12 =$ **$204\,\text{cm}^2$**. (2 pont)

Összesen: 14 pont

47) Egy háromszög 3 cm és 5 cm hosszú oldalai 60°-os szöget zárnak be egymással. Hány centiméter hosszú a háromszög harmadik oldala? Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$ (1 pont)

$c^2 = 19$ (1 pont)

$\boldsymbol{c \approx 4{,}36}$ **cm** (1 pont)

Összesen: 3 pont

48) Az *ABC* derékszögű háromszög egyik befogója 8 cm, átfogója 17 cm hosszú.

a) Számítsa ki a háromszög 17 cm-es oldalához tartozó magasságának hosszát! (5 pont)

b) Hány cm^2 a háromszög körülírt körének területe? (3 pont)

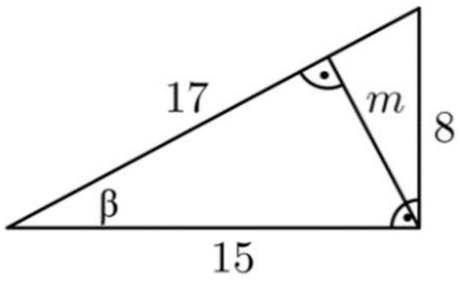
A *DEF* háromszög hasonló az *ABC* háromszöghöz, és az átfogója 13,6 cm hosszú.

c) Hány százalék a *DEF* háromszög területe az *ABC* háromszög területének? (4pont)

Megoldás:

a) A másik befogó hossza (Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (1 pont)

Mivel a háromszög derékszögű így:



$\sin\beta = \frac{8}{17}$ (1 pont)

$\beta \approx 28{,}1^\circ$ (1 pont)

$\sin 28{,}1^\circ \approx \frac{m}{15}$ (1 pont)

$\boldsymbol{m \approx 7{,}1}$ **cm** (1 pont)

b) Mivel az *ABC* háromszög derékszögű, így a Thálész-tétel megfordítása miatt a körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja, (1 pont)

ezért a kör sugara $8{,}5$ cm (1 pont)

A köt területe $8{,}5^2 \cdot \pi \approx$ **227 cm^2** (1 pont)

c) A két átfogó hosszának arány (egyben a két háromszög hasonlóságának arány): $\frac{13{,}6}{17} = 0{,}8$. (1 pont)

A *DEF* háromszög két befogója 6,4 és 12 cm hosszú. (1 pont)

A *DEF* háromszög területe $38{,}4$ cm^2, míg az *ABC* háromszög területe 60 cm^2 (1 pont)

A *DEF* háromszög területe $\frac{38{,}4}{60} \cdot 100 =$ **64%**-a az *ABC* háromszög területének. (1 pont)

Összesen: 12 pont

Sorozatok
Megoldások

1) Egy mértani sorozat első tagja 8, hányadosa 0,5. Számítsa ki a sorozat ötödik tagját! (2 pont)

Megoldás:

$a_1 \cdot q^4 = 8 \cdot (0{,}5)^4 \Rightarrow a_5 = \mathbf{\frac{1}{2}}$ (2 pont)

2) Egy számtani sorozat második tagja 17, harmadik tagja 21.

a) Mekkora az első 150 tag összege? (5 pont)

Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25 863.

b) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

Megoldás:

a) $a_2 = 17 = a_1 + d$ és $a_3 = 21 = a_1 + 2d$

$d = 4$ (1 pont)

$a_1 = 13$ (1 pont)

$a_{150} = a_1 + 149d = 609$ (1 pont)

$S_{150} = \frac{13 + 609}{2} \cdot 150$ (1 pont)

$S_{150} = \mathbf{46650}$ (1 pont)

b) Alkalmazzuk a hárommal való oszthatóság szabályát. (1 pont)

25863 számjegyeinek összege 24, így osztható 3-mal. (1 pont)

Tetszőleges sorrend esetén az összeg nem változik, tehát az állítás igaz. (1 pont)

c) Alkalmazzuk a néggyel való oszthatóság szabályát. (1 pont)

Ebben az esetben ez akkor teljesül, ha az utolsó két számjegy: 28; 32; 36; 52; 56; 68. (2 pont)

A tízes helyiértéken tehát 2; 3; 5; vagy 6 állhat. (1 pont)

Összesen: 12 pont

3) Egy kultúrpalota színháztermének a nézőtere szimmetrikus trapéz alaprajzú, a széksorok a színpadtól távolodva rövidülnek. A leghátsó sorban 20 szék van, és minden megelőző sorban 2-vel több, mint a mögötte lévőben. 500 diák és 10 kísérő tanár pont megtöltik a nézőteret. Hány széksor van a nézőtéren? (12 pont)

Megoldás:

Legyen a széksorok száma: n. (1 pont)

A sorokban levő székek száma egy $d = 2$ differenciájú számtani sorozat egymást követő elemeit adja. (1 pont)

$a_1 = 20$ (1 pont)

Az n-edik (első) sorban $a_n = 20 + (n-1) \cdot 2$ szék van. (1 pont)

Az összes helyre az $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ alkalmazható. (1 pont)

$510 = \frac{n}{2} \cdot \left(20 + 20 + (n-1) \cdot 2\right)$ (2 pont)

$2n^2 + 38n - 1020 = 0$ (2 pont)

$n_1 = 15$ és $n_2 = -34$ (1 pont)

n_2 nem ad megoldást. (1 pont)

15 széksor van a nézőtéren. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Mennyi annak a mértani sorozatnak a hányadosa, amelynek harmadik tagja 5, hatodik tagja pedig 40? (2 pont)

Megoldás:

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 5$

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 40$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{q = 2}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

5) Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.

a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám? (8 pont)

b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (4 pont)

Megoldás:

a) Az összeadott páratlan számok egy $d = 2$ differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai. (1 pont)

Legyen az összeg legkisebb tagja a_1, ekkor $a_{55} = a_1 + 54 \cdot 2$ (1 pont)

A számtani sorozat első *n* elemének összegére vonatkozó képletet alkalmazva:

$S_{55} = 55 \cdot \frac{2a_1 + 54 \cdot 2}{2} \Rightarrow 3905 = 55\left(a_1 + 54\right)$ (2 pont)

$\boldsymbol{a_1 = 17}$ (1 pont)

$\boldsymbol{a_{55} = 125}$ (1 pont)

Tehát a keresett páratlan számok a 17 és a 125. (1 pont)

Ellenőrzés: az összes valóban 3905. (1 pont)

b) A keresett számnak 5-re kell végződnie. (1 pont)

A 17 után a legkisebb ilyen szám a 25, de ez nem felel meg. (1 pont)

A következő szám 35, és ez jó, mert $35 = 5 \cdot 7$. (1 pont)

Tehát a keresett szám a 35. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) Egy számtani sorozat első eleme 8, differenciája $-\frac{2}{3}$. Mekkora a sorozat negyedik eleme? (2 pont)

Megoldás:

A sorozat negyedik eleme **6**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

7) Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azután 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.

a) Hány méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon? (3 pont)

b) Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele? (8 pont)

c) Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon? (3 pont)

d) A 21-edik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

Megoldás:

a) Számtani sorozatról van szó: $a_1 = 220$, d=10

$A_{11} = a_1 + 10d =$ (2 pont)

$= 220 + 10 \cdot 10 = 320$

320 métert aszfaltoznak le a 11. munkanapon. (1 pont)

b) $S_n \geq 7100$; $n = ?$, ahol n pozitív egész szám. (1 pont)

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$7100 = \frac{2 \cdot 220 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n$$ (2 pont)

$$1420 = (44 + n - 1) \cdot n$$

$n^2 + 43n - 1420 = 0$ (2 pont)

Egyetlen pozitív megoldás van $(n \approx 21{,}88)$, (1 pont)

de ez nem egész. (1 pont)

Az aszfaltozással a **22. munkanapon** készülnek el. (1 pont)

c) $S_{21} = \frac{2 \cdot 220 + (21-1) \cdot 10}{2} \cdot n$ (1 pont)

$S_{21} = 6720$ (1 pont)

Az utolsó munkanapon $7100 - 6720 =$ **380** méter utat aszfaltoztak le. (1 pont)

d) Egyenes arányosság esetén 440 métert kellene aszfaltozni a 21. napon. (1 pont)

$a_{21} = 2 \cdot 220 + 20 \cdot 10 = 420$ (1 pont)

Nem teljesül az egyenes arányosság. (1 pont)

Összesen: 17 pont

8) Egy mértani sorozat második eleme 32, hatodik eleme 2. Mekkora a sorozat hányadosa? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

Megoldás:

A feltételből $32q^4 = 2$, ahonnan (1 pont)

$\boldsymbol{q_1 = \frac{1}{2}\left(= \sqrt[4]{0{,}0625}\right)}$ (1 pont)

$\boldsymbol{q_2 = -\frac{1}{2}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

9)

a) Határozza meg azt a háromjegyű számot, amelyről a következőket tudjuk:
- **számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő tagjai;**
- **a szám értéke 53,5-szerese a számjegyei összegének;**
- **ha kivonjuk belőle az első és utolsó jegy felcserélésével kapott háromjegyű számot, akkor 594 az eredmény. (10 pont)**

b) Sorolja fel azokat a 200-nál nagyobb háromjegyű számokat, amelyeknek számjegyei a felírás sorrendjében növekvő számtani sorozat tagjai! (4 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a b) kérdésben szereplő számok közül véletlenszerűen egyet kiválasztva, a kiválasztott szám osztható 9-cel! (3 pont)

Megoldás:

a) A háromjegyű szám számjegyei: $a-d$; a; $a+d$, ahol a a számtani sorozat középső tagja, d a differencia. (1 pont)

Felírható: $100(a-d)+10a+a+d = 53{,}5\cdot 3a$ (1) (2 pont)

és $\left[100(a-d)+10a+a+d\right]-\left[100(a+d)+10a+a+d\right] = 594$ (2) (2 pont)

A (2) egyenletből: $-198d = 594$ (1 pont)

ahonnan $d = -3$ (1 pont)

Az (1) egyenletből: $111a - 99d = 53{,}5\cdot 3a$ (1 pont)

ahonnan $a = -2d$ (1 pont)

$a = -2\cdot(-3) = 6$ a középső számjegy, a háromjegyű szám: **963**. (1 pont)

A feladat úgy is megoldható, ha a számtani sorozat első tagját jelöljük a-val.

b) A megfelelő számok:
234; 345; 456; 567; 678; 789; 246; 357; 468; 579; 258; 369. (4 pont)

c) Közülük 9-cel osztható: 234; 369; 468; 567. (1 pont)

A jó esetek száma 4; az összes eset 12. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\boldsymbol{p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

10) Egy számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 60. Mennyi a sorozat első öt tagjának összege? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$S_5 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (1 pont)

$S_5 = \frac{60}{2} \cdot 5$ (1 pont)

$\boldsymbol{S_5 = 150}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3 pont)

b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3 pont)

Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon mindennap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.

c) Hány nap alatt készült-el a 2 méter hosszúra tervezett sál? (11 pont)

***Megoldás*:**

a) A lehetséges sorrendek száma: 5! (2 pont)

Az unokák 120-féle sorrendben kaphatják meg a levelet. (1 pont)

b) Az utolsó hétre az 5 unoka bármelyike egyenlő valószínűséggel kerül. (2 pont)

A keresett valószínűség tehát: $\boldsymbol{\frac{1}{5}}$ (1 pont)

c) Az egyes napokon kötött darabok hosszúságai mértani sorozatot alkotnak. (1 pont)

A mértani sorozatban $a_1 = 8,\ q = 1,2$ (2 pont)

A sál teljes hossza a mértani sorozat első n elemének összegeként adódik. (1 pont)

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (1 pont)

$200 = 8 \cdot \frac{1,2^n - 1}{0,2}$ (1 pont)

$5 + 1 = 1,2^n$ (1 pont)

$n = \frac{\lg 6}{\lg 1,2}$ (2 pont)

$n \approx 9,83$ (1 pont)

A sál a tizedik napon készül el. (1 pont)

Összesen: 17 pont

12) Egy számtani sorozat első tagja –3, differenciája –17. Számítsa ki a sorozat 100-adik tagját! Számítását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

$a_1 = -3 \quad d = -17$

$a_{100} = -3 + 99 \cdot (-17) = \mathbf{-1686}$ (2 pont)

A sorozat 100-adik tagja: –1686. (1 pont)

Összesen: 3 pont

13) Egy mértani sorozat első tagja –3, a hányadosa –2. Adja meg a sorozat ötödik tagját! Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

Megoldás:

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$ (1 pont)

$a_5 = (-3) \cdot (-2)^{(5-1)}$ (1 pont)

A sorozat ötödik tagja: **–48**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

14) Egy mértani sorozat első tagja –5, hányadosa –2. Számítsa ki a sorozat tizenegyedik tagját! Indokolja a válaszát! (1 pont)

Megoldás:

$a_{11} = (-5) \cdot (-2)^{10}$

$\boldsymbol{a_{11} = -5120}$ (1 pont)

15) Angéla a pihenőkertjük egy részére járólapokat fektetett le. Az első sorba 8 járólap került, minden további sorba kettővel több, mint az azt megelőzőbe. Összesen 858 járólapot használt fel.

a) Hány sort rakott le Angéla? (6 pont)

A járólapokat 225-ös csomagolásban árusítják. Minden csomagban bordó színű a járólapok 16 %-a, a többi szürke. Angéla 4 csomag járólapot vásárolt. Csak bordó színű lapokat rakott le az első és az utolsó sorba. Ezen kívül a többi sor két szélén levő 1–1 járólap is bordó, az összes többi lerakott járólap szürke.

b) Adja meg, hogy hány szürke és hány bordó járólap maradt ki a lerakás után! (6 pont)

Megoldás:

a) (A soronként elhelyezett járólapok számát annak a számtani sorozatnak egymást követő tagjai adják, amelyre:) $a_1 = 8, \ d = 2$. (1 pont)

$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n =$ (1 pont)

$= 858$ (1 pont)

$n^2 + 7n - 858 = 0$ (1 pont)

$n_1 = 26$ és $n_2 = -33$ (A megfelelő pozitív egész szám $\boldsymbol{n = 26}$.) (1 pont)

Angéla 26 teljes sort rakott le (ez a megoldás a feltételeknek megfelel). (1 pont)

b) A bordó járólapok száma 144. (2 pont)
A huszonhatodik sorba $a_{26} = a_1 + 25d = 8 + 50 = 58$ járólap került. (1 pont)
A burkolt rész peremére $8 + 58 + 2 \cdot 24 = 114$ bordó színű került. (1 pont)
30 bordó járólap maradt ki. (1 pont)
Összesen $900 - 858 = 42$ járólap maradt ki, ezek közül **12 szürke és 30 bordó**. (1 pont)
Összesen: 12 pont

16)

a) Egy számtani sorozat első tagja –7, a nyolcadik tagja 14. Adja meg *n* lehetséges értékeit, ha a sorozat első *n* tagjának összege legfeljebb 660. (9 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja ugyancsak –7, a negyedik tagja –189. Mekkora az *n*, ha az első *n* tag összege –68887? (8 pont)

Megoldás:

a) $a_8 = a_1 + 7d$, ahol d a sorozat differenciája.
$14 = -7 + 7d$ (1 pont)
$d = 3$ (1 pont)
$660 \geq S_n$ (1 pont)
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \frac{-14 + 3 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$ (1 pont)
$3n^2 - 17n - 1320 \leq 0$ (1 pont)
Az egyenlőtlenség bal oldalához kapcsolható másodfokú függvénynek minimuma van ($a = 3 > 0$, vagy grafikonra hivatkozás stb.), (1 pont)
zérushelyei: 24 és $-\frac{55}{3}$ (ami negatív). (1 pont)
$\left(-\frac{55}{3} < 0 <\right) n \leq 24$ (1 pont)
Mivel a feladatunkban n pozitív egész, n lehetséges értékei: **1, 2, ..., 23, 24** (1 pont)

b) $a_4 = a_1 \cdot q^3$, ahol q a sorozat differenciája.
$-189 = -7 \cdot q^3$ (1 pont)
$q = 3$ (1 pont)
$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = -7 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$ (1 pont)
$-68887 = -7 \cdot \frac{3^n - 1}{2}$ (1 pont)
$3^n = 19683$ (2 pont)
Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton), (1 pont)
$\boldsymbol{n = 9}$ (1 pont)
Összesen: 17 pont

17) Melyik a 201-edik pozitív páros szám? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az $a_1 = 2$ első tagú, $d = 2$ differenciájú számtani sorozat felismerése. (1 pont)

$a_{201} = 2 + 200 \cdot 2 =$ (1 pont)

$= \mathbf{402}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

18) Egy számtani sorozat ötvenedik tagja 29, az ötvenegyedik tagja 26. Számítsa ki a sorozat első tagját! (3 pont)

Megoldás:

$d = -3$ (1 pont)

$a_{50} = a_1 + 49d$ (1 pont)

$a_1 = \mathbf{176}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

19) Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa (-2). Adja meg a sorozat első hat tagjának összegét! (2 pont)

Megoldás:

$S_n = n \cdot a_1 + d \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, ebből: $\boldsymbol{S_6 = -63}$ (2 pont)

20) Az újkori olimpiai játékok megrendezésére 1896 óta kerül sor, ebben az évben tartották az első (nyári) olimpiát Athénban. Azóta minden negyedik évben tartanak nyári olimpiát, és ezeket sorszámmal látják el. Három nyári olimpiát (az első és a második világháború miatt) nem tartottak meg, de ezek az elmaradt játékok is kaptak sorszámot.

a) Melyik évben tartották a 20. nyári olimpiai játékokat? (2 pont)

b) Számítsa ki, hogy a 2008-ban Pekingben tartott nyári olimpiának mi volt a sorszáma! (2 pont)

A nyári olimpiák szervezőinek egyik fő bevételi forrása a televíziós jogok értékesítéséből származó bevétel. Rendelkezésünkre állnak a következő adatok (millió dollárban számolva):

Olimpia sorszáma	20.	22.
Bevétel a televíziós jogok értékesítéséből	75	192

Eszter úgy véli, hogy a televíziós jogok értékesítéséből származó bevételek – a 20. olimpiától kezdve – az egymás utáni nyári olimpiákon egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Marci szerint ugyanezek a számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A saját modelljük alapján mindketten kiszámolják, hogy mennyi lehetett a televíziós jogok értékesítéséből származó bevétel a 27. nyári olimpián. Ezután megkeresik a tényleges adatot, amely egy internetes honlap szerint 1383 (millió dollár).

c) Számítsa ki, hogy Eszter vagy Marci becslése tér el kisebb mértékben a 27. nyári olimpia tényleges adatától! (8 pont)

Megoldás:

a) A nyári olimpiák évszámai egy olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1896, különbsége pedig 4. (1 pont)
$a_{20} = 1896 + 19 \cdot 4 = 1972$ vagyis **1972**-ben tartották a 20. nyári olimpiát. (1 pont)

b) $1896 + (n-1) \cdot 4 = 2008$, tehát $n =$ **29.** nyári olimpiát tartották 2008-ban. (2 pont)

c) (A megadott két adatot egy számtani sorozat első, illetve harmadik tagjának tekintve:) $75 + 2d = 192$, amiből $d = 85$ (2 pont)
Így, Eszter becslése a sorozat nyolcadik tagjára:
$75 + 7d = 484{,}5$ (millió dollár) (1 pont)

(A megadott két adatot egy mértani sorozat első illetve harmadik tagjának tekintve:) $75q^2 = 192$, amiből $(q > 0$ miatt$)$ $q = 1{,}6$ (2 pont)

Így Marci becslése a sorozat nyolcadik tagjára: $75q \approx 2013$ (millió dollár) (1 pont)

$1383 - 485 = 898$ és $2013 - 1383 = 630$, vagyis **Marci becslése tér el kevésbé** a tényleges adattól. (2 pont)

Összesen: 12 pont

21)

a) Egy számtani sorozat első tagja 2, első hét tagjának összege 45,5. Adja meg a sorozat hatodik tagját! (5 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja 5, második és harmadik tagjának összege 10. Adja meg a sorozat első hét tagjának az összegét! (7 pont)

Megoldás:

a) A sorozat differenciáját *d*-vel jelölve: $45{,}5 = \frac{2 \cdot 2 + (7-1)d}{2} \cdot 7$ (1 pont)

$13 = 4 + 6d$ (1 pont)

$d = 1{,}5$ (1 pont)

$a_6 = 2 + 5 \cdot 1{,}5$ (1 pont)

A sorozat 6. tagja **9,5**. (1 pont)

b) A sorozat hányadosát *q*-val jelölve: $5q + 5q^2 = 10$ (1 pont)

$q_1 = -2$; $q_2 = 1$ (2 pont)

Ha a hányados –2, akkor a sorozat első hét tagjának összege: $S_7 = 5 \cdot \frac{(-2)^7 - 1}{-2 - 1} =$ **215** (2 pont)

Ha a hányados 1, akkor a sorozat tagjai megegyeznek, így ebben az esetben az első hét tag összege $(7 \cdot 5) =$ **35.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

22) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja és differenciája is 4. Adja meg a sorozat 26. tagját! (2 pont)

Megoldás:

$a_{26} =$ **104** (2 pont)

23) A $\{b_n\}$ mértani sorozat hányadosa 2, első hat tagjának összege 94,5. Számítsa ki a sorozat első tagját! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$94{,}5 = b_1 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1}$ (1 pont)

$94{,}5 = b_1 \cdot 63$ (1 pont)

$\boldsymbol{b_1 = 1{,}5}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

24) Egy számtani sorozat első tagja 5, második tagja 8.

a) Adja meg a sorozat 80. tagját! (2 pont)

b) Tagja-e a fenti sorozatnak a 2005? (Válaszát számítással indokolja!) (3 pont)

c) A sorozat első *n* tagját összeadva az összeg 1550. Határozza meg *n* értékét! (7 pont)

Megoldás:

a) $a_1 = 5$ és $a_2 = 8$

$d = a_2 - a_1 = 3$ (1 pont)

$a_{80} = a_1 + 79d$

$\boldsymbol{a_{80} = 242}$. (1 pont)

b) Ha 2005 a sorozat *n*-edik tagja, akkor $2005 = 5 + (n-1) \cdot 3$ (1 pont)

$2000 = (n-1) \cdot 3$ azaz $\frac{2003}{3} = n$ (1 pont)

Mivel $\frac{2003}{3} \notin \mathbb{N}^+$, a **2005 nem tagja a sorozatnak**. (1 pont)

c) Az első n tag összege: $S_n = \frac{5 + 5 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n = 1550$ (2 pont)

Ebből $(10 + 3n - 3) \cdot n = 3100$, azaz $3n^2 + 7n - 3100 = 0$. (1 pont)

$n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 37200}}{6}$

$n_1 = 31$ (1 pont)

$n_2 = \frac{-200}{6}$ (1 pont)

Mivel $n_2 \notin \mathbb{N}^+$, $n_1 = 31$ lehet csak a válasz. (1 pont)

Ellenőrzés: $\frac{10 + 30 \cdot 3}{2} \cdot 31 = 1550$, **tehát 31 tagot kell összeadni**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

25)

a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! (5 pont)

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! (7 pont)

Megoldás:

a) A sorozat tagjai: 6; 6 + d; 6 + 2d; 1623 (1 pont)
$6 + 3d = 1623$ (1 pont)
$d = 539$ (1 pont)
Az első beiktatott szám: 545 (1 pont)
A második beiktatott szám: **1084** (1 pont)

b) A feltételeknek megfelelő számok: 8; 12; 16; …; 1620 (2 pont)
Ezek a számok egy számtani sorozat egymást követő tagjai (1 pont)
$1620 = 8 + 4 \cdot (n-1)$ (1 pont)
$n = 404$ (1 pont)
$S_n = \frac{8+1620}{2} \cdot 404$ (1 pont)
$\boldsymbol{S_n = 328856}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

26) Egy számtani sorozat hatodik tagja 15, kilencedik tagja 0. Számítsa ki a sorozat első tagját! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A számtani sorozat különbségét d-vel jelölve adódik:
$3d = -15$ (1 pont)
amiből $d = -5$. (1 pont)
A sorozat első tagja **40**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

27) A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer $\left(\mathbf{2 \cdot 10^{-6} m}\right)$, átmérője 0,5 mikrométer $\left(\mathbf{5 \cdot 10^{-7} m}\right)$.

a) Számítsa ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításainak eredményét m^3-ben, illetve m^2-ben, normálalakban adja meg! (5 pont)

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.

b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? (4 pont)

A baktériumok számát a tápoldatban t perc elteltével a $\boldsymbol{B(t) = 3000000 \cdot 2^{\frac{t}{15}}}$ összefüggés adja meg.

c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

Megoldás:

a) A henger alapkörének sugara $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ (m), (1 pont)
térfogata $V = \left(2{,}5 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}$, (1 pont)
normálalakban $\boldsymbol{V \approx 3{,}9 \cdot 10^{-19}\left(\mathbf{m^3}\right)}$. (1 pont)
A henger felszíne:
$A = 2 \cdot \left(2{,}5 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot \pi + 5 \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}$, (1 pont)
normálalakban $\boldsymbol{A \approx 3{,}5 \cdot 10^{-12}\left(\mathbf{m^2}\right)}$. (1 pont)

b) A kólibaktériumok száma 1,5 óra alatt 6-szor duplázódott, (2 pont)
ezért 1,5 óra után $3000000 \cdot 2^6 =$ (1 pont)
$=$ **192** millió lesz a baktériumok száma. (1 pont)

c) A baktériumok száma x perc múlva lesz 600 millió. Meg kell oldanunk a $3 \cdot 2^{\frac{x}{15}} = 600$ egyenletet. (2 pont)

$2^{\frac{x}{15}} = 200$ (1 pont)

Átalakítva:

$\frac{x}{15} = \log_2 200$ (2 pont)

$x = 15 \cdot \frac{\lg 200}{\lg 2}$ (1 pont)

amiből $\boldsymbol{x \approx 115}$ adódik, tehát (1 pont)

115 perc múlva lesz a baktériumok száma 600 millió. (1 pont)

Összesen: 17 pont

28)

a) Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 3. A sorozat első n tagjának összege 440. Adja meg n értékét! (5 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja 5, hányadosa 1,2. Az első tagtól kezdve legalább hány tagot kell összeadni ebben a sorozatban, hogy az összege elérje az 500-at? (7 pont)

Megoldás:

a) A szöveg alapján felírható egyenlet:

$440 = \frac{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$. (1 pont)

Ebből $3n^2 + 7n - 880 = 0$. (2 pont)

A negatív gyök $\left(-\frac{55}{3}\right)$ a feladatnak **nem** megoldása. (1 pont)

$\boldsymbol{n = 16}$ (1 pont)

b) Keressük a következő egyenlet megoldását:

$500 = 5 \cdot \frac{1,2^n - 1}{1,2 - 1}$. (1 pont)

$21 = 1,2^n$ (2 pont)

(mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve)

$\lg 21 = \lg 1,2^n$ (1 pont)

$\lg 21 = n \cdot \lg 1,2$ (1 pont)

$\boldsymbol{n \approx 16,7}$ (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy a sorozatnak legalább **17** tagját kell összeadni, hogy az összeg elérje az 500-at. (1 pont)

Összesen: 12 pont

29) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben $1,5\ \text{m}^2$-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a $27\ \text{m}^2$-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

Megoldás:

a) Ha naponta x-szeresére nőtt az algás terület, akkor:

$1,5 \cdot x^7 = 27$. (1 pont)

$x = \sqrt[7]{18} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{1,5}$ (1 pont)

Az algás terület naponta körülbelül a másfélszeresére növekedett. (1 pont)

b) A medence alaplapja egy 2,4 m oldalhosszúságú szabályos hatszög, ennek területe $T_{\text{alaplap}} = 6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$ (2 pont)

$\approx 14,96\left(\text{m}^2\right)$ (1 pont)

A medence oldalfalainak összterülete

$T_{\text{oldalfal}} = 6 \cdot 2,4 \cdot 0,4 = 5,76\left(\text{m}^2\right)$. (1 pont)

Így összesen körülbelül $\mathbf{20,7\ m^2}$ felületet burkoltak csempével. (1 pont)

A medence térfogata

$V = T_{\text{alaplap}} \cdot m = 6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 0,4 \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{5,986\left(m^3\right)}$. (1 pont)

Körülbelül **5986 liter** víz fér el a medencében. (1 pont)

c) Ha például a kék és a sárga színt választották ki, akkor $\binom{6}{3}=20$ különböző módon választható ki az a három vízsugár, amelyet a kék színnel világítanak meg (a másik három fénysugarat ugyanekkor sárga színnel világítják meg). (2 pont)

A megvilágításhoz két színt háromféleképpen választhatnak ki (kék-sárga, kék-piros, piros-sárga). (1 pont)

$3\cdot\binom{6}{3}=60$ (1 pont)

Azaz **60** különböző megvilágítás lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

30) Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot egy évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel egy év elteltével, ha év közben nem változtatott a lekötésen? (2 pont)

Megoldás:

156000 Ft-ot vehet fel Péter egy év elteltével. (2 pont)

31) A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az A Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)

a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott? (3 pont)

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) Hány százalékos volt a B Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel? (10 pont)

c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.) (4 pont)

Megoldás:

a) A felvehető összeg: $700000\cdot 1{,}06^2$ (2 pont)

ami **786520 Ft.** (1 pont)

b) (Az első évben x %-os volt a kamat.)

Az első év végén a számlán lévő összeg:

$800000\left(1+\frac{x}{100}\right)$. (2 pont)

A második év végén a felvehető összeg:

$800000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+3}{100}\right)=907200$ (2 pont)

$x^2+203x-1040=0$ (3 pont)

$x_1=5$ (1 pont)

a másik gyök negatív (–208), nem felel meg. (1 pont)
Az első évben 5%-os volt a kamat. (1 pont)
A feladat megoldható mértani sorozat felhasználásával is.

c) Ha a két évvel ezelőtti ár y forint, akkor egy év múlva $1,04 \cdot y$, (1 pont)
két év múlva $1,04^2 \cdot y = 907200$ forint az ár. (1 pont)
$y = \frac{907200}{1,04^2} (\approx 838757)$ (1 pont)
Két évvel korábban $\approx$ **838757** Ft-ot kellett volna fizetniük. (1 pont)

Összesen: 17 pont

32) Csilla és Csongor ikrek, és születésükkor mindkettőjük részére takarékkönyvet nyitottak a nagyszülők. 18 éves korukig egyikőjük számlájáról sem vettek fel pénzt.
Csilla számlájára a születésekor 500 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg évi 8 %-kal kamatozik.

a) Legfeljebb mekkora összeget vehet fel Csilla a 18. születésnapján a számlájáról, ha a kamat mindvégig 8 %? (A pénzt forintra kerekített értékben fizeti ki a bank.) (5 pont)

Csongor számlájára a születésekor 400 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg félévente kamatozik, mindig azonos kamatlábbal.

b) Mekkora ez a félévenkénti kamatláb, ha tudjuk, hogy Csongor a számlájáról a 18. születésnapján 2 millió forintot vehet fel? (A kamatláb mindvégig állandó.) A kamatlábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Csilla számláján a 8%-os évi kamat a nyitótőke évi 1,08-szoros növekedését jelenti. (1 pont)
A 18. születésnapon 18. alkalommal növekszik így a tőke, (1 pont)
ezért Csilla 18. születésnapjára a nyitótőke
$S_{Csilla} = 500000 \cdot 1,08^{18} = 1998009,75$-ra változna. (2 pont)
Csilla 18. születésnapján **1998010 Ft**-ot kaphatna. (1 pont)

b) Csongor számláján a p %-os kamat évente
$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$-szeres évi növekedést eredményez (1 pont)
18 éven keresztül (1 pont)
A 18. születésnapján Csongor betétjén összesen
$S_{\text{Csongor}} = 400000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{36} = 2000000$ Ft van. (2 pont)
Innen
$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{36} = 5$, vagyis $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{36} = \sqrt[36]{5} \approx 1,04572$. (2 pont)
A keresett kamatláb tehát **4,57%.** (1 pont)

Összesen: 12 pont

33) Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4 %-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben. 2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben? (4 pont)

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben? (4 pont)

Válaszait százezerre kerekítve adja meg!

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinek ugyanakkora százalékával csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az előrejelzés szerint az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során? Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

d) Elfogadjuk az előrejelzés adatát, majd azt feltételezzük, hogy 2013 után évente 3 %-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 76 %-a? (4 pont)

Megoldás:

a) Az évenkénti növekedés szorzószáma (növekedési ráta) 1,054. (1 pont)
2003-at követően a 2007-es évvel bezárólag 4 év telik el. (1 pont)
$41,9 \cdot 1,054^4 \left(\approx 51,71\right)$ (1 pont)
A 2007-es évben kb. **51,7 millió** autót gyártottak. (1 pont)

b) A 2003-at megelőző évekre évenként 1,011-del kell osztani. (1 pont)
1997 után a 2003-as évvel bezárólag 6 év telik el. (1 pont)
$\frac{41,9}{1,011^6} \left(\approx 39,24 \text{ millió}\right)$ (1 pont)
1997-ben kb. **39,2 millió** autót gyártottak. (1 pont)

c) Az évenkénti csökkenés szorzószáma legyen x.
2008 után a 2013-as évvel bezárólag 5 év telik el.
$48,8 \cdot x^5 = 38$, (1 pont)
$x^5 \approx 0,779$ (1 pont)
$x \approx \sqrt[5]{0,779} \left(\approx 0,951\right)$ (1 pont)
Az évenkénti százalékos csökkenés kb. **4,9 %.** (1 pont)

d) Ha 2013 után y év múlva lesz 76 %-a az éves autószám, akkor $0,97^y \approx 0,76$.
Mindkét oldal tízes alapú logaritmusa is egyenlő. (1 pont)
$y \lg 0,97 = \lg 0,76$ (1 pont)
$y \approx 9,01$ (1 pont)
Kb. 9 év múlva, tehát **2022-ben** csökkenne az évi termelés a 2013-as évinek a 76 %-ára. (1 pont)

Összesen: 17 pont

34) Egy autó ára újonnan 2 millió 152 ezer forint, a megvásárlása után öt évvel ennek az autónak az értéke 900 ezer forint.

a) A megvásárolt autó tulajdonosának a vezetési biztonságát a vásárláskor 90 ponttal jellemezhetjük. Ez a vezetési biztonság évente az előző évinek 6 %-ával nő. Hány pontos lesz 5 év elteltével az autótulajdonos vezetési biztonsága? Válaszát egész pontra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Az első öt év során ennek az autónak az értéke minden évben az előző évi értékének ugyanannyi százalékával csökken. Hány százalék ez az éves csökkenés? (8 pont)
Válaszát egész százalékra kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) A vezetési biztonság pontjai egy $t_0 = 90$, $q = 1{,}6$ hányadosú mértani sorozat tagjai. (1 pont)

(Ebben a sorozatban) $t_5 = 90 \cdot 1{,}06^5$ (pont). (1 pont)

$90 \cdot 1{,}06^5 \approx 120{,}44$ (1 pont)

tehát 5 év után a vezetési biztonság **120 pontos**. (1 pont)

b) Legyen a csökkenési ráta x. (1 pont)

Ekkor $2{,}152x^5 = 0{,}9$ (2 pont)

$x^5 = \frac{900}{2152} (\approx 0{,}4182)$, (1 pont)

amiből $x = \sqrt[5]{\frac{900}{2152}}$ (1 pont)

$x \approx 0{,}84$, (1 pont)

$1 - 0{,}84 = 0{,}16$, (1 pont)

tehát évente **16 %-kal** csökken az autó értéke. (1 pont)

A feladat megoldható úgy is, ha a kamatos kamatszámításhoz hasonló képletet használunk.

Összesen: 12 pont

35) Egy sejttenyészetben 2 naponta kétszereződik meg a sejtek száma. Az első nap kezdetén 5000 sejtből állt a tenyészet. Hány sejt lesz a tenyészetben 8 nap elteltével?
Számításait részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A 8 nap alatt 4-szer kétszereződött meg a sejtek száma (s), (1 pont)

$s = 5000 \cdot 2^4$ (1 pont)

$\boldsymbol{s = 80000}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) A 2000 eurós tőke évi 6 %-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra? Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

$2000 \cdot 1{,}06^x = 4024$. (1 pont)

x kiszámítása.

$\lg 2000 + x \lg 1{,}06 = \lg 4024$

$x = \dfrac{\lg 4024 - \lg 2000}{\lg 1{,}06} \approx 11{,}998$. (2 pont)

12 teljes év alatt. (1 pont)

Összesen: 4 pont

37) Egy számtani sorozat első tagja 56, differenciája -4.

a) Adja meg a sorozat első 25 tagjának összegét! (2 pont)

b) Számítsa ki az n értékét és a sorozat n-edik tagját, ha az első n tag összege 408. (8 pont)

Egy mértani sorozat első tagja 10^{25}, hányadosa $0{,}01$.

c) Hányadik tagja ennek a sorozatnak a 100 000? (7 pont)

Megoldás:

a) A számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:

$S_{25} = \dfrac{2 \cdot 56 + 24 \cdot (-4)}{2} \cdot 25 =$ (1 pont)

$= \mathbf{200}$ (1 pont)

b) A számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:

$408 = \dfrac{2 \cdot 56 + (n-1) \cdot (-4)}{2} \cdot n$. (1 pont)

A műveleteket elvégezve: $816 = 112n - 4n^2 + 4n$. (2 pont)

A másodfokú egyenlet: $4n^2 - 116n + 816 = 0$, (1 pont)

ennek gyökei, vagyis n lehetséges értékei: 12 és 17. (2 pont)

Ha $n = 12$, akkor $a_{12} = 56 + 11 \cdot (-4) = \mathbf{12}$. (1 pont)

Ha $n = 17$, akkor $a_{17} = 56 + 16 \cdot (-4) = \mathbf{-8}$. (1 pont)

c) A mértani sorozat n-edik tagjának kiszámítására vonatkozó képlet alapján:

$100000 = 10^{25} \cdot 0{,}01^{n-1}$. (1 pont)

Ebből $10^5 = 10^{25} \cdot \left(10^{-2}\right)^{n-1}$. (2 pont)

A hatványozás azonosságainak felhasználásával: $10^{-20} = 10^{-2n+2}$. (2 pont)

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $-20 = -2n + 2$. (1 pont)

$\boldsymbol{n = 11}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

38) Egy bomlási folyamatban a radioaktív részecskék száma kezdetben $6 \cdot 10^{23}$, amely érték percenként az előző érték századrészére csökken. Számítsa ki a radioaktív részecskék számát 10 perc elteltével! (2 pont)

Megoldás:

$\mathbf{6 \cdot 10^3 = 6000}$ (2 pont)

39) Zsuzsa nagyszülei elhatározzák, hogy amikor unokájuk 18 éves lesz, akkor vásárlási utalványt adnak neki ajándékba. Ezért Zsuzsa 18. születésnapja előtt 18 hónapon keresztül minden hónapban félretesznek valamekkora összeget úgy, hogy Zsuzsa 18. születésnapján éppen 90 000 forintjuk legyen erre a célra. Úgy tervezik, hogy az első alkalom után mindig 200 forinttal többet tesznek félre, mint az előző hónapban.

a) Terveik szerint mennyi pénzt tesznek félre az első, és mennyit az utolsó alkalommal? (7 pont)

Zsuzsa egyik testvére hét évvel idősebb a másik testvérénél. A két testvér életkorának mértani közepe 12.

b) Hány éves Zsuzsa két testvére? (5 pont)

Megoldás:

a) Az egyes hónapokban félretett pénzösszegek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja (Ft-ban) a_1, (1 pont)

differenciája pedig 200. (1 pont)

A sorozat első 18 tagjának összege:

$\frac{2a_1 + 17 \cdot 200}{2} \cdot 18 = 90000$, (2 pont)

amiből $a_1 = 3300$. (1 pont)

A 18. tag $3300 + 17 \cdot 200 = 6700$. (1 pont)

Így az első alkalommal **3300 Ft-ot**, az utolsó alkalommal **6700 Ft-ot** tettek félre. (1 pont)

b) Zsuzsa fiatalabb testvérének életkorát jelölje x, ekkor másik testvére $x+7$ éves.

A feladat szövege alapján: $\sqrt{(x+7) \cdot x} = 12$. (1 pont)

Ebből $x^2 + 7x - 144 = 0$, (1 pont)

amiből vagy $x = -16$, de ez az érték nem megoldása a feladatnak. (1 pont)

vagy $x = 9$. (1 pont)

Zsuzsa egyik testvére **9**, a másik **16** éves. (1 pont)

Összesen: 12 pont

40) Egy számtani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; *a* és 18.

a) Határozza meg az *a* értékét és a sorozat differenciáját! (3 pont)

Egy mértani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; *b* és 18.

b) Határozza meg a *b* értékét és a sorozat hányadosát! (5 pont)

A 32; *c* és 18 számokról tudjuk, hogy a három szám átlaga kettővel kisebb, mint a mediánja, továbbá $32 > c > 18$.

c) Határozza meg a *c* értékét! (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A számtani sorozat egyik tulajdonsága, hogy a sorozat bármely tagja egyenlő a tőle egyenlő távolságra lévő tagok számtani közepével, vagyis $a = \frac{32+18}{2} = \mathbf{25}$. (2 pont)

A sorozat differenciája bármely tagjának és az azt megelőző tagnak a különbsége, ezért $d = 25 - 32 = \mathbf{-7}$ (1 pont)

b) A mértani sorozat egyik tulajdonsága, hogy bármely tagjának és az azt megelőző tagnak a hányadosa egyenlő.

Ebből adódik, hogy $\frac{b}{32}=\frac{18}{b}$. (1 pont)

Az egyenletet rendezve kijön, hogy $\boldsymbol{b_1=24}$ és $\boldsymbol{b_2=-24}$. (2 pont)

Ha $b=24$, akkor a sorozat kvóciense $q_1=\frac{24}{32}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ (1 pont)

Ha $b=-24$, akkor a sorozat kvóciense $q_2=\frac{-24}{32}=\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$. (1 pont)

c) A három szám mediánja c. (1 pont)

Átlaga: $\frac{32+c+18}{3}$. (1 pont)

Ezután az alábbi összefüggés írható fel a szöveg alapján: $\frac{32+c+18}{3}=c-2$. (1 pont)

Az egyenletet rendezzük, és a megoldás $\boldsymbol{c=28}$ lesz. (2 pont)

Összesen: 13 pont

41) Egy számtani sorozat negyedik tagja 7, ötödik tagja –5. Határozza meg a sorozat első tagját! Megoldását részletezze! (3 pont)

***Megoldás*:**

A számtani sorozat differenciája egyenlő bármely tagjának és az azt megelőző tagnak a különbségével, vagyis $d=a_5-a_4=-5-7=\boldsymbol{-12}$. (1 pont)

A sorozat első tagja $a_1=a_4-3d=7-3\cdot(-12)=\boldsymbol{43}$. (2 pont)

Összesen: 3 pont

42) A kereskedelemmel foglalkozó cégek között több olyan is van, amely állandóan emelkedő fizetéssel jutalmazza a dolgozók munkavégzését. Péter munkát keres, és két cég ajánlata közül választhat:
I. ajánlat: Az induló fizetés 200 000 Ft, amit havonta 5000 Ft-tal emelnek négy éven át.
II. ajánlat: Az induló fizetés 200 000 Ft, amit havonta 2%-kal emelnek négy éven át.

a) Melyik ajánlatot válassza Péter, ha tervei szerint négy évig a választott munkahelyen akar dolgozni, és azt az ajánlatot szeretné választani, amelyik a négy év alatt nagyobb összjövedelmet kínál? (7 pont)

A Péter szerződésében szereplő napi 8 óra munkaidő rugalmas, azaz lehetnek olyan napok, amikor 8 óránál többet, és olyanok is, amikor kevesebbet dolgozik. 6 óránál kevesebbet, illetve 10 óránál többet sosem dolgozik egy nap. Az alábbi táblázatban Péter januári munkaidő-kimutatásának néhány adata látható.

Napi munkaidő (óra)	6	7	8	9	10
Hány munkanapon dolgozott ennyi órát?	4	5			3

b) Számítsa ki a táblázatból hiányzó két adatot, ha tudjuk, hogy január hónap 22 munkanapján Péter átlagosan naponta 8 órát dolgozott! (6 pont)

***Megoldás*:**

a) Az I. ajánlatban Péter havi fizetése egy 5000 differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai, ahol a sorozat első tagja $200\,000$. Így az első 48 tag összege $S_{48} = \frac{2 \cdot 200\,000 + 47 \cdot 5000}{2} \cdot 48 = \mathbf{15\ 240\ 000\,Ft}$. (3 pont)

A II. ajánlatban egy mértani sorozatot írhatunk fel, melynek első tagja $200\,000$, kvóciense $1{,}02$. Itt az első 48 tag összege: $S'_{48} = 200\,000 \cdot \frac{1{,}02^{48} - 1}{1{,}02 - 1} = \mathbf{15\ 870\ 700\,Ft}$. (3 pont)

Mivel II. ajánlat során a négy év alatti összjövedelem nagyobb, a II. ajánlatot érdemes választania. (1 pont)

b) Jelöljük x-szel a 8 óra munkával töltött napok számát, illetve $22 - (4 + 5 + 3 + x) = 10 - x$ a 9 óra munkával töltött napok számát. (2 pont)

Tudjuk, hogy átlagosan naponta 8 órát dolgozott, ezért az alábbi egyenletet írhatjuk fel.

$8 = \frac{4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + x \cdot 8 + (10 - x) \cdot 9 + 3 \cdot 10}{22}$, amelyből $x = 3$ (3 pont)

Vagyis Péter **3** napon dolgozott 8 órát, és **7** napon dolgozott 9 órát. (1 pont)

Összesen: 13 pont

43) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)

1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg: $f(x) = 51 \cdot 1{,}667^x$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózaból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

Megoldás:

a) $\frac{12000000}{7000000} \approx 1,714$ (1 pont)

Kb. **71%-kal nőtt** az előfizetések száma. (1 pont)

b) Az eltelt évek száma: $x = 8$. (1 pont)

$51 \cdot 1,667^8 \approx 3041$ (1 pont)

3 millió 41 ezer mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén. (1 pont)

c) A hívások száma egyik hónapról a másikra 1,065-szeresére nőtt. (1 pont)

1991 januárja óta eltelt hónapok számát jelölje n.

$350000 \cdot 1,065^n = 100\,000\,000$ (1 pont)

$n = \log_{1,065} \frac{100000000}{350000}$, (1 pont)

amiből $n \approx 90$. (1 pont)

Az eltelt évek száma: $\frac{90}{12} = 7,5$. (1 pont)

Tehát **1998-ban** lehetett az a hónap, amikor a mobilhívások száma először elérte a 100 milliót. (1 pont)

d) A megadott időszakban a vezetékes hívások száma mértani sorozatot alkot, melynek első tagja 4200 (millió darab) és hányadosa $q = 0,92$. (2 pont)

$4200 \cdot 0,92^9 \approx 1983,08$ (1 pont)

$\approx$1983 millió vezetékes hívást indítottak 2009-ben. (1 pont)

2000 eleje és 2009 vége között összesen

$4200 \cdot \frac{0,92^{10} - 1}{0,92 - 1} \approx 29694,6$ (1 pont)

$\approx$**29695 millió** vezetékes hívást indítottak. (1 pont)

Összesen: 17 pont

44) Egy mértani sorozat második tagja 6, harmadik tagja –18. Adja meg a sorozat ötödik tagját! (2 pont)

Megoldás:

$a_2 = a_1 \cdot q \quad a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_1 \cdot q^2}{a_1 \cdot q} = q$ (1 pont)

$a_2 = 6 \quad a_3 = -18 \Rightarrow q = \frac{-18}{6} = -3$

$a_5 = a_3 \cdot q^2 = -18 \cdot (-3)^2 =$ **–162** (1 pont)

Összesen: 2 pont

45) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.

a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására? (7 pont)

A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4 \cdot H - R + F$ képlettel történik, ahol H a helyes válaszok, R a rossz feladatok, F pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.

b) Hány helyes választ adott Vera? (5 pont)

Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.

c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem? (5 pont)

Megoldás:

a) A terv szerint az egyes feladatokra szánt időtartamok olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1 (perc), és az első 25 tagjának összege 75 (perc) (1 pont)

A sorozat különbségét d-vel jelölve az adatok alapján felírható:

$\frac{2 \cdot 1 + 24d}{2} \cdot 25 = 75$. (1 pont)

Ebből $d = \frac{1}{6}$ (perc). (1 pont)

A számtani sorozat első 21 tagjának összege:

$\frac{2 \cdot 1 + 20 \cdot \frac{1}{6}}{2} \cdot 21 = 56$ (2 pont)

Így az utolsó 4 feladatra összesen $(75 - 56 =)$ **19 percet** szánt Vera a terc szerint. (1 pont)

b) Vera esetében $F = 25$, $H + R = 22$. (1 pont)

A helyes válaszok számát x-szel jelölve felíratható a következő egyenlet:

$4x - (22 - x) + 25 = 93$. (2 pont)

Ebből $x = 18$, tehát **Vera 18 helyes választ adott**. (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

c) Jelölje x azoknak a diákoknak a számát, akik megoldották a 24-es illetve a 25-ös feladatot, illetve azok számát, akik egyik feladatot sem tudták megoldani.

(1 pont)

Csak a 24-es feladatot $x - 1$, csak a 25-ös feladatot szintén $x - 1$ tanuló oldotta meg. (1 pont)

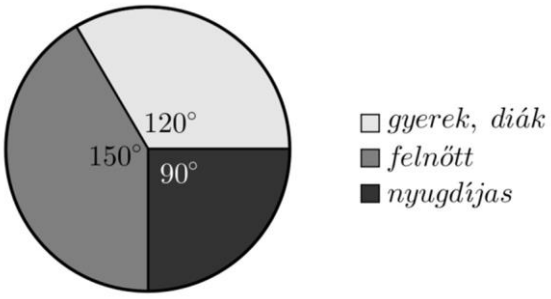
A feladat szövege alapján $2(x - 1) + 1 + x = 11$, (1 pont)

amiből $x = 4$, (1 pont)

$(4 - 1) =$ **3 olyan tanuló volt**, aki a 24-es feladatot megoldotta, de a 25-öst nem. (1 pont)

Összesen: 17 pont

46) Az alábbi kördiagramm egy balatoni strandon a júliusban megvásárolt belépőjegyek típusának eloszlását mutatja.



Júliusban összesen 16416 fő vásárolt belépőjegyet. A belépőjegyek árát az alábbi táblázat tartalmazza.

gyerek, diák	**350 Ft/fő**
felnőtt	**700 Ft/fő**
nyugdíjas	**400 Ft/fő**

a) Mennyi volt a strand bevétele a júliusban eladott belépőkből? (5 pont)
A tapasztalatok szerint júliusban folyamatosan nő a strandolók száma. Ezért a strandbüfében rendszer, hogy július 1-jei megrendelést követően július 2-től kezdve július 31-ig minden nap ugyanannyi literrel növelik a nagykereskedésből megrendelt üdítő mennyiségét.
A könyvelésből kiderült, hogy július 1-jén, 2-án és 3-án összesen 165 litert, július 15-én pedig 198 litert rendeltek.
b) Hány liter üdítőt rendeltek júliusban összesen? (7 pont)

Megoldás:

a) A kördiagramon 10° $(16416:36=)$ 456 főnek felel meg. (1 pont)
A jegyek száma rendre 5472, 6840, 4104. (2 pont)
A jegybevétel júliusban $5472\cdot 350+6840\cdot 700+4104\cdot 400=$ (1 pont)
8344800 forint volt. (1 pont)

b) A napi üdítőrendelések egy számtani sorozat tagjai, melynek első tagja a_1, differenciája d. Az első 31 tag összegét kell kiszámolni. (1 pont)
A szöveg szerint:
$a_1+a_1+d+a_1+2d=165$ és $a_1+14d=198$ (1 pont)
A második egyenletből a_1-et kifejezve és az első egyenletbe behelyettesítve:
$3\cdot(198-14d)+3d=165$ (1 pont)
ahonnan $-39d=-429$ (1 pont)
így $d=11$ és $a_1=44$ (1 pont)
$S_{31}=\frac{2\cdot 44+30\cdot 11}{2}\cdot 31=$ (1 pont)
6479 liter üdítőt rendeltek júliusban. (1 pont)
Összesen: 12 pont

Statisztika
Megoldások

1) Egy dolgozatnál az elérhető legmagasabb pontszám 100 volt. 15 tanuló eredményeit tartalmazza a következő táblázat:

Elért pontszám	**100**	**95**	**91**	**80**	**65**	**31**	**17**	**8**	**5**
A dolgozatok száma	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**

a) Határozza meg az összes dolgozat pontszámának átlagát (számtani közepét), móduszát és mediánját! (5 pont)

b) A dolgozatok érdemjegyeit az alábbi táblázat alapján kell megállapítani!

Pontszám	**Osztályzat**
80-100	**jeles**
60-79	**jó**
40-59	**közepes**
20-39	**elégséges**
0-19	**elégtelen**

Ennek ismeretében töltse ki a következő táblázatot! (2 pont)

Osztályzat	**jeles**	**jó**	**közepes**	**elégséges**	**elégtelen**
A dolgozatok száma					

c) Készítsen kördiagramot az osztályzatok megoszlásáról! Adja meg az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek értékét is! (5 pont)

Megoldás:

a) Számtani átlag: $\frac{3\cdot 100+2\cdot 95+91+2\cdot 80+65+2\cdot 31+2\cdot 17+8+5}{15}=\mathbf{61}$

(2+1 pont)

Módusz: 100 (1 pont)

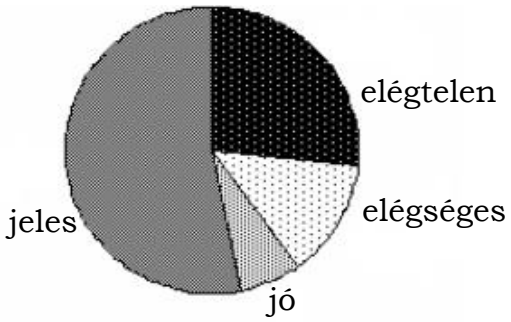
Medián: 80 (1 pont)

b)

Osztályzat	Jeles	jó	közepes	elégséges	elégtelen
A dolgozatok száma	**8**	**1**	**0**	**2**	**4**

(2 pont)

c) jeles: 192°
jó: 24°
elégséges: 48°
elégtelen: 96° (2 pont)



Ábra: (3 pont)

Összesen: 12 pont

2) A fizika órai tanulókísérlet egy tömegmérési feladat volt. A mérést 19 tanuló végezte el. A mért tömegre gramm pontossággal a következő adatokat kapták: 37, 33, 37, 36,35, 36, 37, 40, 38, 33, 37, 36, 35, 35, 38, 37, 36, 35, 37.

a) Készítse el a mért adatok gyakorisági táblázatát! (3 pont)

b) Mennyi a mérési adatok átlaga gramm pontossággal? (3 pont)

c) Mekkora a kapott eredmények mediánja, módusza? (2 pont)

d) Készítsen oszlopdiagramot a mérési eredményekről! (4 pont)

Megoldás:

a)

m(g)	33	34	35	36	37	38	39	40
n(db)	**2**	**0**	**4**	**4**	**6**	**2**	**0**	**1**

(3 pont)

b) $\overline{m} = \frac{2\cdot 33 + 4\cdot 35 + 4\cdot 36 + 6\cdot 37 + 2\cdot 38 + 40}{19} =$ (1 pont)

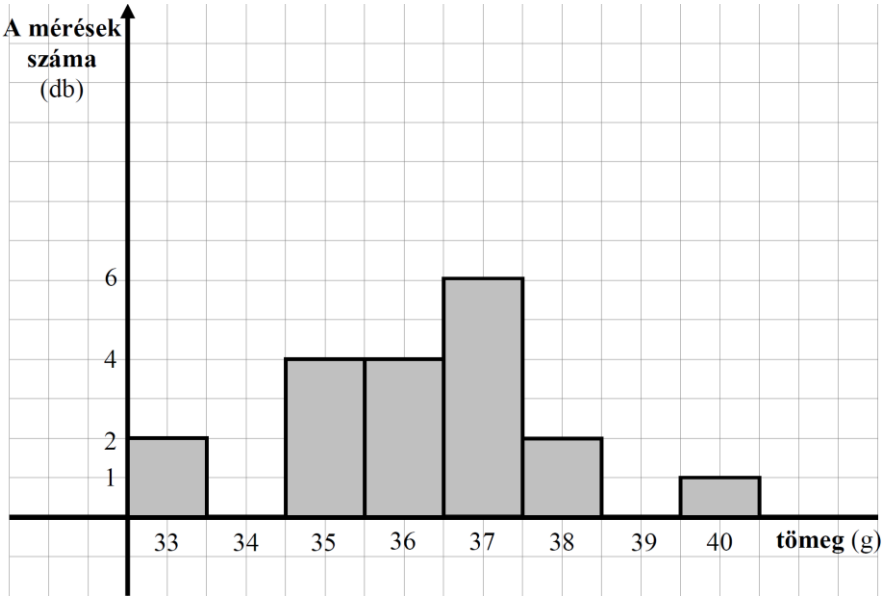
$= 36,21$ (1 pont)

$36,21 \approx$ **36 gramm** (1 pont)

c) **Medián: 36** (1 pont)

Módusz: 37 (1 pont)

d)



(4 pont)

Összesen: 12 pont

3) Egy osztály történelem dolgozatot írt. Öt tanuló dolgozata jeles, tíz tanulóé jó, három tanulóé elégséges, két tanuló elégtelen dolgozatot írt.

a) Hányan írtak közepes dolgozatot, ha tudjuk, hogy az osztályátlag 3,410-nál nagyobb és 3,420-nál kisebb? (10 pont)

b) Készítsen gyakorisági táblázatot, és ábrázolja oszlop-diagrammal az osztályzatok gyakoriságát! (4 pont)

c) A párhuzamos osztályban 32 tanuló írta meg ugyanezt a dolgozatot, és ott 12 közepes dolgozat született. Melyik osztályban valószínűbb, hogy a dolgozatok közül egyet véletlenszerűen elővéve éppen közepes dolgozat kerül a kezünkbe? (3 pont)

Megoldás:

a) Ha x tanuló írt közepes dolgozatot, akkor az átlag:
$\frac{5\cdot 5+10\cdot 4+x\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 1}{20+x}$. (2 pont)

$3,410<\frac{5\cdot 5+10\cdot 4+x\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 1}{20+x}<3,420$ (2 pont)

$68,2+3,41x<73+3x<68,4+3,42x$ (Szabad az egyenlőtlenséget a tört nevezőjével szorozni, mert az pozitív szám.)

Az első egyenlőtlenségből: $x<11,7$ (2 pont)

A második egyenlőtlenségből: $10,95<x$ (2 pont)

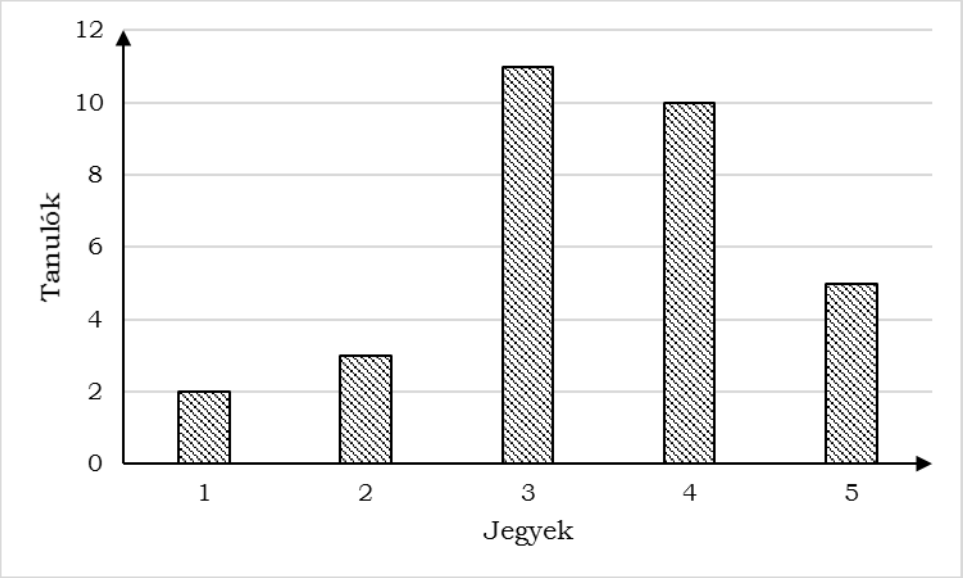
Tehát 11 tanuló írt közepes dolgozatot. (1 pont)

Ellenőrzés: így az átlag $\frac{106}{31}\approx 3,419$. (1 pont)

b)

jegyek	5	4	3	2	1
tanulók	**5**	**10**	**11**	**3**	**2**

(1 pont)



(3 pont)

c) Az eredeti osztályban $\frac{11}{31}$ a közepes dolgozat kiválasztásának valószínűsége.

(1 pont)

A párhuzamos osztályban $\frac{12}{32}$ a valószínűség. (1 pont)

$\frac{11}{31}<\frac{12}{32}$

Tehát a párhuzamos osztályban nagyobb a közepes dolgozat kiválasztásának a valószínűsége. (1 pont)

Összesen: 17 pont

4) Az alábbi adatok március első hetében mért napi hőmérsékleti maximumok (az adatokat °C-ban mérték):

hétfő	kedd	szerda	csütörtök	péntek	szombat	vasárnap
5,2	**1,6**	**3,1**	**–0,6**	**–1,1**	**1,6**	**0**

Mennyi volt ezen a héten a hőmérsékleti maximumok átlaga? (2 pont)

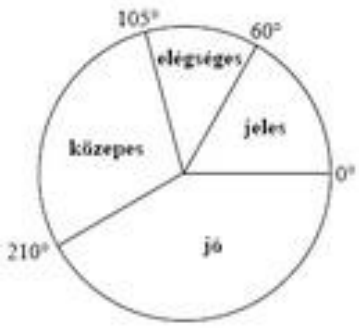
Megoldás:

$\frac{9,8^\circ}{7} = \mathbf{1,4}^\circ$ (2 pont)

5) A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.

a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották? (3 pont)

b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:
Adja meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket! Válaszát foglalja táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltesse oszlopdiagramon is! (6 pont)



c) Az összes megírt dolgozatból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy jeles vagy jó dolgozatot veszünk a kezünkbe? (3 pont)

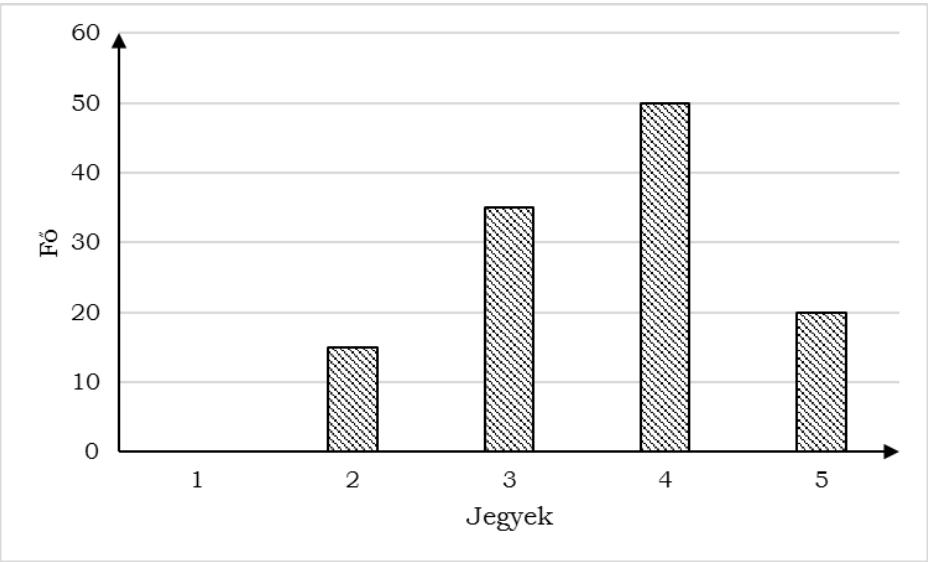
Megoldás:

a) Az összes képezhető kódok száma 5!. (2 pont)
120 tanuló írt dolgozatot. (1 pont)

b)

jegyek	2	3	4	5
fok	45°	105°	150°	60°
fő	**15**	**35**	**50**	**20**

(4 pont)



(2 pont)

c) A 4-es és az 5-ös dolgozatok száma összesen: 70. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{70}{120} = \frac{7}{12} \approx 0,583$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

6) Egy márciusi napon, öt alkalommal mérték meg a külső hőmérsékletet. A kapott adatok átlaga 1 °C, mediánja 0 °C. Adjon meg öt ilyen lehetséges hőmérséklet értéket! (4 pont)

Megoldás:

Például: **–2 °C ; –1 °C ; 0 °C ; 1 °C ; 7 °C** (megfelel mindkét középértéknek). (4 pont)

7) Egy tanulmányi verseny döntőjében 8 tanuló vett részt. Három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladat maximálisan elérhető pontszáma 40, a másodiké 50, a harmadiké 60. A nyolc versenyző feladatonkénti eredményeit tartalmazza az alábbi táblázat:

Versenyző sorszáma	I.	II.	III.	Összpontszám	Százalékos teljesítmény
1.	28	16	40		
2.	31	35	44		
3.	32	28	56		
4.	40	42	49		
5.	35	48	52		
6.	12	30	28		
7.	29	32	45		
8.	40	48	41		

a) Töltse ki a táblázat hiányzó adatait! A százalékos teljesítményt egészre kerekítve adja meg!
Melyik sorszámú versenyző nyerte meg a versenyt, ki lett a második, és ki a harmadik helyezett? (5 pont)

b) A nyolc versenyző dolgozata közül véletlenszerűen kiveszünk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 75%-osnál jobb teljesítményű dolgozat került a kezünkbe? (2 pont)

c) Egy tanuló betegség miatt nem tudott megjelenni a döntőn. Másnap megkapta, és megoldotta a feladatokat. Eredményét később összehasonlította a nyolc döntős versenyző eredményével. Észrevette, hogy az első feladatot a versenyzők I. feladatra kapott pontszámainak a mediánjára teljesítette (egészre kerekítve), a második feladatot pedig a nyolc versenyző II. feladata pontszámainak a számtani közepére (szintén egészre kerekítve). A III. feladatot 90%-ra teljesítette.
Mennyi lett ennek a tanulónak az összpontszáma? Ezzel hányadik helyen végzett volna? (5 pont)

Megoldás:

a)

Versenyző sorszáma	I.	II.	III.	Összpontszám	Százalékos teljesítmény
1.	28	16	40	**84**	**56**
2.	31	35	44	**110**	**73**
3.	32	28	56	**116**	**77**
4.	40	42	49	**131**	**87**
5.	35	48	52	**135**	**90**
6.	12	30	28	**70**	**47**
7.	29	32	45	**106**	**71**
8.	40	48	41	**129**	**86**

(2+2 pont)

1. helyezett: 5. sorszámú versenyző;

2. helyezett: 4. sorszámú versenyző;

3. helyezett: 8. sorszámú versenyző. (1 pont)

b) Mivel a 8 dolgozat között 4 darab dolgozat eredménye volt 75% felett, a keresett valószínűség: $\mathbf{\frac{4}{8} = 0,5\ (50\%)}$. (2 pont)

c) Az I. feladat pontszámainak mediánja: 31,5 (ami kerekítve 32),

a II. pontszámainak számtani közepe: $\frac{279}{8} = 34,875$ (ami kerekítve 35).

(1 pont)

Az I. feladat pontszámainak mediánja: 31,5 (ami kerekítve 32), (1 pont)

a II. pontszámainak számtani közepe: $\frac{279}{8} = 34,875$ (ami kerekítve 35).

(1 pont)

III. feladat a 60 pont 90%-a: 54 pont. (1 pont)

A megfelelő kerekítéseket elvégezve, összesítve $32+35+54=121$pont,

ami a **4. helyezést** jelenthette volna. (1 pont)

Összesen: 12 pont

8) Máté a tanév során 13 érdemjegyet kapott matematikából. Ezek időrendben: 4, 4, 3, 4, 4, 2, 5, 4, 3, 1, 3, 3, 2. Adja meg a jegyek móduszát és mediánját! (2 pont)

Megoldás:

Módusz: 4 (1 pont)

Medián: 3 (1 pont)

Összesen: 2 pont

9) Egy gimnáziumban 50 diák tanulja emelt szinten a biológiát. Közülük 30-an tizenegyedikesek és 20-an tizenkettedikesek. Egy felmérés alkalmával a tanulóktól azt kérdezték, hogy hetente átlagosan hány órát töltenek a biológia házi feladatok megoldásával. A táblázat a válaszok összesített eloszlását mutatja.

A biológia házi feladatok megoldásával hetente eltöltött órák száma*	**0-2**	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**
Tanulók száma	**3**	**11**	**17**	**15**	**4**

*** A tartományokhoz az alsó határ hozzátartozik, a felső nem.**

a) Ábrázolja oszlopdiagramon a táblázat adatait! (3 pont)

b) Átlagosan hány órát tölt a biológia házi feladatok megoldásával hetente ez az 50 tanuló? Az egyes időintervallumok esetében a középértékekkel (1, 3, 5, 7 és 9 órával) számoljon! (3 pont)

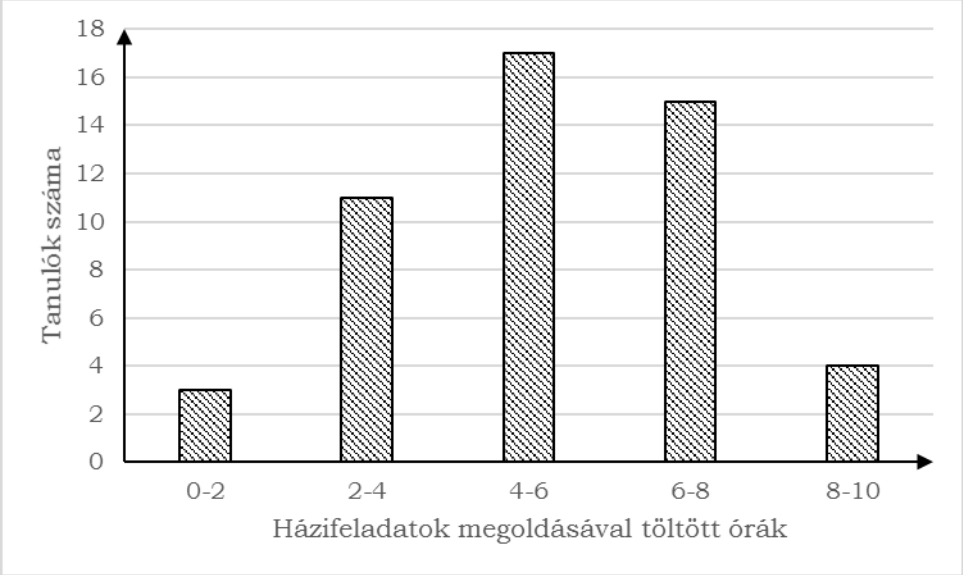
Egy újságíró két tanulóval szeretne interjút készíteni. Ezért a biológiát emelt szinten tanuló 50 diák névsorából véletlenszerűen kiválaszt két nevet.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik kiválasztott tanuló tizenegyedikes, a másik pedig tizenkettedikes? (6 pont)

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét kiválasztott tanuló legalább 4 órát foglalkozik a biológia házi feladatok elkészítésével hetente? (5 pont)

Megoldás:

a)



(3 pont)

b) A középértékekkel számított átlag: $\frac{3\cdot 1+11\cdot 3+17\cdot 5+15\cdot 7+4\cdot 9}{50}=\frac{262}{50}$ (2 pont)

$=5,24$ **A tanulók tehát átlagosan 5,24 órát $(\approx$ 5 óra 14 perc$)$ töltenek a biológia házi feladatok megoldásával hetente.** (1 pont)

c) 50 tanuló közül $\binom{50}{2}=\frac{50\cdot 49}{2}=1225$–féleképpen lehet két tanulót kiválasztani. (2 pont)

A két évfolyamból 30, illetve 20-féleképpen lehet egy-egy tanulót kiválasztani, így a kedvező esetek száma: $30\cdot 20=600$. (2 pont)

A kérdéses valószínűség: $\boldsymbol{p=\frac{600}{1225}=\frac{24}{49}}$. (2 pont)

d) Hetente legalább 4 órát 36 tanuló tölt a biológia házi feladatok megoldásával. (1 pont)

Közülük két tanulót $\binom{36}{2}=\frac{35\cdot 36}{2}=630$–féleképpen lehet kiválasztani. (2 pont)

Így a keresett valószínűség: $\boldsymbol{p=\frac{630}{1225}=\frac{18}{35}}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

10) Öt szám átlaga 7. Az öt szám közül négyet ismerünk, ezek az 1, a 8, a 9 és a 12. Határozza meg a hiányzó számot! Válaszát számítással indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Legyen az ötödik szám x, ekkor $\frac{1+8+9+12+x}{5}=7$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=5}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

11) Rozi irodalomból a tanév során a következő jegyeket kapta: 2; 4; 3; 5; 2; 4; 5; 3; 5. Mi lenne az év végi osztályzata, ha az a kapott jegyek mediánja lenne? (2 pont)

Megoldás:

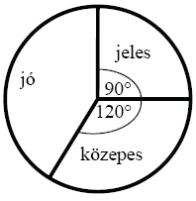
Az év végi osztályzat medián esetén **4**. (2 pont)

12) A kézilabdaedzéseken 16 tanuló vesz részt, átlagmagasságuk 172 cm. Mennyi a magasságaik összege? (2 pont)

Megoldás:

A 16 tanuló magasságának összege:
$(16\cdot 172=)$ **2752 (cm)** (2 pont)

13) Egy iskolában 120 tanuló érettségizett matematikából. Nem volt sem elégtelen, sem elégséges dolgozat. Az eredmények megoszlását az alábbi kördiagram szemlélteti.
Hányan kaptak jeles, jó, illetve közepes osztályzatot? (3 pont)



Megoldás:

A jeles osztályzatok száma: **30**. (1 pont)
A jó osztályzatok száma: **50**. (1 pont)
A közepes osztályzatok száma: **40**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

14) Számítsa ki a 12 és 75 számok mértani közepét! (2 pont)

Megoldás:

A mértani közép: **30**. (2 pont)

15) Egy 2000. január elsejei népesség-statisztika szerint a Magyarországon élők kor és nem szerinti megoszlása (ezer főre) kerekítve az alábbi volt:

Korcsoport (év)	Férfiak száma (ezer fő)	Nők száma (ezer fő)
0 – 19	1214	1158
20 – 39	1471	1422
40 – 59	1347	1458
60 – 79	685	1043
80 -	75	170

a) Melyik korcsoport volt a legnépesebb? A táblázat adatai alapján adja meg, hogy hány férfi és hány nő élt Magyarországon 2000. január elsején? (3 pont)

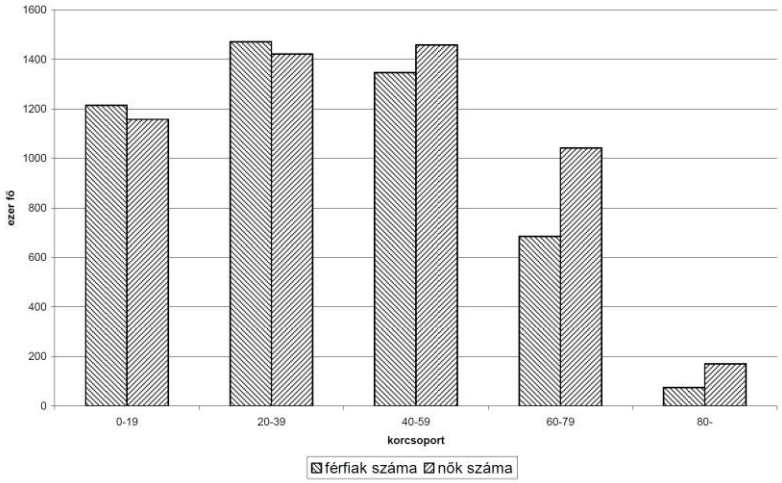
b) Ábrázolja egy közös oszlopdiagramon, két különböző jelölésű oszloppal a férfiak és a nők korcsoportok szerinti megoszlását! (5 pont)

c) Számítsa ki a férfiak százalékos arányát a 20 évnél fiatalabbak korcsoportjában, valamint a legalább 80 évesek között! (4 pont)

Megoldás:

a) A 20-39 éves korcsoport volt a legnépesebb (2 893 ezer fő). (1 pont)
4792 ezer (4 792 000) férfi (1 pont)
és **5251 ezer** (5 251 000) nő élt az országban. (1 pont)

b)



(5 pont)

c) A 20 évnél fiatalabb férfiak száma 1214 ezer, a korcsoport lélekszáma 2372 ezer fő volt, (1 pont)
tehát a férfiak százalékos aránya:
$\frac{1214}{2372} \approx \mathbf{0,512 = 51,2}\%$. (1 pont)
A legalább 80 éves férfiak száma 75 ezer, a korcsoport lélekszáma 245 ezer fő volt, (1 pont)
tehát a férfiak százalékos aránya:
$\frac{75}{245} \approx \mathbf{0,306 = 30,6}\%$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

16) Számítsa ki 25 és 121 számtani és mértani közepét! (2 pont)

Megoldás:

A számtani közép értéke: **73**. (1 pont)
A mértani közép értéke: **55**. (1 pont)
Összesen: 2 pont

17) Melyik az a legnagyobb szám az alábbi 12 szám közül, amelynek elhagyásával a megmaradt 11 szám mediánja 6?
6; 4; 5; 5; 1; 10; 7; 6; 11; 2; 6; 5 (2 pont)

Megoldás:

Az elhagyott szám: **5**. (2 pont)

18) Az alábbi táblázat egy 7 fős csoport tagjainak cm-ben mért magasságait tartalmazza. Mekkora a csoport átlagmagassága? A csoport melyik tagjának a magassága van legközelebb az átlagmagassághoz?

Anna	Bea	Marci	Karcsi	Ede	Fanni	Gábor
155	158	168	170	170	174	183

(3 pont)

Megoldás:

Az átlag fogalmának helyes használata. (1 pont)
Az átlag: $\approx \mathbf{168,3\ cm}$. (1 pont)
Az átlagmagassághoz legközelebb **Marci** magassága van. (1 pont)
Összesen: 3 pont

19) Egy 17 fős csoport matematika témazáró dolgozatának értékelésekor a tanár a következő információkat közölte:
Mind a 17 dolgozatot az 1-es, a 2-es, a 3-as, a 4-es és az 5-ös jegyek valamelyikével osztályozta.
A jegyek mediánja 4, módusza 4, terjedelme 4 és az átlaga (két tizedes jegyre kerekítve) 3,41.
Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, illetve hamis!
a) A dolgozatoknak több mint a fele jobb hármasnál. (1 pont)
b) Nincs hármasnál rosszabb dolgozat. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)
Összesen: 2 pont

20) Számítsa ki azt a két pozitív számot, amelyek számtani (aritmetikai) közepe 8, mértani (geometriai) közepe pedig 4,8. (12 pont)

Megoldás:

(Jelölje a két keresett számot x és y.)
A számtani közép $\frac{x+y}{2}$, (1 pont)
A mértani közép $\sqrt{xy}$, (1 pont)
$x+y=16$ (1 pont)
$x\cdot y=23,04$ (1 pont)

$y = 16 - x$, $(16 - x)x = 23{,}04$ (1 pont)

Az egyenletrendszerből adódó másodfokú egyenlet

$x^2 - 16x + 23{,}04 = 0$ (2 pont)

melynek gyökei $x_1 = 1{,}6$ és $x_2 = 14{,}4$. (2 pont)

$y_1 = 14{,}4$ és $y_2 = 1{,}6$, (2 pont)

A két szám az **1,6** és a **14,4**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

21) Megkérdeztek 25 családot arról, hogy hány forintot költöttek az elmúlt hónapban friss gyümölcsre. A felmérés eredményét mutatja az alábbi táblázat:

3500	**4500**	**5600**	**4000**	**6800**
4000	**3400**	**5600**	**6200**	**4500**
500	**5400**	**2500**	**2100**	**1500**
9000	**1200**	**3800**	**2800**	**4500**
4000	**3000**	**5000**	**3000**	**5000**

(Az adatokat tekintsük pontos értékeknek!)

a) Hány forintot költöttek átlagosan ezek a családok friss gyümölcs vásárlására az elmúlt hónapban? (3 pont)

b) Ossza 1000 Ft terjedelmű osztályokba a fenti értékeket, kezdve a 0-1000 Ft, 1001-2000 Ft stb. osztályokkal, és ábrázolja ezeknek az osztályoknak a gyakoriságát oszlopdiagramon! (5 pont)

c) Az 500 Ft és a 9000 Ft kiugró értékek. (6 pont)
Mennyi a megmaradt adatok átlaga, ha ezeket a kiugró értékeket elhagyjuk az adatok közül?
Hány százalékos változást jelent ez az eredeti átlaghoz képest, és milyen irányú ez a változás?
Mennyi az így keletkezett új adatsor terjedelme?
(Az átlagot forintra, a százaléklábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

d) Az eredeti mintát a vizsgálatot végző cég két új család megfelelő adatával bővítette. Az egyik az eredeti átlagnál 1000 Ft-tal többet, a másik ugyanennyivel kevesebbet költött havonta friss gyümölcsre. Mutassa meg számítással, hogy így az átlag nem változott! (3 pont)

Megoldás:

a) A 25 elemű mintában az elemek összege 101400. (1 pont)

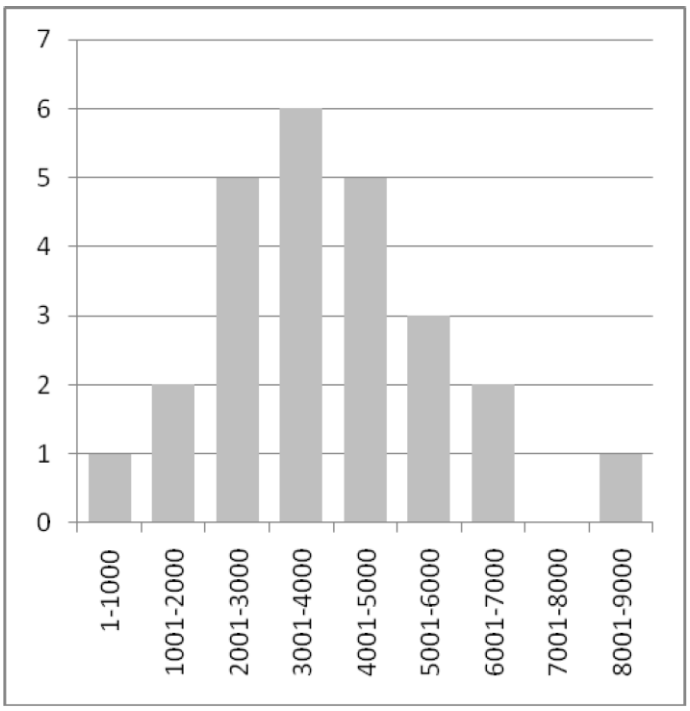
Így az átlag $\frac{101400}{25} =$ (1 pont)

$= \mathbf{4056\ (Ft)}$. (1 pont)

b) Az 1000 Ft-os osztályokba sorolt adatok gyakorisági táblázata:

Havi költség Ft-ban	Családok száma
1-1000	1
1001-2000	2
2001-3000	5
3001-4000	6
4001-5000	5
5001-6000	3
6001-7000	2
7001-8000	0
8001-9000	1

(3 pont)



(2 pont)

c) A két szélső adat elhagyásával az új átlag: $\frac{91900}{23} \approx$ (1 pont)

$\approx 3996\ (\text{Ft})$. (1 pont)

Mivel $\frac{3996}{4056} \approx 0,9852$, (1 pont)

ezért az átlag $\approx 1,48\%$-kal csökkent. (1 pont)

Az új adatsor legkisebb eleme 1200 Ft, legnagyobb eleme 6800 Ft, (1 pont)

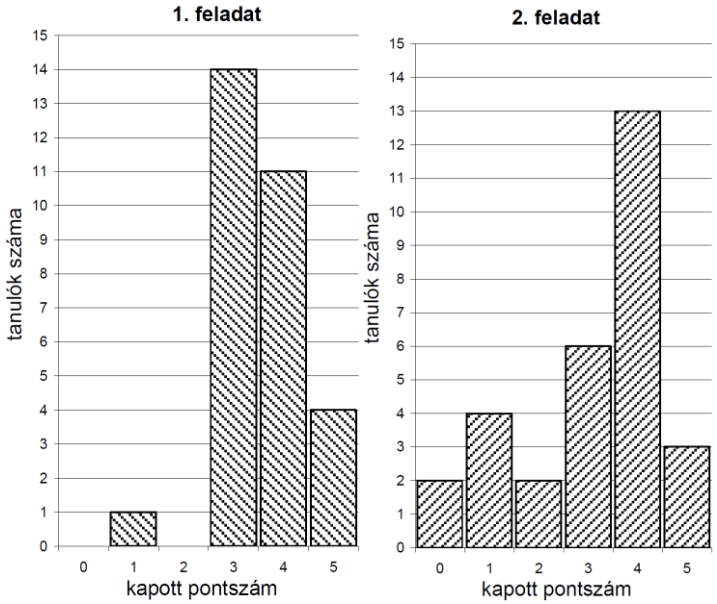
így terjedelme **5600 Ft**. (1 pont)

d) Az új átlag $\frac{25 \cdot 4056 + (4056 - 1000) + (4056 + 1000)}{27} =$ (2 pont)

$= \frac{27 \cdot 4056}{27} =$ **4056**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

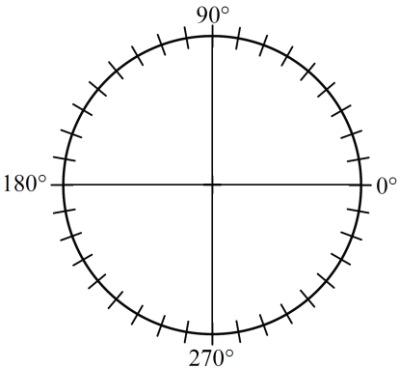
22) Egy iskolai tanulmányi verseny döntőjébe 30 diák jutott be, két feladatot kellett megoldaniuk. A verseny után a szervezők az alábbi oszlopdiagramokon ábrázolták az egyes feladatokban szerzett pontszámok eloszlását:



a) A diagramok alapján töltse ki a táblázat üres mezőit! Az első feladatra kapott pontszámok átlagát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (3 pont)

	1. feladat	**2. feladat**
pontszámok átlaga		**3,10**
pontszámok mediánja		

b) A megfelelő középponti szögek megadása után ábrázolja kördiagramon a 2. feladatra kapott pontszámok eloszlását!



c) A versenyen minden tanuló elért legalább 3 pontot. Legfeljebb hány olyan tanuló lehetett a versenyzők között, aki a két feladat megoldása során összesen pontosan 3 pontot szerzett?

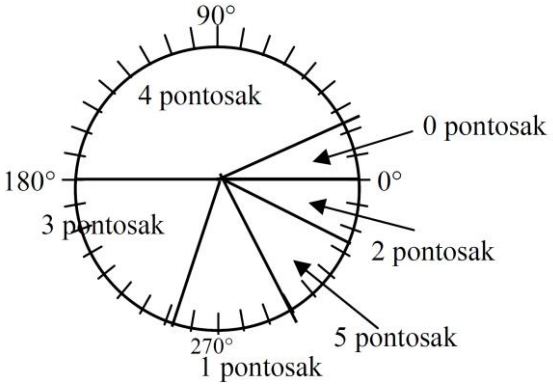
Megoldás:

a)

	1. feladat	2. feladat
pontszámok átlaga	3,57	3,10
pontszámok mediánja	3,5	4

(3 pont)

b) Egy tanulóhoz tartozó középponti szög: 12°. (1 pont)
13 tanulóhoz 156°, 6 tanulóhoz 72°, 4 tanulóhoz 48°, 3 tanulóhoz 36°, 2 tanulóhoz 24° tartozik. (1 pont)
Ábra (2 pont)



c) Egy tanuló 3 pontot négyféleképpen érhetne el:
$0+3;\ 1+2;\ 2+1;\ 3+0$. (1 pont)
A diagram alapján nem valósulhat meg: $0+3;\ 2+1$. (1 pont)
$1+2$ pontot 1 tanuló kaphatott. (1 pont)
$3+0$ pontot 2 tanuló kaphatott. (1 pont)
Legfeljebb 3 tanuló érhetett el pontosan 3 pontot. (1 pont)

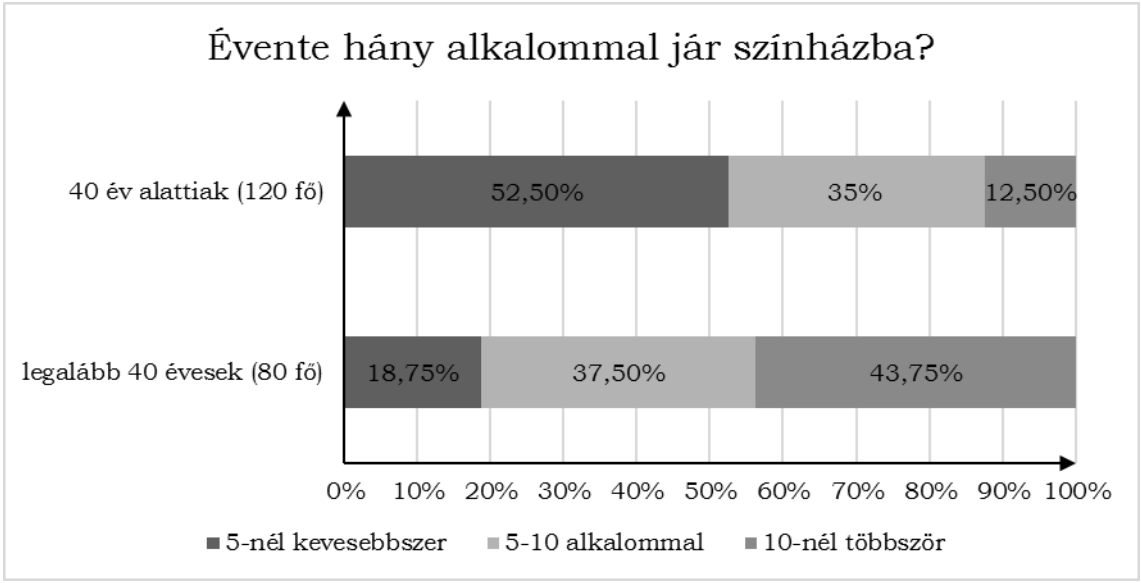
Összesen: 12 pont

23) Adja meg a 2; 11; 7; 3; 17; 5; 13 számok mediánját! (2 pont)

Megoldás:

A medián: **7**. (2 pont)

24) Egy felmérés során két korcsoportban összesen 200 embert kérdeztek meg arról, hogy évente hány alkalommal járnak színházba. Közülük 120-an 40 évesnél fiatalabbak, 80 válaszadó pedig 40 éves vagy annál idősebb volt. Az eredményeket (százalékos megoszlásban) az alábbi diagram szemlélteti.



a) Hány legalább 40 éves ember adta azt a választ, hogy 5-nél kevesebbszer volt színházban? (3 pont)

b) A megkérdezettek hány százaléka jár évente legalább 5, de legfeljebb 10 alkalommal színházba? (4 pont)

c) A 200 ember közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük legfeljebb az egyik fiatalabb 40 évesnél?
Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) A legalább 40 éveseknek a 18,75%-a adta az idézett választ. (1 pont)
80-nak a 18,75%-a: $80\cdot 0{,}1875$. (1 pont)
Tehát **15** legalább 40 éves ember adta az „5-nél kevesebbszer” választ. (1 pont)

b) A 40 év alattiak közül $120\cdot 0{,}35=42$, (1 pont)
a legalább 40 évesek közül $80\cdot 0{,}375=30$, (1 pont)
azaz összesen 72 olyan ember van, aki évente 5−10 alkalommal jár színházba. (1 pont)
Ez a szám a megkérdezettek **36%**-a. (1 pont)

c) Az összes lehetséges kiválasztás: $\binom{200}{2}\left(=19900\right)$. (1 pont)

Ezek közül mindkét véletlenszerűen kiválasztott legalább 40 éves: $\binom{80}{2}\left(=3160\right)$ esetben, (1 pont)

különböző korosztályú: $80\cdot120\left(=9600\right)$ esetben. (1 pont)

A kérdezett esemény valószínűsége: $\frac{\binom{80}{2}+80\cdot120}{\binom{200}{2}}\left(=\frac{12760}{19900}\right)$. (1 pont)

Tehát **0,641** a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között. (1 pont)

A feladat megoldható a komplementer esemény valószínűségének kiszámításával is.

Összesen: 12 pont

25) Az alábbi táblázat András és Bea érettségi érdemjegyeit mutatja.

	András	**Bea**	**Cili**
Magyar nyelv és irodalom	**3**	**4**	
Matematika	**4**	**5**	
Történelem	**4**	**4**	
Angol nyelv	**3**	**5**	
Fölrajz	**5**	**5**	

a) Számítsa ki András jegyeinek átlagát és szórását! (3 pont)

Cili érettségi eredményéről azt tudjuk, hogy jegyeinek átlaga András és Bea jegyeinek átlaga közé esik, továbbá Cili jegyeinek a szórása 0.

b) Töltse ki a táblázatot Cili jegyeivel! (3 pont)

Dávid is ebből az 5 tárgyból érettségizett, az 5 tárgy az ő bizonyítványában is a fenti sorrendben szerepel. Eredményeiről azt tudjuk, hogy jegyeinek mediánja 4, átlaga pedig 4,4 lett.

c) Határozza meg Dávid osztályzatait és azt, hogy hányféleképpen lehetne ezekkel az osztályzatokkal kitölteni az érettségi bizonyítványát! (7 pont)

Az ábra a 24 fős osztály érettségi eredményeinek megoszlását mutatja matematikából. Tudjuk, hogy jeles osztályzatot 4 tanuló ért el.



d) Az osztály tanulói közül hányan érettségiztek közepes eredménnyel matematikából? (4 pont)

Megoldás:

a) András jegyeinek átlaga 3,8, (1 pont)

így jegyeinek szórása $\sqrt{\frac{\left(3-3{,}8\right)^2+\ldots+\left(5-3{,}8\right)^2}{5}}\approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0{,}75}$ (1 pont)

b) András jegyeinek átlaga 3,8, Bea jegyeinek átlaga 4,6. (1 pont)
Mivel Cili jegyeinek szórása 0, ezért minden jegye azonos. (1 pont)
Így Cilinek **minden jegye 4-es**. (1 pont)

c) Dávid jegyeinek összege 22, (1 pont)
jegyeit nagyság szerint sorba rendezve a középső 4-es. (1 pont)
A jegyek között 1-es, 2-es és 3-as nem szerepelhet. Négy darab 4-ese nem lehet, mert akkor a jegyek összege nem lehet 22. (1 pont)
Dávid jegyei: 4; 4; 4; 5; 5. (1 pont)
Ezekkel a jegyekkel érettségi bizonyítványát $\binom{5}{2}$ (2 pont)
$=$ **10**-féleképpen lehet kitölteni. (1 pont)

d) Jeles osztályzatot az osztály $\frac{1}{6}$ része ért el, a hozzájuk tartozó körcikk középponti szöge 60°. (1 pont)
A közepes osztályzatot elérőkhöz tartozó középponti szög $360^\circ-\left(60^\circ+45^\circ+150^\circ\right)=105^\circ$, (1 pont)
az ehhez tartozó diákok száma: $\frac{105^\circ}{360^\circ}\cdot 24$, (1 pont)
vagyis közepes osztályzatot **7 diák** szerzett. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) Egy teherautóval több zöldségboltba almát szállítottak. Az egyik üzletbe 60 kg jonatánt, 135 kg starkingot, 150 kg idaredet és 195 kg golden almát vittek. A jonatán és az idared alma kilóját egyaránt 120 Ft-ért, a starking és a golden kilóját 85 Ft-ért árulta a zöldséges.

a) Hány százalékkal volt drágább a jonatán alma kilója a goldenéhez képest? (2 pont)

b) Mennyi bevételhez jutott a zöldséges, ha a teljes mennyiséget eladta? (2 pont)

c) A zöldségeshez kiszállított árukészlet alapján számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe került nála 1 kg alma! (3 pont)

d) Ábrázolja kördiagramon a zöldségeshez érkezett alma mennyiségének fajták szerinti megoszlását! (6 pont)

A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.

e) A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz? (4 pont)

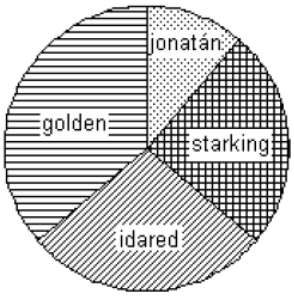
Megoldás:

a) $\frac{120}{85}\approx 1{,}41$ (1 pont)
Kb. **41%-kal drágább** a jonatán alma. (1 pont)

b) $60\cdot 120+150\cdot 120+195\cdot 85+135\cdot 85=53250$ (1 pont)
Tehát **53250 Forint bevétel**hez jutott a zöldséges. (1 pont)

c) Az összes alma mennyisége 540 kg. (1 pont)
Átlagos almaár: $\frac{53250}{540}\approx 98{,}6$ (1 pont)
Tehát átlagosan **98,6 Forintba került** egy alma. (1 pont)

d) Az egyes almafajták mennyiségéhez tartozó középponti szögek:



60kg: $\frac{60 \cdot 360°}{540} = \mathbf{40°}$

135 kg: **90°**

150 kg: **100°**

195 kg: **130°** (2 pont)

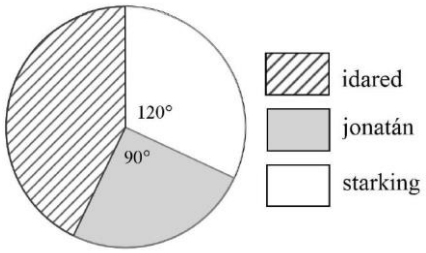
Kördiagram: (4 pont)

e) A kiborult jonatán és idared almák darabszámának aránya: 1,24:1 (2 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{1,25}{2,25} = \frac{5}{9} \approx \mathbf{0,56}$ (2 pont)

Összesen: 17 pont

27) Egy gyümölcsárus háromféle almát kínál a piacon. A teljes készletről kördiagramot készítettünk.
Írja a táblázat megfelelő mezőibe a hiányzó adatokat! (3 pont)



Megoldás:

Minden hiányzó adat megadásáért 1-1 pont jár:

Alma fajtája	A körcikk középponti szöge (fok)	Mennyiség (kg)
jonatán	90	**36**
idared	**150**	**60**
starking	120	48

(3 pont)

Összesen (3 pont)

28) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)

b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	**Gyakoriság**
0	**3**
1	**94**
2	**89**
3	**14**

Jóska felmérése alapján töltse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.
Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
D) Nem minden háztartásban van televízió. **(2 pont)**

Megoldás:

a) A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje x, a mikrohullámú sütővel rendelkezők számát $2x$. (1 pont)
Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek:
$2x + x - 63 = 141$, (2 pont)
amiből $x = 68$. (1 pont)
Nincs mikrohullámú sütője $150 - 2 \cdot 68 = 14$ megkérdezettnek, (1 pont)
ők az összes megkérdezett kb. **9,3%-át** jelentik. (1 pont)

b) Az egy háztartásban található számítógépek számának átlaga:
$\frac{3 \cdot 0 + 94 \cdot 1 + 89 \cdot 2 + 14 \cdot 3}{200} =$ (1 pont)
$= \mathbf{1,57}$. (1 pont)
A **medián 2**, (1 pont)
a **módusz 1**. (1 pont)

c) Az állítás tagadásai: **C** és **D.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

29) Kóstolóval egybekötött termékbemutatót tartottak egy új kávékeverék piaci megjelenését megelőzően. Két csoport véleményét kérték úgy, hogy a terméket az 1-től 10-ig terjedő skálán mindenkinek egy-egy egész számmal kellett értékelnie. Mindkét csoport létszáma 20 fő volt. A csoportok értékelése az alábbi táblázatban látható.

pontszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság az 1. csoportban	0	0	1	0	6	8	2	2	1	0
gyakoriság a 2. csoportban	0	8	0	2	0	1	0	0	0	9

a) Ábrázolja közös oszlopdiagramon, különböző jelölésű oszlopokkal a két csoport pontszámait! A diagramok alapján fogalmazzon meg véleményt arra vonatkozóan, hogy melyik csoportban volt nagyobb a pontszámok szórása! Véleményét a diagramok alapján indokolja is!
(5 pont)

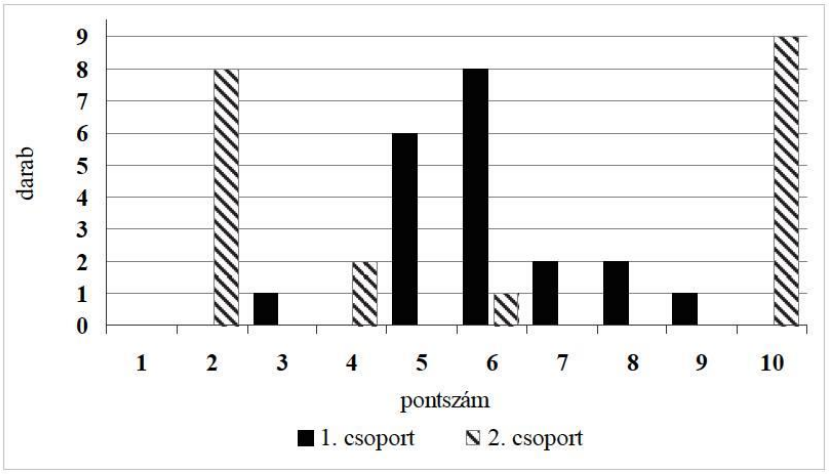
b) Hasonlítsa össze a két csoport pontszámainak szórását számítások segítségével is! **(5 pont)**

Kétféle kávéból 14 kg 4600 Ft/kg egységárú kávékeveréket állítanak elő. Az olcsóbb kávéfajta egységára 4500 Ft/kg, a drágábbé pedig 5000 Ft/kg.

c) Hány kilogramm szükséges az egyik, illetve a másik fajta kávéból?
(7 pont)

Megoldás:

a) Az 1. csoporthoz tartozó diagram helyes. (1 pont)
A 2. csoporthoz tartozó diagram helyes. (1 pont)
A vizsgázó a két csoport adatait megfelelően megkülönböztette egymástól. (1 pont)
(1 pont)



Az első csoporthoz tartozó diagramon a nagy magasságú oszlopok (az átlaghoz közel) középen vannak, a másodikon pedig a két szélen; (1 pont)
ez azt jelenti, hogy a második esetben nagyobb lehet a szórás. (1 pont)

b) Az 1. csoport pontszámainak átlaga **6**, (1 pont)
szórása $\sqrt{\mathbf{1,7}} \approx \mathbf{1,30}$. (1 pont)
A 2. csoport pontszámainak átlaga **6**, (1 pont)
szórása $\sqrt{\mathbf{14}} \approx \mathbf{3,74}$. (1 pont)
A 2. csoport pontszámainak szórása nagyobb. (1 pont)

c) Az olcsóbb fajtából x kg-ot,
a másikból $(14-x)$ kg-ot veszünk. (1 pont)
A feladat szövege alapján felírható egyenlet:
$x \cdot 4500 + (14-x) \cdot 5000 = 14 \cdot 4600$ (2 pont)
$4500x - 5000x + 70000 = 64400$ (1 pont)
$x = 11,2$ (1 pont)
Az olcsóbb fajtából **11,2 kg**,
a drágább fajtából **2,8 kg** szükséges a keverékhez. (1 pont)
Ellenőrzés a szöveg alapján. (1 pont)

Összesen: 17 pont

30) Egy kis cégnél nyolcan dolgoznak: hat beosztott és két főnök. A főnökök átlagos havi jövedelme 190 000 Ft, a beosztottaké 150 000 Ft.
Hány forint a cég nyolc dolgozójának átlagos havi jövedelme? (2 pont)

Megoldás:

Az átlagos jövedelem **160 000 Ft**. (2 pont)

31) Réka év végi bizonyítványában a következő osztályzatok szerepelnek: 4; 2; 3; 5; 5; 4; 5; 5; 4. Adja meg Réka osztályzatainak móduszát és mediánját! (2 pont)

Megoldás:

A módusz **5**, (1 pont)
a medián **4**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

32) Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat.

Életkor	17	18	19	21	22	23	24	25	26	31
Gyakoriság	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1

a) Számítsa ki a csapat átlagéletkorát! (2 pont)

Jelölje *A* azt az eseményt, hogy a csapatból 7 játékost véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztottak között legfeljebb egy olyan van, aki 20 évnél fiatalabb.

b) Számítsa ki az *A* esemény valószínűségét! (8 pont)

A világbajnokság egyik mérkőzésén a magyar kezdőcsapat 6 mezőnyjátékosáról a következőket tudjuk:

- **a legidősebb és a legfiatalabb játékos életkorának különbsége 12 év,**
- **a játékosok életkorának egyetlen módusza 22 év,**
- **a hat játékos életkorának mediánja 23 év,**
- **a hat játékos életkorának átlaga 24 év.**

c) Adja meg a kezdőcsapat hat mezőnyjátékosának életkorát! (7 pont)

Megoldás:

a) Az életkorok átlaga: $\frac{17\cdot 2+18+19+\ldots+25+26+31}{13}=\mathbf{\frac{289}{13}\left(\approx 22{,}23\,\text{év}\right)}$.

(2 pont)

b) A 13 játékosból 9 olyan van, aki 20 évnél idősebb, így azoknak az eseteknek a száma, amikor nincs a kiválasztott 7 játékos között 20 évnél fiatalabb: $\binom{9}{7}$.

(1 pont)

Azoknak az eseteknek a száma, amikor egy játékos 20 évnél fiatalabb (és 6 játékos 20 évnél idősebb): $\binom{4}{1}\cdot\binom{9}{6}$. (2 pont)

Az *A* esemény bekövetkezése szempontjából kedvező esetek számát a fenti két szám összege adja: $\binom{9}{7}+4\cdot\binom{9}{6}=36+336=372$. (2 pont)

Az összes esetszám: $\binom{13}{7}$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség: $P(A)=\dfrac{\binom{9}{7}+4\cdot\binom{9}{6}}{\binom{13}{7}}=\mathbf{\frac{372}{1716}\left(\approx 0{,}2168\right)}$ (2 pont)

c) (A legidősebb és legfiatalabb játékos életkorának különbsége csak egyféleképpen lehet 12 év, ha) a legidősebb játékos $\left(a_6=\right)\mathbf{31}$, (1 pont)

a legfiatalabb pedig $\left(a_1=\right)\mathbf{19}$ éves. (1 pont)

A móduszból következik, hogy a játékosok közül ketten $\left(a_2\right.$ és $\left.a_3\right)\mathbf{22}$ évesek.

(1 pont)

Mivel hat játékos van, ezért a medián a_3 és a_4 számtani közepe, azaz az egyik játékos $(\boldsymbol{a_4} =)\mathbf{24}$ éves (és ilyen korú játékos valóban van a csapatban).(2 pont)

Az átlagból következik, hogy $\frac{118+a_5}{6}=24$ (1 pont)

vagyis ez a játékos $(\boldsymbol{a_5} =)\mathbf{26}$ éves (és ilyen korú játékos valóban van a csapatban). (1 pont)

Összesen: 17 pont

33) Egy közvélemény-kutató intézet azt a feladatot kapta, hogy két alkalommal – fél év különbséggel – mérje fel a TV-ben látható három filmsorozat nézettségi adatait. Az ábrán látható kérdőíven a válaszoló vagy azt jelölhette be, hogy az A, B, és C sorozatok közül melyiket nézi (akár többet is meg lehetett jelölni), vagy azt, hogy egyiket sem nézi.

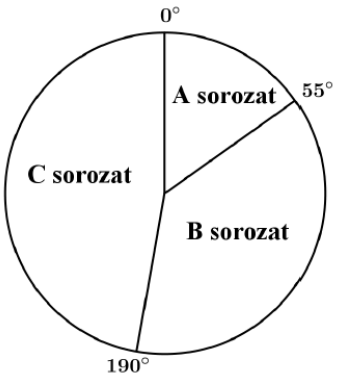
Tegyen X-et a megfelelő mezőbe!
Nézem az **A** sorozatot. ☐
Nézem a **B** sorozatot. ☐
Nézem a **C** sorozatot. ☐
Egyik sorozatot sem nézem. ☐
Ha az utolsó mezőbe X-et tett, akkor a másik három mezőt hagyja üresen!

Az első felméréskor kapott 600 kérdőív jelöléseit összesítve megállapították, hogy az A sorozat összesen 90 jelölést kapott, a B sorozat összesen 290-et, a C sorozat pedig összesen 230-at. Érdekes módon olyan válaszadó nem volt, aki pontosan két sorozatot nézett volna, viszont 55-en mindhárom sorozatot bejelölték.

a) A válaszolók hány százaléka nézte az A sorozatot? (2 pont)

b) Hány válaszoló nem nézte egyik sorozatot sem? (5 pont)

A második felmérés során kiválogatták azokat a kérdőíveket, amelyeken valamelyik sorozat meg volt jelölve. Ezeken a három sorozat nézettségére összesen 576 jelölés érkezett. Az adatok feldolgozói minden jelölést megszámoltak, és a végeredményről az itt látható kördiagramot készítették.



c) Számítsa ki, hogy az egyes sorozatok nézettségére hány jelölés érkezett! (5 pont)

Megoldás:

a) Az A sorozatot a válaszolók $\frac{90}{600}\cdot 100 =$ (1 pont)

15%-a nézte. (1 pont)

b) A kizárólag az egyik sorozatot nézők számát megkapjuk, ha az adott sorozatot nézők számából kivonjuk a mindhárom sorozatot nézők számát (55), (1 pont)
ezért csak az a A sorozatot 35, csak a B sorozatot 235, csak a C sorozatot 175 válaszadó nézte. (2 pont)
Így a valamelyik sorozatot nézők száma $35+235+175+55=500$, (1 pont)
ezért egyik sorozatot sem nézte $600-500=$ **100 fő**. (1 pont)

c) Az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek: (az A-val jelölt $55°$), a B-vel jelölt $135°$, a C-vel jelölt $170°$. (2 pont)

A kördiagramon $1°$-nak $\frac{576}{360}=1,6$ válaszadó felel meg. (1 pont)

Az A sorozatra $55\cdot 1,6=$ **88**

A B sorozatra $135 \cdot 1,6 =$ **216** (2 pont)

A C sorozatra $170 \cdot 1,6 =$ **272** jelölés érkezett.

Összesen: 12 pont

34) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)

b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)

Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapítottuk meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.

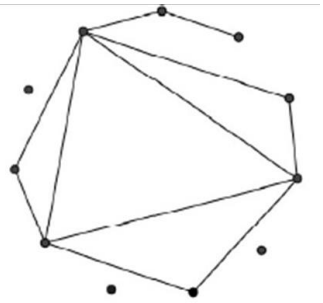
c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)

Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Több lehetőség is van, például: (3 pont)



b) Annyi kézfogás történt, ahány éle van a gráfnak, (1 pont)
összesen **11**. (1 pont)

c) A vizsgázó által megadott számok egyetlen **módusza 2**, (1 pont)
mediánja 3, (1 pont)
átlaga 4, (1 pont)
terjedelme 5. (1 pont)
Egy lehetséges megoldás például 2; 2; 2; 2; 2; 3; 6; 6; 6; 6; 7. (1 pont)

d) Annak a valószínűsége, hogy a játékos nem lő be egy tizenegyest $(1-0,9)=0,1$. (1 pont)
Összesen három lehetőséget kell figyelembe venni. (1 pont)
Pontosan egyszer talál be, és kétszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{1}\cdot 0,9\cdot 0,1^2 (=0,027)$. (1 pont)
Pontosan kétszer talál be, és egyszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{2}\cdot 0,9^2\cdot 0,1 (=0,243)$. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy mindháromszor betalál: $0,9^3 (=0,729)$. (1 pont)
A keresett valószínűség ezek összege, (1 pont)
azaz **0,999**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

35) Egy mérőállomáson az egyik év júliusának tizenhárom egymást követő napján az alábbi csapadékértékeket mérték (milliméterben): 2; 26; 8; 1; 21; 10; 22; 49; 5; 25; 9. Adja meg az adatsor terjedelmét és mediánját!
(3 pont)

Megoldás:

A terjedelem **48**. (1 pont)
A medián **9**. (2 pont)
Összesen: 3 pont

36) Egy webáruházba való belépés előzetes regisztrációhoz kötött, melynek során a regisztráló életkorát is meg kell adnia. Az adatok alapján a 25560 regisztráló közül 28 évesnél fiatalabb 7810 fő, 55 évesnél idősebb 4615 fő, a többiek 28 és 55 év közöttiek.

a) Készítsen a létszámadatok alapján kördiagramot, kiszámítva a három körcikkhez tartozó középponti szögeket is! (5 pont)

A webáruház üzemeltetői a vásárlói szokásokat szeretnék elemezni, ezért a regisztráltak közül véletlenszerűen kiválasztanak két személyt.

b) Adja meg annak a valószínűségét, hogy az egyik kiválasztott személy 28 évesnél fiatalabb, a másik 55 évesnél idősebb! (4 pont)

A regisztráltak egy része vásárol is a webáruházban. A vásárlók között a 28 év alattiak éppen kétszer annyian vannak, mint az 55 évesnél idősebbek. A 28 év alattiak az elmúlt időszakban összesen 19 325 700 Ft, az 55 év felettiek 17 543 550 Ft értékben vásároltak. Az 55 év felettiek átlagosan 2410 Ft-al költöttek többet, mint a 28 év alattiak.

c) Számítsa ki, hány 55 év feletti vásárlója volt a webáruháznak, és adja meg, hogy ezek a vásárlók átlagosan mennyit költöttek! (8 pont)

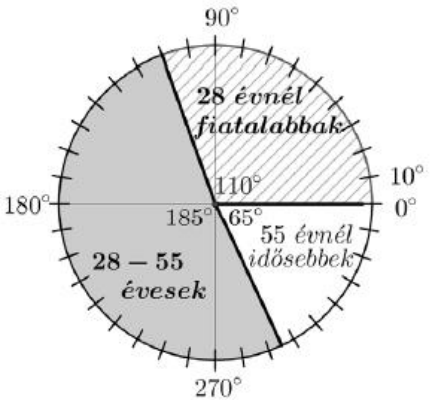
Megoldás:

a) A 28 évesnél fiatalabbakat ábrázoló körcikk középponti szöge $\frac{7810}{25560}\cdot 360° = 110°$. (1 pont)

Az 55 évesnél idősebbeket ábrázoló körcikk középponti szöge $\frac{4615}{25560}\cdot 360° = 65°$. (1 pont)

A 28 és 55 év közöttieket ábrázoló körcikk középponti szöge $360° - (110° + 65°) = 185°$. (1 pont)

Az egyes körcikkek megjelenítése a megfelelő méretben, (1 pont)
egyértelmű jelmagyarázattal: (1 pont)



b) A 28 év alattiak közül egyet 7810-féleképpen, az 55 évesnél idősebbek közül egyet 4615-féleképpen tudunk kiválasztani, így a kedvező esetek száma $7810\cdot 4615 (= 36043150)$. (1 pont)

Az összes esetek száma: $\binom{25560}{5} (= 326644020)$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{7810\cdot 4615}{\binom{25560}{2}} \approx$ (1 pont)

≈ 0,11. (1 pont)

c) Az 55 év feletti vásárlók számát jelölje x, ekkor a 28 év alattiak száma $2x$. Az 55 év felettiek átlagosan $\frac{17543550}{x}$, (1 pont)

a 28 év alattiak átlagosan $\frac{19325700}{2x}$ Ft-ot költöttek. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható: $\frac{17543550}{x} - 2410 = \frac{19325700}{2x}$. (1 pont)

Ebből $2410x = 7880700$, (1 pont)

azaz $x = 3270$. (1 pont)

$\frac{17543550}{3270} = 5365$ (1 pont)

A webáruháznak **3270** olyan vásárlója volt, aki 55 évnél idősebb, és ők átlagosan **5365** Ft-ot költöttek. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

37) Határozza meg az alábbi adatsor terjedelmét, átlagát és szórását!
1; 1; 1; 1; 3; 3; 3; 5; 5; 7 **(4 pont)**

***Megoldás*:**

A terjedelem a legkisebb és legnagyobb adat különbsége:
$7 - 1 = \mathbf{6}$. (1 pont)

Átlag: $\frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 7}{10} = \mathbf{3}$ (1 pont)

Szórás: $\sqrt{\frac{4(1-3)^2 + 3(3-3)^2 + 2(5-3)^2 + (7-3)^2}{10}} = \mathbf{2}$ (2 pont)

Összesen: 4 pont

38) Egy számtani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; *a* és 18.
a) Határozza meg az *a* értékét és a sorozat differenciáját! (3 pont)
Egy mértani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; *b* és 18.
b) Határozza meg a *b* értékét és a sorozat hányadosát! (5 pont)
A 32; *c* és 18 számokról tudjuk, hogy a három szám átlaga kettővel kisebb, mint a mediánja, továbbá $32 > c > 18$.
c) Határozza meg a *c* értékét! (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A számtani sorozat egyik tulajdonsága, hogy a sorozat bármely tagja egyenlő a tőle egyenlő távolságra lévő tagok számtani közepével, vagyis $a = \frac{32 + 18}{2} = \mathbf{25}$. (2 pont)

A sorozat differenciája bármely tagjának és az azt megelőző tagnak a különbsége, ezért $d = 25 - 32 = \mathbf{-7}$ (1 pont)

b) A mértani sorozat egyik tulajdonsága, hogy bármely tagjának és az azt megelőző tagnak a hányadosa egyenlő.

Ebből adódik, hogy $\frac{b}{32} = \frac{18}{b}$. (1 pont)

Az egyenletet rendezve kijön, hogy $\boldsymbol{b_1 = 24}$ és $\boldsymbol{b_2 = -24}$. (2 pont)

Ha $b = 24$, akkor a sorozat kvóciense $q_1 = \frac{24}{32} = \mathbf{\frac{3}{4}}$ (1 pont)

Ha $b = -24$, akkor a sorozat kvóciense $q_2 = \frac{-24}{32} = \mathbf{-\frac{3}{4}}$. (1 pont)

c) A három szám mediánja c. (1 pont)

Átlaga: $\frac{32 + c + 18}{3}$. (1 pont)

Ezután az alábbi összefüggés írható fel a szöveg alapján: $\frac{32 + c + 18}{3} = c - 2$. (1 pont)

Az egyenletet rendezzük, és a megoldás $\boldsymbol{c = 28}$ lesz. (2 pont)

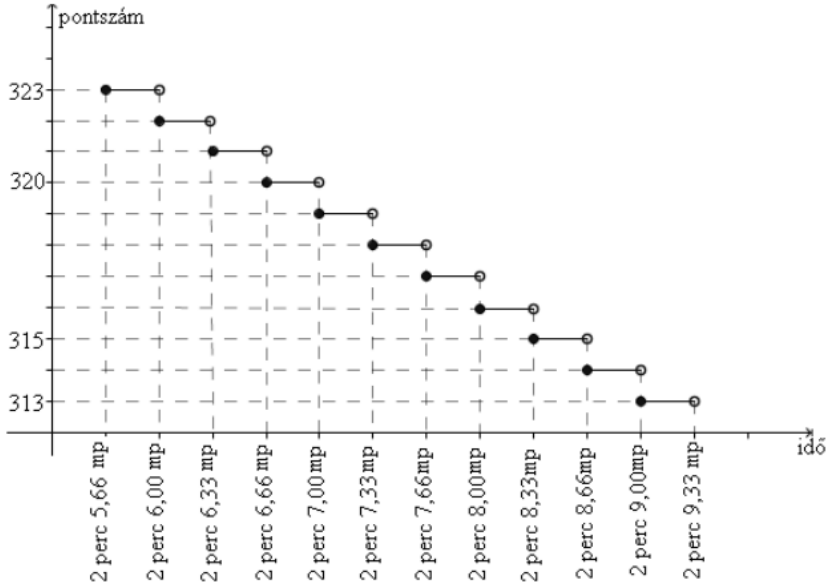
Összesen: 13 pont

39) Egy öttusaversenyen 31 résztvevő indult. A vívás az első szám, ahol mindenkivel egyszer mérkőzik meg. Aki 21 győzelmet arat, az 250 pontot kap. Aki ennél több győzelmet arat, az minden egyes további győzelemért 7 pontot kap a 250 ponton felül. Aki ennél kevesebbszer győz, attól annyiszor vonnak le 7 pontot a 250-ből, ahány győzelem hiányzik a 21-hez. (A mérkőzések nem végződhetnek döntetlenre.)

a) Hány pontot kapott a vívás során Péter, akinek 5 veresége volt? (3 pont)

b) Hány győzelme volt Bencének, aki 215 pontot szerzett? (3 pont)

Az öttusa úszás számában 200 métert kell úszni. Az elért időeredményeként járó pontszámot mutatja a grafikon.



c) Jelölje meg az alábbi két kérdés esetén a helyes választ!

Hány pontot kapott Robi, akinek az időeredménye 2 perc 6,28 másodperc? (2 pont)

A: 320 B: 321 C: 322 D: 323

Péter 317 pontot kapott. Az alábbiak közül válassza ki Péter időeredményét!

A: 2 perc 7,00 mp
B: 2 perc 7,60 mp
C: 2 perc 7,80 mp
D: 2 perc 8,00 mp

Az öttusa lovaglás számában egy akadálypályán tizenkét különböző akadályt kell a versenyzőnek átugrania. Egy akadály a nehézsége alapján három csoportba sorolható: *A*, *B* vagy *C* típusú. Ádám a verseny előtti bemelegítéskor először az öt darab *A*, majd a négy darab B, végül a három darab C típusú akadályokon ugrat át, mindegyiken pontosan egyszer. Bemelegítéskor az egyes akadálytípusokon belül a sorrend szabadon megválasztható.

d) Számítsa ki, hogy a bemelegítés során hányféle sorrendben ugrathatja át Ádám a tizenkét akadályt! (4 pont)

***Megoldás*:**

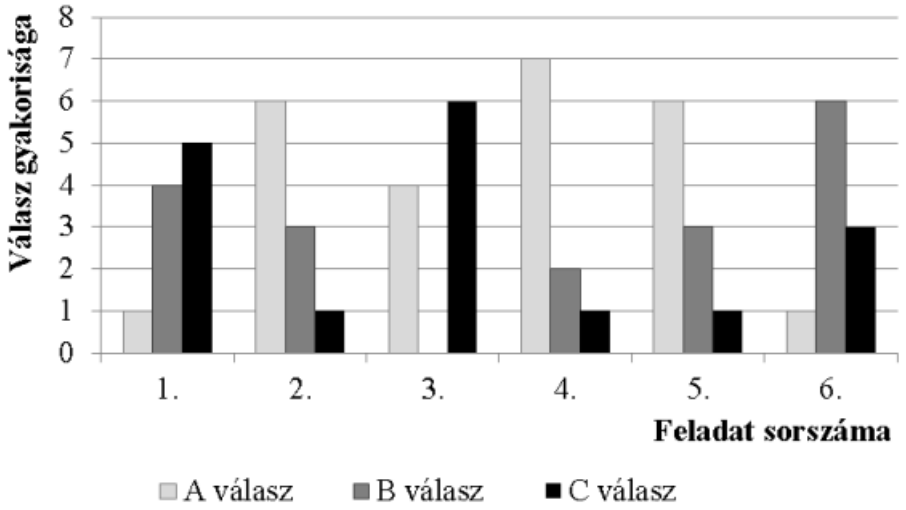
a) Péter összesen 30 mérkőzést játszott le, melyből 25-öt megnyert. A 21 győzelemért megkapta a 250 pontot, a további 4 győzelemért pedig 7-7 pontot kapott, így az ő pontszáma összesen $250+7\cdot 4=$ **278**. (3 pont)

b) Bence nem kapta meg a 250 pontot, tehát 21-nél kevesebb győzelme volt. Minden hiányzó győzelemért 7-7 pontot vontak le a 250-ből. Ez összesen $250-215=35$ pont, ebből következik, hogy 5-ször vontak le 7 pontot, vagyis **16** győzelmet aratott. (3 pont)

c) A grafikon leolvasása után a megoldás: ***C*: 322** és ***C*: 2 perc 7,80 mp**. (2 pont)

d) Ádám az 5db *A* akadályon 5! féleképpen, a 4db *B* akadályon 4! féleképpen, a 3db *C* akadályon pedig 3! féleképpen tud átugrani, így ez összesen $5!\cdot 4!\cdot 3!$, azaz **17280** lehetőség. (4 pont)

40) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott válaszok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)

b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

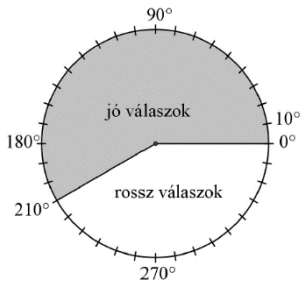
c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)

Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.

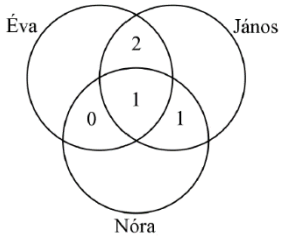
d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben? (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A jó válaszok száma 35, a rossz válaszok száma 25.
A 10 diák összesen 60 választ adott, ezért 1 válasz 6°-nak felel meg a kördiagramon. (1 pont)
Így a jó válaszok számát egy 210°-os körcikk, a rossz válaszok számát pedig egy 150°-os körcikk szemlélteti. (2 pont)



b) Az ábráról leolvasva, ha az állítás igaz lenne, akkor tanulók összesen $5+6+6+7+6+6=36$ pontot szereztek volna, viszont azt tudjuk, hogy 35 jó válasz volt, ezért az állítás **hamis**. (3 pont)



c) A megválaszolt kérdések számát egy Venn-diagramon ábrázoljuk. (2 pont)
Azért a két feladatért, amit csak egyedül oldottak meg 2 pont jár, így összesen $3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 1+2=\mathbf{11}$ pontot szereztek. (3 pont)

d) Az összes eset száma $3^6=729$, ennyiféleképpen lehet kitölteni a tesztet. (1 pont)
A kedvező esetek számát megkaphatjuk úgy, hogy az összes eset számából levonjuk a kedvezőtlen esetek számát. (1 pont)
Hogy egy válasz se legyen helyes $2^6=64$-féleképpen lehetséges, így a kedvező esetek száma $729-64=665$. (2 pont)
A keresett valószínűség pedig $P=\dfrac{665}{729}=\mathbf{0,91}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

41) A 8-nak és egy másik pozitív számnak a mértani közepe 12. Melyik ez a másik szám? (2 pont)

Megoldás:

$\sqrt[2]{8\cdot x}=12\Rightarrow \boldsymbol{x=18}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

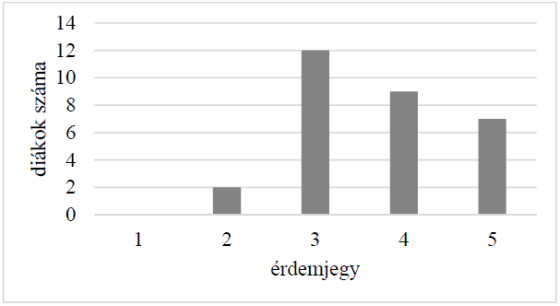
42) Egy adathalmazban öt adat van: 0; 1; 2; 3; 4. Számítsa ki az adathalmaz szórását! (2 pont)

Megoldás:

Az adatok átlaga 2, szórása $\sqrt{\dfrac{2^2+1^2+0^2+1^2+2^2}{5}}=\sqrt{\mathbf{2}}\approx\mathbf{1,41}$ (2 pont)

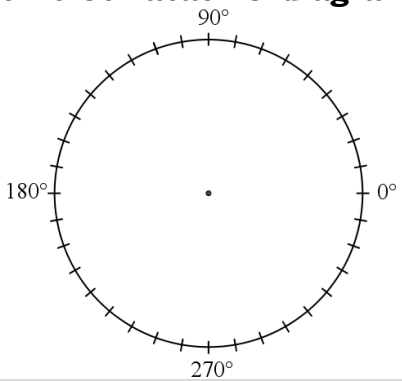
Összesen: 2 pont

43) Egy 30 fős osztály matematikaérettségi vizsgájának érdemjegyei olvashatók le az alábbi diagramról.



a) Adja meg az osztály matematikaérettségi érdemjegyeinek átlagát, mediánját és móduszát! (4 pont)

b) Ábrázolja az érdemjegyek eloszlását kördiagramon! (4 pont)



Az osztály tanulóinak matematikaérettségi dolgozatai közül az érettségi elnök véletlenszerűen kiválaszt és megvizsgál kettőt.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy mindkét kiválasztott dolgozat érdemjegye hármas! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

Megoldás:

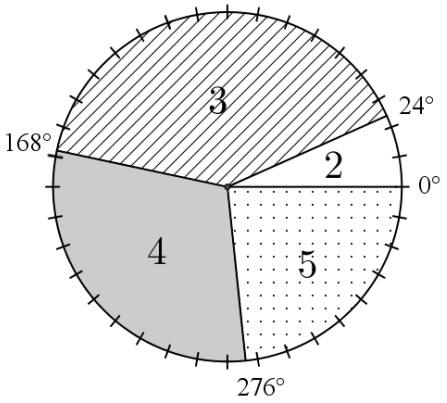
a) A jegyek átlaga $\frac{2\cdot 2+12\cdot 3+9\cdot 4+7\cdot 5}{30}=\mathbf{3,7}$. (2 pont)

A jegyek mediánja **4**. (1 pont)

A jegyek módusza **3**. (1 pont)

b) 1 főnek 12°-os középponti szög felel meg az ábrán. Az egyes osztályzatokhoz tartozó középponti szögek: 2-es 24°; 3-as: 144°; 4-es: 108°, 5-ös: 84°. (2 pont)

Ábrázolás... (2 pont)



c) A kedvező esetek száma $\binom{12}{2}(=66)$. (1 pont)

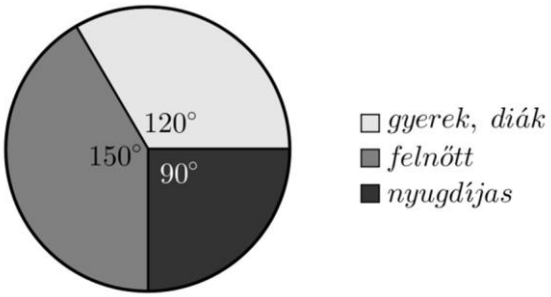
Az összes eset száma $\binom{30}{2}(=435)$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség ezek hányadosa: $\frac{66}{435}$, (1 pont)

ami a kért kerekítéssel **0,152**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

44) Az alábbi kördiagramm egy balatoni strandon a júliusban megvásárolt belépőjegyek típusának eloszlását mutatja.



Júliusban összesen 16416 fő vásárolt belépőjegyet. A belépőjegyek árát az alábbi táblázat tartalmazza.

gyerek, diák	**350 Ft/fő**
felnőtt	**700 Ft/fő**
nyugdíjas	**400 Ft/fő**

a) Mennyi volt a strand bevétele a júliusban eladott belépőkből? (5 pont)
A tapasztalatok szerint júliusban folyamatosan nő a strandolók száma. Ezért a strandbüfében rendszer, hogy július 1-jei megrendelést követően július 2-től kezdve július 31-ig minden nap ugyanannyi literrel növelik a nagykereskedésből megrendelt üdítő mennyiségét.
A könyvelésből kiderült, hogy július 1-jén, 2-án és 3-án összesen 165 litert, július 15-én pedig 198 litert rendeltek.
b) Hány liter üdítőt rendeltek júliusban összesen? (7 pont)

Megoldás:

a) A kördiagramon 10° $(16416:36=)$ 456 főnek felel meg. (1 pont)

A jegyek száma rendre 5472, 6840, 4104. (2 pont)

A jegybevétel júliusban $5472\cdot 350+6840\cdot 700+4104\cdot 400=$ (1 pont)

8344800 forint volt. (1 pont)

b) A napi üdítőrendelések egy számtani sorozat tagjai, melynek első tagja a_1, differenciája d. Az első 31 tag összegét kell kiszámolni. (1 pont)

A szöveg szerint:

$a_1+a_1+d+a_1+2d=165$ és $a_1+14d=198$ (1 pont)

A második egyenletből a_1-et kifejezve és az első egyenletbe behelyettesítve:

$3\cdot(198-14d)+3d=165$ (1 pont)

ahonnan $-39d=-429$ (1 pont)

így $d=11$ és $a_1=44$ (1 pont)

$S_{31} = \frac{2 \cdot 44 + 30 \cdot 11}{2} \cdot 31 =$ (1 pont)

6479 liter üdítőt rendeltek júliusban. (1 pont)

Összesen: 12 pont

45) Egy 20 fős társaság tagjait az április havi szabadidős tevékenységeikről kérdezték. Mindenki három eldöntendő kérdésre válaszolt (igennel vagy nemmel).

I. Volt-e moziban?

II. Olvasott-e szépirodalmi könyvet?

III. Volt-e koncerten?

A válaszokból kiderült, hogy tizenketten voltak moziban, kilencen olvastak szépirodalmi könyvet, és négy fő járt koncerten. Öten voltak, akik moziban jártak és szépirodalmi könyvet is olvastak, négyen pedig moziban és koncerten is jártak. Hárman mindhárom kérdésre igennel válaszoltak.

a) Hány olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt? (6 pont)

A társaság 20 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.

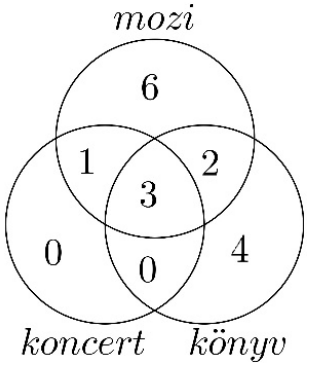
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legalább egyikük volt moziban április folyamán! (5 pont)

Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2.

c) Adja meg ezt a kilenc számot! (6 pont)

Megoldás:

a) Azok száma, akik jártak moziban, és olvastak szépirodalmi könyvet, de koncerten nem voltak: $(5-3=)2$. (1 pont)



Azok száma, akik voltak moziban és koncerten, de nem olvastak szépirodalmi könyvet: $(4-3=)1$. (1 pont)

A társaságban nem volt olyan személy, aki nem volt moziban, de olvasott szépirodalmi könyvet, és koncerten is volt. (1 pont)

Azok száma, akik csak moziban voltak: $12-(2+3+1)=6$ Hasonlóképpen azok száma, akik csak szépirodalmi könyvet olvastak (moziban és koncerten nem voltak): 4, illetve azok száma, akik csak koncerten voltak (moziban nem és könyvet sem olvastak): 0. (2 pont)

$20-(3+2+1+6+4)=$ **4 olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt.** (1 pont)

b) Összesen $\binom{20}{2}(=190)$-féleképpen választhatunk ki két embert. (1 pont)

A komplementer módszert használva az összes lehetséges esetből kivonjuk, azoknak az eseteknek a számát, amikor egyik kiválasztott személy sem volt moziban. (1 pont)

Két olyan embert, aki nem járt moziban, $\binom{8}{2}(=28)$-féleképpen választhatunk ki. (1 pont)

A kedvező esetek száma $190-28=162$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{162}{190}\approx 0,853$ (1 pont)

c) Az adatok terjedelme 2, továbbá az adatok között szerepel az 1 és a 2, ezért a válaszok az 1, 2 és 3 számok közül kerülnek ki. (1 pont)

A számok egyetlen módusza az 1, ezért legalább négy 1-es válasz volt. (1 pont)

A nagyság szerint sorba rendezett válaszok közül az ötödik 2 (így pontosan négy 1-es válasz volt). (1 pont)

A válaszok összege (az átlag alapján) 16. (1 pont)

A számok között szerepel legalább egy 3-as, így a hiányzó három szám (melyek 2-esek vagy 3-asok) összege 7. Ez a három szám 2, 2, 3. (1 pont)

A kilenc szám: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. (1 pont)

Összesen: 17 pont

Számelmélet
Megoldások

1) Egy számtani sorozat második tagja 17, harmadik tagja 21.
a) Mekkora az első 150 tag összege? (5 pont)
Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25 863.
b) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)
c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

Megoldás:

a) $a_2 = 17 = a_1 + d$ és $a_3 = 21 = a_1 + 2d$
$d = 4$ (1 pont)
$a_1 = 13$ (1 pont)
$a_{150} = a_1 + 149d = 609$ (1 pont)
$S_{150} = \frac{13 + 609}{2} \cdot 150$ (1 pont)
$S_{150} =$ **46650** (1 pont)

b) Alkalmazzuk a hárommal való oszthatóság szabályát. (1 pont)
25863 számjegyeinek összege 24, így osztható 3-mal. (1 pont)
Tetszőleges sorrend esetén az összeg nem változik, tehát az állítás igaz. (1 pont)

c) Alkalmazzuk a néggyel való oszthatóság szabályát. (1 pont)
Ebben az esetben ez akkor teljesül, ha az utolsó két számjegy: 28; 32; 36; 52; 56; 68. (1 pont)
A tízes helyiértéken tehát 2; 3; 5; vagy 6 állhat. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2) Peti felírt egy hárommal osztható hétjegyű telefonszámot egy cédulára, de az utolsó jegy elmosódott. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy nulla volt. A kiolvasható szám: 314726∆. Igaza lehetett-e Peti barátjának? Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

Megvizsgáljuk, hogy a szám osztható-e hárommal. (1 pont)
A számjegyek összege nem három többszöröse (a 0 az összegen nem változtat), **tehát nem volt igaza**. (1 pont)

3) Tekintse a következő állításokat, és a táblázatban mindegyik betűjele mellé írja oda, hogy igaz, vagy hamis állításról van-e szó!
a) Két pozitív egész közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolút-értéke nagyobb. (1 pont)
b) Két egész szám közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolút-értéke nagyobb. (1 pont)
c) Negatív szám egész kitevőjű hatványai között pozitívak és negatívak is vannak. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)
c) **igaz** (1 pont)

Összesen: 3 pont

4) Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.
a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám? (8 pont)
b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (4 pont)

Megoldás:

a) Az összeadott páratlan számok egy $d = 2$ differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai. (1 pont)
Legyen az összeg legkisebb tagja a_1, ekkor $a_{55} = a_1 + 54 \cdot 2$ (1 pont)
A számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó képletet alkalmazva:
$S_{55} = 55 \cdot \frac{2a_1 + 54 \cdot 2}{2} \Rightarrow 3905 = 55(a_1 + 54)$ (2 pont)
$\boldsymbol{a_1 = 17}$ (1 pont)
$\boldsymbol{a_{55} = 125}$ (1 pont)
Tehát a keresett páratlan számok a 17 és a 125. (1 pont)
Ellenőrzés: az összes valóban 3905. (1 pont)
b) A keresett számnak 5-re kell végződnie. (1 pont)
A 17 után a legkisebb ilyen szám a 25, de ez nem felel meg. (1 pont)
A következő szám 35, és ez jó, mert $35 = 5 \cdot 7$. (1 pont)
Tehát a keresett szám a 35. (1 pont)

Összesen: 12 pont

5) A pozitív egészeket növekvő sorrendbe állítjuk. Melyik szám nagyobb: a hetedik 13-mal osztható pozitív egész, vagy a tizenharmadik 7-tel osztható pozitív egész? (2 pont)

Megoldás:

A két szám egyenlő. $(7 \cdot 1 = 91)$ (2 pont)

6) Háromjegyű számokat írtunk fel a 0; 5 és 7 számjegyekkel. Írja fel ezek közül azokat, amelyek öttel oszthatók, és különböző számjegyekből állnak! (2 pont)

Megoldás:

A keresett számok: **570; 750; 705**. (2 pont)

7) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
a) Ha egy természetes szám osztható hattal és tízzel, akkor osztható hatvannal. (1 pont)
b) A 20-nál kisebb pozitív prímszámok összege páratlan. (1 pont)
c) A deltoid átlói felezik a belső szögeket. (1 pont)

Megoldás:

a) **hamis** (1 pont)
b) **igaz** (1 pont)
c) **hamis** (1 pont)

Összesen: 3 pont

8) Adja meg a $\left]-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right[$ nyílt intervallum két különböző elemét! (2 pont)

Megoldás:

Például: $\boldsymbol{M=\left\{-\frac{3}{10};-\frac{1}{5}\right\}}$ (2 pont)

9) Írja fel két egész szám hányadosaként a $2+\frac{2}{3}$ szám reciprokának értékét! (2 pont)

Megoldás:

A $2+\frac{2}{3}$ reciproka: $\frac{1}{2+\frac{2}{3}}$ (1 pont)

A reciprok értéke: $\frac{3}{8}\left(=\frac{375}{1000}\right)$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

10) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,
a) amely öt azonos számjegyből áll; (3 pont)
b) amelyik páros; (4 pont)
c) amelyik 4-gyel osztható? (5 pont)

Megoldás:

a) **6** ilyen szám van. (3 pont)
b) Az utolsó számjegy páros szám (2, 4, vagy 6), (1 pont)
az első 4 számjegy $6^4=(1296)$-féleképpen alakulhat. (2 pont)
$\boldsymbol{3\cdot 6^3\,(=3888)}$-féle páros szám lehet. (1 pont)
c) (A 4-gyel való oszthatósági szabály értelmében) a két utolsó helyen 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64 állhat, (2 pont)
az első 3 számjegy pedig $6^3=(216)$-féleképpen alakulhat. (2 pont)
Tehát $\boldsymbol{9\cdot 6^3\,(=1944)}$ féle 4-gyel osztható szám lehet. (1 pont)

Összesen: 12 pont

11) Adja meg a 24 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát! (2 pont)

Megoldás:

A keresett halmaz: {**1; 2; 3; 4; 6; 8**}. (2 pont)

12) Írja fel 24 és 80 legkisebb közös többszörösét! Számítását részletezze! **(3 pont)**

Megoldás:

$24 = 2^3 \cdot 3$ (1 pont)

$80 = 2^4 \cdot 5$ (1 pont)

A legkisebb közös többszörös: $\mathbf{2^4 \cdot 3 \cdot 5 (= 240)}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

13) Sorolja fel a 2010-nek mindazokat a pozitív osztóit, amelyek prímszámok! **(2 pont)**

Megoldás:

2, **3**, **5** és **67**. (2 pont)

14) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

I. Minden prímszám páratlan. **(1 pont)**

II. Létezik páratlan prímszám. **(1 pont)**

III. Minden egész szám racionális szám. **(1 pont)**

IV. Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként **(1 pont)**

Megoldás:

I. **hamis** (1 pont)

II. **igaz** (1 pont)

III. **igaz** (1 pont)

IV. **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

15) Adottak a következő számok: $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4$ és $b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 13$.
Írja fel *a* és *b* legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! A kért számokat elegendő prímtényezős alakban megadni. **(2 pont)**

Megoldás:

A legnagyobb közös osztó: $\mathbf{2 \cdot 5 \cdot 11^3 (= 13310)}$ (1 pont)

A legkisebb közös többszörös: $\mathbf{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^4 \cdot 13 (= 1865263400)}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

16) Döntse el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz-e vagy hamis!

A: Ha két szám négyzete egyenlő, akkor a számok is egyenlők. **(1 pont)**

B: A kettes számrendszerben felírt 10100 szám a tízes számrendszerben 20. **(1 pont)**

C: Egy hatoldalú konvex sokszögnek 6 átlója van. **(1 pont)**

Megoldás:

A: **hamis** (1 pont)

B: **igaz** (1 pont)

C: **hamis** (1 pont)

Összesen: 3 pont

17) Írja fel prímszámok szorzataként a 420-at! **(2 pont)**

Megoldás:

$420 = \mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\left(= \mathbf{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\right)$ (2 pont)

18) Bontsa fel a 36000-et két részre úgy, hogy a részek aránya 5:4 legyen! **(2 pont)**

Megoldás:

20 000 és **16 000**. (2 pont)

19) Adja meg a következő állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A) A $\{0;1;2;3;4\}$ adathalmaz szórása 4.

B) Ha egy sokszög minden oldala egyenlő hosszú, akkor a sokszög szabályos.

C) A 4 és a 9 mértani közepe 6. **(2 pont)**

Megoldás:

A) **hamis**
B) **hamis**
C) **igaz** (2 pont)

Összesen: 2 pont

20) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. **(1 pont)**

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. **(1 pont)**

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm²-ben mért számértéke. **(1 pont)**

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. **(1 pont)**

Megoldás:

a) igaz (1 pont)
b) hamis (1 pont)
c) igaz (1 pont)
d) hamis (1 pont)

Összesen: 4 pont

21) Egy érettségiző osztály félévi matematika osztályzatai között elégtelen nem volt, de az összes többi jegy előfordult. Legkevesebb hány tanulót kell kiválasztani közülük, hogy a kiválasztottak között biztosan legyen legalább kettő, akinek azonos volt félévkor a matematika osztályzata? **(2 pont)**

Megoldás:

A kiválasztandó tanulók száma: **5**. (2 pont)

22)

a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! (5 pont)

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! (7 pont)

Megoldás:

a) A sorozat tagjai: 6; 6 + d; 6 + 2d; 1623 (1 pont)
6 + 3d = 1623 (1 pont)
d = 539 (1 pont)
Az első beiktatott szám: **545** (1 pont)
A második beiktatott szám: **1084** (1 pont)

b) A feltételeknek megfelelő számok: 8; 12; 16; …; 1620 (2 pont)
Ezek a számok egy számtani sorozat egymást követő tagjai (1 pont)
$1620 = 8 + 4 \cdot (n-1)$ (1 pont)
$n = 404$ (1 pont)
$S_n = \frac{8+1620}{2} \cdot 404$ (1 pont)
$\boldsymbol{S_n = 328856}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

23) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

a) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb mindkét számnál.

b) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig osztója a két szám összegének.

c) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója nem lehet 1.

Megoldás:

a) **Hamis**
b) **Igaz**
c) **Hamis** (1 pont-két helyes válasz, 2 pont-3 helyes válasz)

24) Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A szabályos dobókockán szereplő számok mindegyike osztója a 60-nak,(2 pont)
így a kérdezett esemény (a biztos esemény, melynek) valószínűsége 1. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) Legyen A halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az A, a B, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (4 pont)

Megoldás:

$A = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ (1 pont)

$B = \{3;6;9\}$ (1 pont)

$A \cap B = \{3;6\}$ (1 pont)

$A \setminus B = \{1;2;4;5;7;8\}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

26) Melyik számjegy állhat a $\overline{2582X}$ ötjegyű számban az X helyén, ha a szám osztható 3-mal? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Egy szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. (1 pont)

$2+5+8+2=17$ (1 pont)

Így X lehetséges értékei: **1; 4; 7**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

27) Jelölje $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát és $\varnothing$ az üres halmazt! Adja meg az alábbi halmazműveletek eredményét!

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z} \cup \varnothing$

c) $\varnothing \setminus \mathbb{N}$ **(3 pont)**

Megoldás:

a) $\mathbb{N}$ (1 pont)

b) $\mathbb{Z}$ (1 pont)

c) $\varnothing$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

28) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Minden valós szám abszolút értéke pozitív.

B: $16^{\frac{1}{4}} = 2$

C: Ha egy szám osztható 6-tal és 9-cel, akkor biztosan osztható 54-gyel is. (2 pont)

Megoldás:

A: **Hamis**

B: **Igaz**

C: **Hamis** (2 pont)

29) Milyen számjegy állhat az X helyén, ha a négyjegyű $\overline{361X}$ szám 6-tal osztható? (2 pont)

Megoldás:

$X = 2$ vagy $X = 8$ (1+1 pont)

Összesen: 2 pont

30) Két különböző színű szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok szorzata prímszám lesz! Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

Az összes eset száma 36. (1 pont)
Akkor lesz prímszám a sorozat, ha az egyik kockával 1-et és a másikkal 2-t, 3-t vagy 5-öt dobunk. (1 pont)
Ezt összesen $2 \cdot 3 = 6$-féleképpen tehetjük meg (ez a kedvező esetek száma). (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

31) Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldását részletezze! (3 pont)

***Megoldás*:**

A halmaz elemei: $A = \{1;2;4;7;14;28\}$
B halmaz elemei: $B = \{1;7;49\}$ (1 pont)
$A \cap B = \{1;7\}$ (1 pont)
$B \setminus A = \{49\}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

32) Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy néggyel osztható számot választunk? Válaszát indokolja! (3 pont)

***Megoldás*:**

Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számokból 25 db van, ez az összes eset száma. (1 pont)
Ezek közül 12 db osztható néggyel, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)
Így a kérdéses valószínűség $P = \frac{12}{25} = \mathbf{0,48}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

33) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
A: Ha egy szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor osztható 48-cal is.
B: Ha egy pozitív egész szám minden számjegye osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal.
C: A 48 és a 120 legnagyobb közös osztója a 12. (2 pont)

***Megoldás*:**

A) **Hamis**, hiszen fordítva lenne igaz.
B) A 3-mal való oszthatóság feltétele, hogy a számjegyeinek összege osztható 3-mal, és ha az összeadásban minden tag osztható 3-mal, akkor az összeg is osztható. Tehát az állítás **igaz**.
C) 48 és 120 legnagyobb közös osztója 24, így az állítás **hamis**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

34) Milyen számjegyeket írhatunk a c helyére, hogy a $\overline{64c39c}$ hatjegyű szám osztható legyen 3-mal? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A számjegyek összege $22+2c$ (1 pont)
Egy szám (pontosan) akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. (1 pont)
Így c lehetséges értékei **1; 4; 7** . (1 pont)

Összesen: 3 pont

Szöveges feladatok
Megoldások

1) Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12 %-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.

a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt? (10 pont)

b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Annának, illetve Zsuzsinak az osztozkodás után? (7 pont)

Megoldás:

a) Jelentse x a magazin árát. (1 pont)

Annának $0,88x$ forintja van. (1 pont)

Zsuzsinak $\frac{4}{5}x$ forintja van. (1 pont)

Az egyenlet: $0,88x+\frac{4}{5}x-x=714$ (2 pont)

$x=1050$ (1 pont)

$0,88x=924$ és (1 pont)

$\frac{4}{5}x=840$ (1 pont)

A magazin 1050 Ft-ba került. Annának eredetileg 924 Ft-ja, Zsuzsinak 840 Ft-ja volt. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) A maradékból Annának a, Zsuzsinak $714-a$ Ft jut. (1 pont)

$\frac{924}{840}=\frac{a}{714-a}$ vagy $\frac{0,88}{0,8}=\frac{a}{714-a}$ (2 pont)

Ebből: $a=374$ (1 pont)

$714-a=340$ (1 pont)

Tehát Annának 374 Ft-ja, Zsuzsinak 340 Ft-ja marad a vásárlás után. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

2) 2001-ben a havi villanyszámla egy háztartás esetében három részből állt. az alapdíj 240 Ft, ez független a fogyasztástól, a nappali áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 19,8 Ft, az éjszakai áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 10,2 Ft. A számla teljes értékének 12 %-át kell még általános forgalmi adóként (ÁFA) kifizetnie a fogyasztónak.

a) Mennyit fizetett forintra kerekítve egy család abban a hónapban, amikor a nappali fogyasztása 39 kWh, az éjszakai fogyasztása 24 kWh volt? (3 pont)

b) Adjon képletet a befizetendő számla *F* összegére, ha a nappali fogyasztás *x* kWh, és az éjszakai fogyasztás pedig *y* kWh! (3 pont)

c) Mennyi volt a család fogyasztása a nappali illetve és az éjszakai áramból abban a hónapban, amikor 5456 Ft-ot fizettek, és tudjuk, hogy a nappali fogyasztásuk kétszer akkora volt, mint az éjszakai? **(8 pont)**

d) Mekkora volt a nappali és az éjszakai fogyasztás aránya abban a hónapban, amikor a kétféle fogyasztásért (alapdíj és ÁFA nélkül) ugyanannyit kellett fizetni? **(3 pont)**

Megoldás:

a) $h = 1{,}12(240 + 39 \cdot 19{,}8 + 24 \cdot 10{,}2) = 1407{,}84 \approx \mathbf{1408\ Ft}$-ot fizettek. (2+1 pont)

b) $\boldsymbol{F = 1{,}12(240 + 19{,}8x + 10{,}2y)}$ (3 pont)

c) $5456 = 1{,}12(240 + 19{,}8x + 10{,}2y)$ (2 pont)

$x = 2y$ (2 pont)

$4871{,}43 = 240 + 39{,}6y + 10{,}2y$ (1 pont)

$4631{,}43 = 49{,}8y$ (1 pont)

$y = 93$ (1 pont)

A nappali áramból 186 kWh, az éjszakaiból 93 kWh volt a fogyasztás. (1 pont)

d) $19{,}8x = 10{,}2y$ (1 pont)

$\frac{x}{y} = \frac{10{,}2}{19{,}8} \approx \mathbf{0{,}515}$ a keresett arány. (2 pont)

Összesen: 17 pont

3) Egy farmernadrág árát 20 %-kal felemelték, majd amikor nem volt elég nagy a forgalom, az utóbbi árat 25 %-kal csökkentették. Most 3600 Ft-ért lehet a farmert megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszát számítással indokolja! **(4 pont)**

Megoldás:

$1{,}2 \cdot 0{,}75x = 3600$ Ha x Ft a farmer eredeti ára, akkor (3 pont)

$\boldsymbol{x = 4000}$ **Ft** (1 pont)

Összesen: 4 pont

4) Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot egy évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel egy év elteltével, ha év közben nem változtatott a lekötésen? **(2 pont)**

Megoldás:

156000 Ft-ot vehet fel Péter egy év elteltével. (2 pont)

5) Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítésekor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.

a) Hány sor van a fenyők parcellájában? Hány fenyőfa van egy sorban? **(10 pont)**

b) Hány platánfát telepítettek? **(2 pont)**

Megoldás:

a)

	sorok száma	egy sorban lévő fák száma	összesen	
fenyő	x	y	$x \cdot y$	
tölgy	$x-4$	$y-5$	$(x-4)(y-5)$	$x \cdot y - 360$
platán	$x+3$	$y+2$	$(x+3)(y+2)$	$x \cdot y + 228$

(3 pont)

A tölgyek és platánok összes számát kétféle módon felírva kapjuk az alábbi egyenleteket:

$(x-4)(y-5) = x \cdot y - 360$ (1 pont)

$(x+3)(y+2) = x \cdot y + 228$ (1 pont)

Rendezés után

$\begin{cases} 5x + 4y = 380 \\ 2x + 3y = 222 \end{cases}$ (2 pont)

Innen $x = 36$ és $y = 50$ (2 pont)

A fenyők parcellájában **36** sor, és egy sorban **50** db fenyőfa van. (1 pont)

b) A platánok parcellájában 39 sor és soronként 52 fa van. (1 pont)

2028 platánfa van. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) Bea édesapja két és félszer olyan idős most, mint Bea. 5 év múlva az édesapa 50 éves lesz. Hány éves most Bea? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Ha Bea most x éves, akkor $2{,}5x = 45$, (2 pont)

ahonnan $\boldsymbol{x = 18}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

7) Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A, a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl.: ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez).

a) Töltse ki az első forduló táblázatának hiányzó adatait! (4 pont)

Első forduló eredményei	**1. kérdés**	**2. kérdés**	**3. kérdés**	**4. kérdés**
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	
Jó válaszok száma	7	10		8
Anikó elért pontszáma			5	0

b) Hány százalékkal növekedett volna Anikó összpontszáma az első fordulóban, ha a második kérdésre is jól válaszolt volna? (A többi játékos válaszát változatlannak képzeljük.) (3 pont)

c) Ha Anikó valamelyik másik fordulóban mind a négy kérdésre találomra válaszol, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden válasza helyes? (3 pont)

d) Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre kapott összpontszáma a lehető legtöbb legyen? (7 pont)

Megoldás:

a)

Első forduló eredményei	**1. kérdés**	**2. kérdés**	**3. kérdés**	**4. kérdés**
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	**hibás**
Jó válaszok száma	7	10	**15**	8
Anikó elért pontszáma	**13**	**0**	5	0

(4 pont)

b) A 2. kérdés oszlopa így módosul: helyes, 11, 9; Anikó tehát 9 pontot kapott. (1 pont)
Anikó elért pontszáma ezzel 27 lesz. Ez a régi pontszám 150 százaléka, (1 pont)
tehát a **pontszám 50%-kal emelkedett volna.** (1 pont)

c) Anikó összesen $3^4 = 81$ módon válaszolhat a négy kérdésre. (2 pont)
Egyetlen esetben lesz minden válasza helyes, ezért a keresett valószínűség: $\frac{1}{81}$. (1 pont)

d) Ha x jó válasz születik a vizsgált kérdésre, akkor a jól válaszolók $20-x$ pontot kapnak személyenként. (1 pont)
Az elért összpontszám: $x(20-x)$. (2 pont)

Az $x \mapsto 20x - x^2$ függvény maximumát keressük a 20-nál kisebb pozitív egészek körében. A maximum hely (akár grafikusan, akár teljes négyzetté való kiegészítéssel, akár a számtani-mértani közép összefüggésre való hivatkozással, akár az esetek végigszámolásával) $x = 10$. (3 pont)
Tíz játékos helyes válasza esetén lesz a játékosok összpontszáma a lehető legtöbb. (1 pont)

Összesen: 12 pont

8) Ha fél kilogramm narancs 75 Ft-ba kerül, akkor hány kilogramm narancsot kapunk 300 Ft-ért? (2 pont)

Megoldás:

2 kilogrammot. (2 pont)

9) A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az *A* Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)

a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott? (3 pont)

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) Hány százalékos volt a *B* Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel? (10 pont)

c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.) (4 pont)

Megoldás:

a) A felvehető összeg: $700000 \cdot 1{,}06^2$ (2 pont)

ami **786520 Ft.** (1 pont)

b) (Az első évben x %-os volt a kamat.)

Az első év végén a számlán lévő összeg:

$$800000\left(1+\frac{x}{100}\right).$$ (2 pont)

A második év végén a felvehető összeg:

$$800000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+3}{100}\right)=907200$$ (2 pont)

$x^2+203x-1040=0$ (3 pont)

$x_1=5$ (1 pont)

a másik gyök negatív (–208), nem felel meg. (1 pont)

Az első évben 5%-os volt a kamat. (1 pont)

A feladat megoldható mértani sorozat felhasználásával is.

c) Ha a két évvel ezelőtti ár y forint, akkor egy év múlva $1{,}04 \cdot y$, (1 pont)

két év múlva $1{,}04^2 \cdot y = 907200$ forint az ár. (1 pont)

$$y=\frac{907200}{1{,}04^2}\left(\approx 838757\right)$$ (1 pont)

Két évvel korábban $\approx$ **838757** Ft -ot kellett volna fizetniük. (1 pont)

Összesen: 17 pont

10) Egy kisüzem 6 egyforma teljesítményű gépe 12 nap alatt gyártaná le a megrendelt csavarmennyiséget. Hány ugyanilyen teljesítményű gépnek kellene dolgoznia ahhoz, hogy ugyanennyi csavart 4 nap alatt készítsenek el? (2 pont)

Megoldás:

18 gépnek kellene dolgoznia. (2 pont)

11) Egy vetélkedőn részt vevő versenyzők érkezéskor sorszámot húznak egy urnából. Az urnában 50 egyforma gömb van. Minden egyes gömbben egy-egy szám van, ezek különböző egész számok 1-től 50-ig.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az elsőnek érkező versenyző héttel osztható sorszámot húz? (3 pont)

A vetélkedő győztesei között jutalomként könyvutalványt szerettek volna szétosztani a szervezők. A javaslat szerint Anna, Bea, Csaba és Dani kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően $1:2:3:4$. Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalom ötödét szánták, önként lemond az utalványról. A zsűri úgy döntött, hogy a neki szánt 16000 forintos utalványt is szétosztják a másik három versenyző között úgy, hogy az ő jutalmaik közötti arány ne változzon.

b) Összesen hány forint értékű könyvutalványt akartak a szervezők szétosztani a versenyzők között, és ki mondott le a könyvutalványról? (6 pont)

c) Hány forint értékben kapott könyvutalványt a jutalmat kapott három versenyző külön-külön? (3 pont)

Megoldás:

a) Mivel 1-50-ig 7 darab 7-tel osztható szám van, (1 pont)
az első versenyző $\frac{7}{50}$ valószínűséggel húz 7-tel osztható számot. (2 pont)

b) Ha a jutalom ötödrésze 16000 forint, akkor a teljes jutalmat **80000 forint**ra tervezték. (2 pont)
Az arányok szerint 1 egység a teljes jutalom 10-ed része, (1 pont)
egy egység 8000 forintot ér. (1 pont)
Bea kapott volna 16000 forintot, így ő mondott le a jutalomról. (2 pont)

c) Mivel $1:3:4$ arányban osztották szét a könyvutalványokat, (1 pont)
Anna 10000, Csaba 30000, Dani pedig 40000 forint értékben kapott könyvutalványt. (2 pont)

Összesen: 12 pont

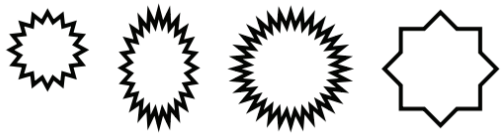
12) Ha az eredetileg $I_0\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ watt intenzitású lézersugár x mm $(x \geq 0)$ mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}}\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0 = 800\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15 %-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!) (6 pont)

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel? (8 pont)



Megoldás:

a)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800	713	635	505	450	357	253

(3 pont)

b) Megoldandó a $0{,}15 = 0{,}1^{\frac{x}{6}}$ egyenlet (ahol x a keresett távolság mm-ben mérve). (2 pont)

$$\lg 0{,}15 = \frac{x}{6} \cdot 0{,}1$$

$$x = 6 \cdot \frac{\lg 0{,}15}{\lg 0{,}1}$$ (2 pont)

$\boldsymbol{x \approx 4{,}9}$ (1 pont)

A lézersugár intenzitása kb. 4,9 mm mélységben csökken az eredeti érték **15%**-ára. (1 pont)

c) Minden csillag esetében három lehetőség van a megvilágításra: kék, zöld, nincs kirajzolva. (3 pont)

A különböző dekorációs tervek száma ezért: $3^4 = 81$. (4 pont)

Legalább egy csillagot ki kell rajzolni, így a lehetőségek száma $\mathbf{81-1=80}$.

(1 pont)

Összesen: 17 pont

13) András 140 000 forintos fizetését megemelték 12 %-kal. Mennyi lett András fizetése az emelés után? (2 pont)

Megoldás:

András fizetése az emelés után 156 800 Ft lett. (2 pont)

14) A testtömegindex kiszámítása során a vizsgált személy kilogrammban megadott tömegét osztják a méterben mért testmagasságának négyzetével. Számítsa ki Károly testtömegindexét, ha magassága 185 cm, tömege pedig 87 kg! (3 pont)

Megoldás:

Károly testtömegindexe: $\boldsymbol{\approx 25{,}42\ \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)}$ (3 pont)

15) A munkavállaló nettó munkabérét a bruttó béréből számítják ki levonások és jóváírások alkalmazásával. Kovács úr bruttó bére 2010 áprilisában 200 000 forint volt. A 2010-ben érvényes szabályok alapján különböző járulékokra ennek a bruttó bérnek összesen 17%-át vonták le. Ezen felül a bruttó bérből személyi jövedelemadót is levontak, ez a bruttó bér 127%-ának a 17%-a volt. A levonások után megmaradó összeghez hozzáadtak 15 100 forintot adójóváírásként. Az így kapott érték volt Kovács úr nettó bére az adott hónapban.

a) Számítsa ki, hogy Kovács úr bruttó bérének hány százaléka volt a nettó bére az adott hónapban!

Szabó úr nettó bére 2010 áprilisában 173 015 forint volt. Szabó úr fizetésénél a levonásokat ugyanazzal az eljárással számították ki, mint Kovács úr esetében, de ebben a hónapban Szabó úr csak 5980 forint adójóváírást kapott. (5 pont)

b) Hány forint volt Szabó úr bruttó bére az adott hónapban? (7 pont)

Megoldás:

a) A járulékokra levont összeg $200000 \cdot 0{,}17 = 34000$ (Ft). (1 pont)

A személyi jövedelemadóra levont összeg
$200000 \cdot 1{,}27 \cdot 0{,}17 = 43180$ (Ft). (1 pont)

Kovács úr nettó bére: $200000 - 34000 - 43180 + 15100 = 137\,920$ (2 pont)

Ez a bruttó bérének megközelítőleg a **69**%-a. (1 pont)

b) Ha Szabó úr bruttó bére az adott hónapban x Ft volt,
akkor járulékokra $0{,}17x$ Ft-ot, személyi jövedelemadóra pedig
$0{,}17 \cdot 1{,}27x$ Ft-ot vontak le. (2 pont)

$x - 0{,}17x - 0{,}17 \cdot 1{,}27x + 5980 = 173015$ (2 pont)

$0{,}6141x = 167035$ (1 pont)

Ebből $x \approx 272000$. (1 pont)

Szabó úr bruttó bére **272000** Ft volt. (1 pont)

Összesen: 12 pont

16) Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre.

a) Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben? (11 pont)

A mobiltársaság Telint néven új mobilinternet csomagot vezet be a piacra január elsején. Januárban 10 000 új előfizetőt várnak, majd ezután minden hónapban az előző havinál 7,5%-kal több új előfizetőre számítanak. Abban a hónapban, amikor az adott havi új előfizetők száma eléri a 20 000-et, a társaság változtatni szeretne a Telint csomag árán.

b) Számítsa ki, hogy a tervek alapján melyik hónapban éri el a Telint csomag egyhavi új előfizetőinek a száma a 20 000-et! (6 pont)

Megoldás:

a) Az Jelöljük x-szel azt, hogy Stefi hány percet beszélt csúcsidőben $(0 < x < 120)$ és y-nal azt, hogy hány forintot kell fizetni a telefonálásért percenként csúcsidőben $(25 < y)$. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható egyenletrendszer:
$xy = 2000$
$(120 - x)(y - 25) = 2000$ (2 pont)

A zárójeleket felbontva: $120y - xy - 25 \cdot 120 + 25x = 2000$ (1 pont)

Az egyik ismeretlent kifejezve: $y = \frac{2000}{x}$ (1 pont)

Behelyettesítés után: $120 \cdot \frac{2000}{x} + 25x = 7000$ (1 pont)

Rendezve: $25x^2 - 7000x + 240000 = 0$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet két gyöke: $x_1 = 40$ és $x_2 = 240$. (1 pont)

A 240 nem megoldása a feladatnak, mivel összesen 120 percet beszélt. (1 pont)

Stefi **40 perc**et beszélt csúcsidőben mobiltelefonján a kérdéses időszakban. (1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján. (1 pont)

b) Ha az első hónap után *n* hónappal az új előfizetők száma már elérte a 20 000-et, akkor $10000 \cdot 1{,}075^n = 20000$. (1 pont)

(Mivel a tízes alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekvő, ezért) (1 pont)

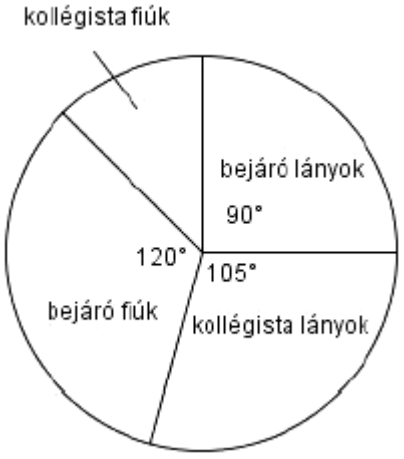
$n \cdot \lg 1{,}075 = \lg 2$ (1 pont)

$n \approx 9{,}58$ (1 pont)

A bevezetés hónapja utáni 10. hónapban, tehát **novemberben** várható, hogy az új előfizetők száma eléri a 20 000-et. (2 pont)

Összesen: 17 pont

17) Egy középiskolának 480 tanulója van. A diákok egy része kollégiumban lakik, a többiek bejárók. A bejárók és a kollégisták nemek szerinti eloszlását mutatja a kördiagram. Adja meg a kollégista fiúk számát! Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:

A kollégista fiúk számát ábrázoló körcikkhez tartozó középponti szög 45°. (1 pont)

Ez a 360°-nak $\frac{1}{8}$ része. (1 pont)

A kollégista fiúk száma: **60**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

18) Egy vállalat 250 000 Ft-ért vásárol egy számítógépet. A gép egy év alatt 10%-ot veszít az értékéből. Mennyi lesz a gép értéke 1 év elteltével? Írja le a számítás menetét! (3 pont)

Megoldás:

A gép értékének 10%-a: $250000 \cdot 0{,}1 = 25000$ (Ft)

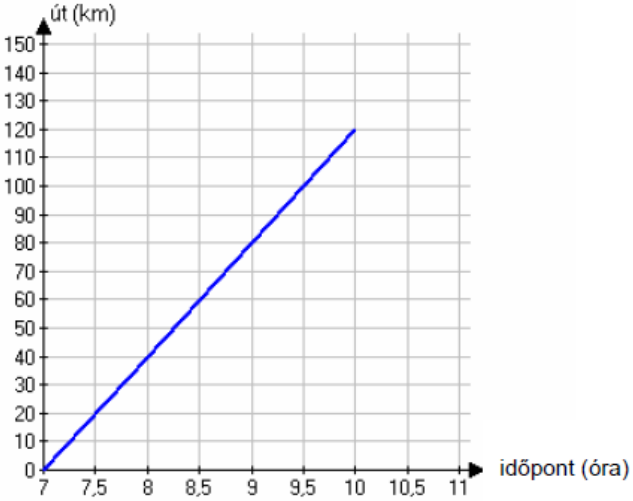
Egy év múlva: $250000\,(\text{Ft}) - 25000\,(\text{Ft})$

VAGY: Egy év után 90%-ra csökken az érték: $0{,}9 \cdot 250000$. (2 pont)

A gép értéke: **225 000 Ft** lesz. (1

Összesen: 3 pont

19) Budapestről reggel 7 órakor egy tehervonat indul Debrecenbe, amely megállás nélkül egyenletes sebességgel halad. A koordinátarendszerben a tehervonat által megtett utat ábrázoltuk az idő függvényében.



a) Mekkora utat tett meg a tehervonat az első órában? (2 pont)

b) Számítsa ki, hogy hány óra alatt tesz meg a tehervonat 108 kilométert? (2 pont)

Budapestről reggel 7 óra 30 perckor egy gyorsvonat is indul ugyanazon az útvonalon Debrecenbe, amely megállás nélkül 70 km/h állandó nagyságú sebességgel halad.

c) Rajzolja be a fenti koordinátarendszerbe a gyorsvonat út-idő grafikonját a 7 óra 30 perc és 9 óra 30 perc közötti időszakban! (2 pont)

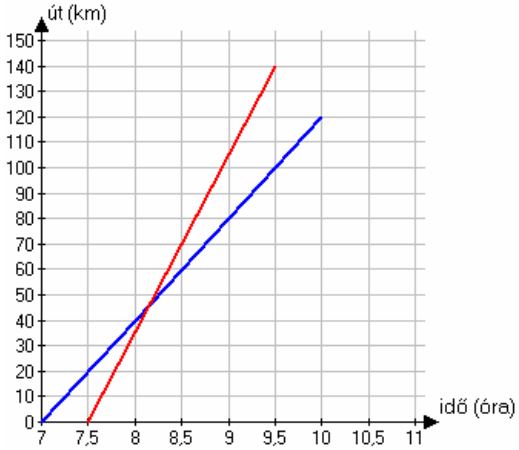
d) Számítsa ki, hogy mikor és mekkora út megtétele után éri utol a gyorsvonat a tehervonatot! (11 pont)

Megoldás:

a) **40 km**. (2 pont)

b) **2,7 óra**. (2 pont)

c) Ábra (2 pont)



d) A tehervonat 0,5 óra alatt 20 km-t tesz meg. (1 pont)

A gyorsvonat 1 óra alatt 30 km-rel tesz meg többet, mint a tehervonat, azaz percenként 0,5 km-t hoz be a hátrányából. (3 pont)

A tehervonat 20 km-es előnyét a gyorsvonat 40 perc alatt hozza be, tehát 8 óra 10 perckor éri utol. (4 pont)

$70 \cdot \frac{2}{3} = \frac{\mathbf{140}}{\mathbf{3}} \approx \mathbf{46,7}$ (1 pont)

A gyorsvonat kb. 46,7 km úton éri utol a tehervonatot. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

20) Egy 40 000 Ft-os télikabátot a tavaszi árleszállításkor 10%-kal olcsóbban lehet megvenni. Mennyi a télikabát leszállított ára? (2 pont)

Megoldás:

$40000 \cdot 0,9 = x$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = 36000}$ (1 pont)

21) Egy teherautóval több zöldségboltba almát szállítottak. Az egyik üzletbe 60 kg jonatánt, 135 kg starkingot, 150 kg idaredet és 195 kg golden almát vittek. A jonatán és az idared alma kilóját egyaránt 120 Ft-ért, a starking és a golden kilóját 85 Ft-ért árulta a zöldséges.

a) Hány százalékkal volt drágább a jonatán alma kilója a goldenéhez képest? (2 pont)

b) Mennyi bevételhez jutott a zöldséges, ha a teljes mennyiséget eladta? (2 pont)

c) A zöldségeshez kiszállított árukészlet alapján számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe került nála 1 kg alma! (3 pont)

d) Ábrázolja kördiagramon a zöldségeshez érkezett alma mennyiségének fajták szerinti megoszlását! (6 pont)

A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.

e) A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz? (4 pont)

Megoldás:

a) $\frac{120}{85} \approx 1,41$ (1 pont)

Kb. **41%-kal drágább** a jonatán alma (1 pont)

b) $60 \cdot 120 + 150 \cdot 120 + 195 \cdot 85 + 135 \cdot 85 = 53250$ (1 pont)

Tehát **53250 Forint bevétel**hez jutott a zöldséges. (1 pont)

c) Az összes alma mennyisége 540 kg. (1 pont)

Átlagos almaár: $\frac{53250}{540} \approx 98,6$ (1 pont)

Tehát átlagosan **98,6 Forintba került** egy alma. (1 pont)

d) Az egyes almafajták mennyiségéhez tartozó középponti szögek:

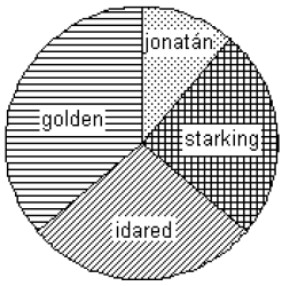
60kg: $\frac{60 \cdot 360°}{540} = \mathbf{40°}$

135 kg: **90°**

150 kg: **100°**

195 kg: **130°** (2 pont)

Kördiagram: (4 pont)



e) A kiborult jonatán és idared almák darabszámának aránya: 1,24:1 (2 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{1,25}{2,25} = \frac{5}{9} \approx \mathbf{0,56}$ (2 pont)

Összesen: 17 pont

22) Egy országban egy választáson a szavazókorú népesség 63,5%-a vett részt. A győztes pártra a résztvevők 43,6%-a szavazott.

Hány fős a szavazókorú népesség, ha a győztes pártra 4 152 900 fő szavazott? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A szavazókorú népesség számát jelölje x, ekkor a feladatszövege alapján $x \cdot 0,635 \cdot 0,436 = 4152900$. (2 pont)

A szavazókorú népesség: $\boldsymbol{x = 15000000}$ fő. (1 pont)

Összesen: 3 pont

23) Egy konzerv tömege a konzervdobozzal együtt 750 gramm. A konzervdoboz tömege a teljes tömeg 12%-a. Hány gramm a konzerv tartalma? (2 pont)

Megoldás:

$750 - 750 \cdot 0{,}12 =$ **600 gramm**. (2 pont)

24) Egy termék árát az egyik hónapban 20%-kal, majd a következő hónapban újabb 20%-kal megemelték. A két áremelés együttesen hány százalékos áremelésnek felel meg? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Egy 20%-os áremelés 1,2-szeresére, (1 pont)
a kétszeri áremelés $1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$ -szeresére változtatja az eredeti árat. (1 pont)
Ez **44%** -os áremelésnek felel meg. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) Kóstolóval egybekötött termékbemutatót tartottak egy új kávékeverék piaci megjelenését megelőzően. Két csoport véleményét kérték úgy, hogy a terméket az 1-től 10-ig terjedő skálán mindenkinek egy-egy egész számmal kellett értékelnie. Mindkét csoport létszáma 20 fő volt. A csoportok értékelése az alábbi táblázatban látható.

pontszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság az 1. csoportban	0	0	1	0	6	8	2	2	1	0
gyakoriság a 2. csoportban	0	8	0	2	0	1	0	0	0	9

a) Ábrázolja közös oszlopdiagramon, különböző jelölésű oszlopokkal a két csoport pontszámait! A diagramok alapján fogalmazzon meg véleményt arra vonatkozóan, hogy melyik csoportban volt nagyobb a pontszámok szórása! Véleményét a diagramok alapján indokolja is! (5 pont)

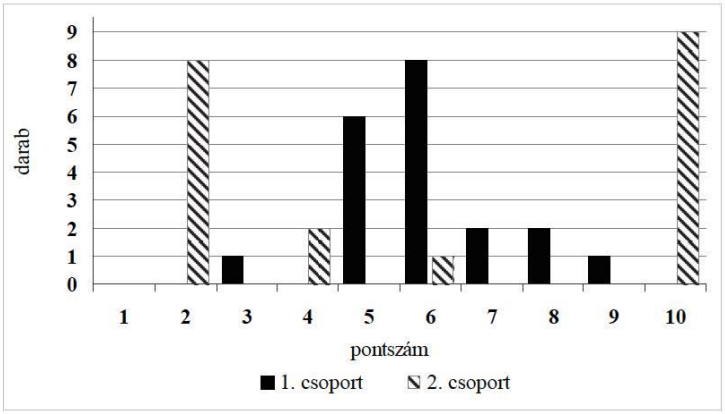
b) Hasonlítsa össze a két csoport pontszámainak szórását számítások segítségével is! (5 pont)

Kétféle kávéból 14 kg 4600 Ft/kg egységárú kávékeveréket állítanak elő. Az olcsóbb kávéfajta egységára 4500 Ft/kg, a drágábbé pedig 5000 Ft/kg.

c) Hány kilogramm szükséges az egyik, illetve a másik fajta kávéból? (7 pont)

Megoldás:

a) Az 1. csoporthoz tartozó diagram helyes. (1 pont)
A 2. csoporthoz tartozó diagram helyes. (1 pont)
A vizsgázó a két csoport adatait megfelelően megkülönböztette egymástól. (1 pont)



Az első csoporthoz tartozó diagramon a nagy magasságú oszlopok (az átlaghoz közel) középen vannak, a másodikon pedig a két szélen; (1 pont)
ez azt jelenti, hogy a második esetben nagyobb lehet a szórás. (1 pont)

b) Az 1. csoport pontszámainak átlaga **6**, (1 pont)
szórása $\sqrt{\mathbf{1,7}} \approx \mathbf{1,30}$. (1 pont)
A 2. csoport pontszámainak átlaga **6**, (1 pont)
szórása $\sqrt{\mathbf{14}} \approx \mathbf{3,74}$ (1 pont)
A 2. csoport pontszámainak szórása nagyobb. (1 pont)

c) Az olcsóbb fajtából x kg-ot,
a másikból $(14-x)$ kg-ot veszünk. (1 pont)
A feladat szövege alapján felírható egyenlet:
$x \cdot 4500 + (14-x) \cdot 5000 = 14 \cdot 4600$ (2 pont)
$4500x - 5000x + 70000 = 64400$ (1 pont)
$x = 11,2$ (1 pont)
Az olcsóbb fajtából **11,2 kg**,
a drágább fajtából **2,8 kg** szükséges a keverékhez. (1 pont)
Ellenőrzés a szöveg alapján. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) András és Péter „számkártyázik" egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott lapot. (Például ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.



a) Hány kártya van Péter előtt az első mérkőzés után, ha András az 1, 2, 3, 4, 5, 6, Péter pedig a 2, 4, 5, 3, 1, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait? (2 pont)

A második mérkőzés során Péter az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait, és így összesen két lapot vitt el.

b) Adjon meg egy lehetséges sorrendet, amelyben András kijátszhatta lapjait! (3 pont)

A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőt küldi csatába).

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg! (6 pont)

A negyedik mérkőzés előtt mindketten úgy döntöttek, hogy az egész mérkőzés során véletlenszerűen játsszák majd ki a lapjaikat. Az első három csata után Andrásnál a 3, 4, 6 számkártyák maradtak, Péternél pedig az 1, 5, 6 számkártyák.

d) Adja meg annak a valószínűségét, hogy András az utolsó három csatából pontosan kettőt nyer meg! (6 pont)

Megoldás:

a) Péter megnyert három csatát (kettőt elvesztett), egy csata pedig döntetlenre végződött, (1 pont)
így Péter előtt összesen **hét kártya van** az első mérkőzés után. (1 pont)

b) Péter úgy vihetett el két lapot, ha egy csatát nyert és ötöt elveszített, vagy két csatában döntetlent ért el, és négyet elveszített. (1 pont)
András lapjainak (egyetlen lehetséges) sorrendje:
2, 3, 4, 5, 6, 1. (2 pont)

c) Péter az első két lapot $6 \cdot 5 = 30$-féleképpen tudja letenni, ez az összes esetek száma (1 pont)
Ezek közül a következő esetekben viszi el András első két lapját: (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6), (5; 4), (5; 6), (6; 4), (6; 5). (3 pont)
Kedvező esetek száma 9. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{9}{30} = 0,3$. (1 pont)

d) Az összes lehetséges csata száma ezekkel a lapokkal $3! \cdot 3! =$ (1 pont)
$= 36$ (1 pont)
András akkor nyer pontosan kettőt, ha valamilyen sorrendben a 3-1, 6-5, 4-6 csaták, (1 pont)
vagy a 4-1, 6-5, 3-6 csaták zajlanak le. (1 pont)
Ezek $2 \cdot 3! = 12$-féleképpen valósulhatnak meg, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)
A kérdéses valószínűség $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

27) A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál használják a következő tapasztalati képletet: $\acute{E} = 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$.
A képletben az $\acute{E}$ a születéskor várható átlagos élettartam években, G az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

a) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 dollár volt? (4 pont)

b) Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő? (5 pont)

c) Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év. Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (G) nagysága (reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra)? (8 pont)

Megoldás:

a) Behelyettesítve az $\acute{E}$ képletébe a megadott $G = 1090$ értéket:
$\acute{E}_{2005} = 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-1090}{6090}}$ (2 pont)
$\acute{E}_{2005} \approx 75,5 - 5 \cdot 10^{0,8062}$ (1 pont)
Innen a 2005-ös várható élettartam **43,5 év**. (1 pont)

b) $3 \cdot 1090 = 3270$ adja G új értékét. (1 pont)
Behelyettesítve az $\acute{E}$ képletébe
$\acute{E}_{2020} \approx 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-3270}{6090}} \approx 75,5 - 5 \cdot 10^{0,4483} \approx 61,5.$ (3 pont)

Innen az élettartamok változása:

$\acute{E}_{2020} - \acute{E}_{2005} = 61{,}5 - 43{,}5 = \mathbf{18}$ (év) (1 pont)

c) Behelyettesítve az $\acute{E}$ képletébe az $\acute{E} = 68$ új értéket.

$\acute{E}_{2005} = 68 = 75{,}5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$ (1 pont)

Rendezés után azt kapjuk, hogy:

$10^{\frac{6000-G}{6090}} = 1{,}5.$ (2 pont)

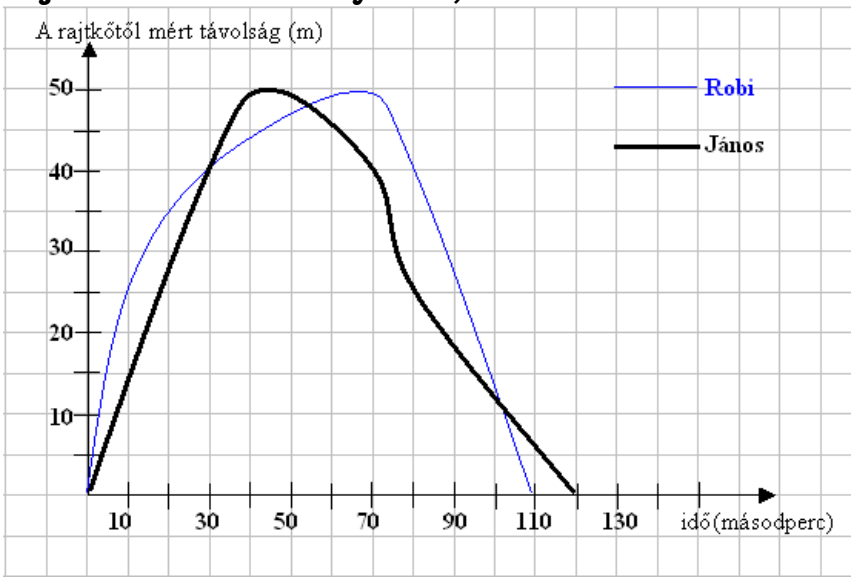
(Logaritmussal számolva:)

$\frac{6000-G}{6090} = \lg 1{,}5 \approx 0{,}17609$ (3 pont)

Ebből rendezéssel kapjuk, hogy 2005-ben a GDP értéke $\boldsymbol{G = 4928}$ dollár volt. (2 pont)

Összesen: 17 pont

28) Egy sportuszoda 50 méteres medencéjében egy edzés végén úszóversenyt rendeztek. A versenyt figyelve az edző a következő grafikont rajzolta két tanítványának, Robinak és Jánosnak az úszásáról.



Olvassa le a grafikonról, hogy

a) Mennyi volt a legnagyobb távolság a két fiú között a verseny során (1 pont)

b) Mikor előzte meg János Robit (2 pont)

c) Melyikük volt gyorsabb a 35. másodpercben! (2 pont)

A 4*100-as gyorsváltó házi versenyén a döntőbe a Delfinek, a Halak, a Vidrák és a Cápák csapata került.

d) Hányféle sorrend lehetséges közöttük, ha azt biztosan tudjuk, hogy nem a Delfinek csapata lesz a negyedik? (3 pont)

e) A verseny után kiderült, hogy az élen kettős holtverseny alakult ki, és a Delfinek valóban nem lettek az utolsók. Feltéve, hogy valakinek csak ezek az információk jutottak a tudomására, akkor ennek megfelelően hányféle eredménylistát állíthatott össze? (4 pont)

Megoldás:

a) **15 méter** (1 pont)

b) A **30. másodpercnél**, vagy a **31. másodpercnél** (2 pont)

c) **János** (2 pont)

d) A lehetséges sorrendek száma: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{18}$ (3 pont)

e) Két esetet kell megvizsgálni (1 pont)

Ha a Delfinek holtversenyben az első helyen végeztek, akkor: $\binom{3}{1}$ a lehetséges sorrendek száma (1 pont)

Ha a Delfinek nem lettek elsők, akkor $\binom{3}{2}$ a megoldás (1 pont)

A lehetséges sorrendek száma összesen **9** (1 pont)

Összesen: 12 pont

29) Egy szám $\frac{5}{6}$ részének a 20%-a 31. Melyik ez a szám? Válaszát indokolja!

(3 pont)

Megoldás:

A keresett számot *x*-szel jelölve, a szám $\frac{5}{6}$ része: $\frac{5}{6}x$. (1 pont)

$\frac{5}{6}x \cdot 0,2 = 31$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = 186}$ (1 pont)

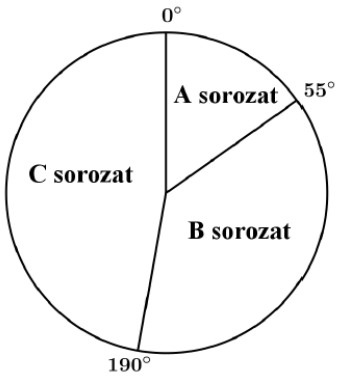
Összesen: 3 pont

30) Egy közvélemény-kutató intézet azt a feladatot kapta, hogy két alkalommal – fél év különbséggel – mérje fel a TV-ben látható három filmsorozat nézettségi adatait. Az ábrán látható kérdőíven a válaszoló vagy azt jelölhette be, hogy az A, B, és C sorozatok közül melyiket nézi (akár többet is meg lehetett jelölni) , vagy azt, hogy egyiket sem nézi. Az első felméréskor kapott 600 kérdőív jelöléseit összesítve megállapították, hogy az A sorozat összesen 90 jelölést kapott, a B sorozat összesen 290-et, a C sorozat pedig összesen 230-at. Érdekes módon olyan válaszadó nem volt, aki pontosan két sorozatot nézett volna, viszont 55-en mindhárom sorozatot bejelölték.

a) A válaszolók hány százaléka nézte az A sorozatot? (2 pont)

b) Hány válaszoló nem nézte egyik sorozatot sem? (5 pont)

A második felmérés során kiválogatták azokat a kérdőíveket, amelyeken valamelyik sorozat meg volt jelölve. Ezeken a három sorozat nézettségére összesen 576 jelölés érkezett. Az adatok feldolgozói minden jelölést megszámoltak, és a végeredményről az itt látható kördiagramot készítették.



c) Számítsa ki, hogy az egyes sorozatok nézettségére hány jelölés érkezett! (5 pont)

Megoldás:

a) Az *A* sorozatot a válaszolók $\frac{90}{600} \cdot 100 =$ (1 pont)

15%-a nézte. (1 pont)

b) A kizárólag az egyik sorozatot nézők számát megkapjuk, ha az adott sorozatot nézők számából kivonjuk a mindhárom sorozatot nézők számát (55), (1 pont)

ezért csak az a A sorozatot 35, csak a B sorozatot 235, csak a C sorozatot 175 válaszadó nézte. (2 pont)
Így a valamelyik sorozatot nézők száma $35+235+175+55=500$, (1 pont)
ezért egyik sorozatot sem nézte $600-500=$ **100 fő**. (1 pont)

c) Az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek: (az A-val jelölt $55°$), a B-vel jelölt $135°$, a C-vel jelölt $170°$. (2 pont)
A kördiagramon $1°$-nak $\frac{576}{360}=1,6$ válaszadó felel meg. (1 pont)
Az A sorozatra $55\cdot 1,6=$ **88**
A B sorozatra $135\cdot 1,6=$ **216** (2 pont)
A C sorozatra $170\cdot 1,6=$ **272** jelölés érkezett.

Összesen: 12 pont

31) Egy család személyautóval Budapestről Keszthelyre utazott. Útközben lakott területen belül, országúton és autópályán is haladtak. Az utazással és az autóval kapcsolatos adatokat a következő táblázat tartalmazza:

	megtett út hossza (km)	átlagsebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$	átlagos benzinfogyasztás 100 km-en (liter)
lakott területen belül	45	40	8,3
országúton	35	70	5,1
autópályán	105	120	5,9

a) Mennyi ideig tartott az utazás? (4 pont)
b) Hány liter ezen az utazáson az autó 100 km-re eső átlagfogyasztása? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Útközben elfogyott az autóból a benzin. A legközelebbi benzinkútnál kétféle benzines kannát lehet kapni. A nagyobbra rá van írva, hogy 20 literes, a kisebbre nincs ráírva semmi. A két kanna (matematikai értelemben) hasonló, a nagyobb kanna magassága éppen kétszerese a kisebb kanna magasságának.
c) Hány literes a kisebb kanna? (4 pont)

Megoldás:

a) Egy adott útszakasz megtételéhez szükséges időt megkapjuk, ha az útszakasz hosszát elosztjuk az útszakon mért átlagsebességgel. (1 pont)
Az egyes útszakaszok megtételéhez szükséges idő
lakott területen belül: 1,125 (óra)
országúton: 0,5 (óra) (2 pont)
autópályán 0,875 (óra).
Így összesen $1,125+0,5+0,875=$ **2,5** óráig tartott az utazás. (1 pont)

b) Az egyes útszakaszokon az autó fogyasztása
lakott területen belül: $\frac{45}{100}\cdot 8,3=3,735$ (liter),
országúton: $\frac{35}{100}\cdot 5,1=1,785$ (liter), (2 pont)
autópályán: $\frac{105}{100}\cdot 5,9=6,195$ (liter).

Az összes fogyasztás 185 km-en 11,715 liter. (1 pont)

100 km -en az átlagfogyasztás: $\frac{11,715}{185}\cdot 100$ (liter). (1 pont)

Az autó átlagfogyasztása 100 km -en kb. **6,3 liter**. (1 pont)

c) A két test hasonló, a hasonlósági arány $1:2$, (1 pont)
így a térfogatok aránya $1:8$. (2 pont)

A kisebb kanna térfogata $\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{8}}$ **= 2,5 liter**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

32) Zsuzsa nagyszülei elhatározzák, hogy amikor unokájuk 18 éves lesz, akkor vásárlási utalványt adnak neki ajándékba. Ezért Zsuzsa 18. születésnapja előtt 18 hónapon keresztül minden hónapban félretesznek valamekkora összeget úgy, hogy Zsuzsa 18. születésnapján éppen 90 000 forintjuk legyen erre a célra. Úgy tervezik, hogy az első alkalom után mindig 200 forinttal többet tesznek félre, mint az előző hónapban.

a) Terveik szerint mennyi pénzt tesznek félre az első, és mennyit az utolsó alkalommal? (7 pont)

Zsuzsa egyik testvére hét évvel idősebb a másik testvérénél. A két testvér életkorának mértani közepe 12.

b) Hány éves Zsuzsa két testvére? (5 pont)

Megoldás:

a) Az egyes hónapokban félretett pénzösszegek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja (Ft-ban) a_1, (1 pont)

differenciája pedig 200. (1 pont)

A sorozat első 18 tagjának összege:

$\frac{2a_1+17\cdot 200}{2}\cdot 18=90000$, (2 pont)

amiből $a_1=3300$. (1 pont)

A 18. tag $3300+17\cdot 200=6700$. (1 pont)

Így az első alkalommal **3300 Ft-ot**, az utolsó alkalommal **6700 Ft-ot** tettek félre. (1 pont)

b) Zsuzsa fiatalabb testvérének életkorát jelölje x, ekkor másik testvére $x+7$ éves.

A feladat szövege alapján: $\sqrt{(x+7)\cdot x}=12$. (1 pont)

Ebből $x^2+7x-144=0$, (1 pont)

amiből vagy $x=-16$, de ez az érték nem megoldása a feladatnak. (1 pont)

vagy $x=9$. (1 pont)

Zsuzsa egyik testvére **9**, a másik **16** éves. (1 pont)

Összesen: 12 pont

33) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előre jelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? **(5 pont)**

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? **(5 pont)**

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! **(4 pont)**

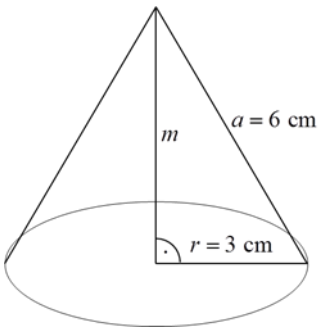
Megoldás:

a) A kereslet minden évben várhatóan az előző évi kereslet $1,6$-szorosára változik, (1 pont)
így 5 év múlva az idei $1,06^5 \approx 1,34$-szorosára nő. (1 pont)
Ez kb. **34%-kal** magasabb, mint az idei kereslet. (1 pont)

b) Az ár minden évben várhatóan az előző év ár $0,9$-szorosára változik, (1 pont)
így megoldandó a $0,94^n = 0,65$ egyenlet, (ahol n az eltelt évek számát jelenti.) (1 pont)
Ebből $n = \frac{\lg 0,65}{\lg 0,94} (\approx 6,96)$. (2 pont)
Azaz várhatóan **7 év múlva** lesz az ár a jelenlegi ár 65%-a. (1 pont)

c) A bevételt a kereslet és az ár szorzatából kapjuk, (1 pont)
így 8 év múlva a jelenlegi bevétel $(1,06 \cdot 0,94)^8 \approx$ (1 pont)
$\approx 0,972$-szerese várható. (2 pont)
Azaz **8 év múlva** a bevétel az ideinél kb. $2,8\,\%$-kal lesz alacsonyabb. (1 pont)

d) Ábra az adatok feltüntetésével. (1 pont)



A kúp magasságát m-mel jelölve a Pitagorasz-tétel alapján: $m = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} (\approx 5,2\,\text{cm})$. (1 pont)
A kúp térfogata $V \approx \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 5,2 \approx$ (1 pont)
$\approx \mathbf{49\,cm^3}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

34) Egy webáruházba való belépés előzetes regisztrációhoz kötött, melynek során a regisztráló életkorát is meg kell adnia. Az adatok alapján a 25560 regisztráló közül 28 évesnél fiatalabb 7810 fő, 55 évesnél idősebb 4615 fő, a többiek 28 és 55 év közöttiek.

a) Készítsen a létszámadatok alapján kördiagramot, kiszámítva a három körcikkhez tartozó középponti szögeket is! **(5 pont)**

A webáruház üzemeltetői a vásárlói szokásokat szeretnék elemezni, ezért a regisztráltak közül véletlenszerűen kiválasztanak két személyt.

b) Adja meg annak a valószínűségét, hogy az egyik kiválasztott személy 28 évesnél fiatalabb, a másik 55 évesnél idősebb! **(4 pont)**

A regisztráltak egy része vásárol is a webáruházban. A vásárlók között a 28 év alattiak éppen kétszer annyian vannak, mint az 55 évesnél idősebbek. A 28 év alattiak az elmúlt időszakban összesen 19 325 700 Ft, az 55 év felettiek 17 543 550 Ft értékben vásároltak. Az 55 év felettiek átlagosan 2410 Ft-al költöttek többet, mint a 28 év alattiak.

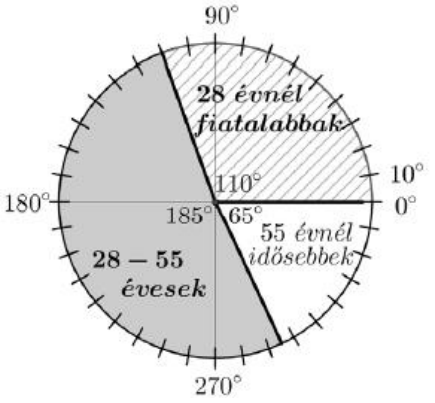
c) Számítsa ki, hány 55 év feletti vásárlója volt a webáruháznak, és adja meg, hogy ezek a vásárlók átlagosan mennyit költöttek! (8 pont)

Megoldás:

a) A 28 évesnél fiatalabbakat ábrázoló körcikk középponti szöge $\frac{7810}{25560}\cdot 360° = 110°$. (1 pont)

Az 55 évesnél idősebbeket ábrázoló körcikk középponti szöge $\frac{4615}{25560}\cdot 360° = 65°$. (1 pont)

A 28 és 55 év közöttieket ábrázoló körcikk középponti szöge $360° - (110° + 65°) = 185°$. (1 pont)



Az egyes körcikkek megjelenítése a megfelelő méretben, (1 pont)

egyértelmű jelmagyarázattal: (1 pont)

b) A 28 év alattiak közül egyet 7810-féleképpen, az 55 évesnél idősebbek közül egyet 4615-féleképpen tudunk kiválasztani, így a kedvező esetek száma $7810\cdot 4615 (= 36043150)$. (1 pont)

Az összes esetek száma: $\binom{25560}{5} (= 326644020)$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{7810\cdot 4615}{\binom{25560}{2}} \approx$ (1 pont)

$\approx$ **0,11**. (1 pont)

c) Az 55 év feletti vásárlók számát jelölje x, ekkor a 28 év alattiak száma $2x$. Az 55 év felettiek átlagosan $\frac{17543550}{x}$, (1 pont)

a 28 év alattiak átlagosan $\frac{19325700}{2x}$ Ft-ot költöttek. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható: $\frac{17543550}{x} - 2410 = \frac{19325700}{2x}$. (1 pont)

Ebből $2410x = 7880700$, (1 pont)

azaz $x = 3270$. (1 pont)

$\frac{17543550}{3270} = 5365$ (1 pont)

A webáruháznak **3270** olyan vásárlója volt, aki 55 évnél idősebb, és ők átlagosan **5365** Ft-ot költöttek. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

35) A ruházati cikkek nettó árát 27%-kal növeli meg az áfa (általános forgalmi adó). A nettó ár és az áfa összege a bruttó ár, amelyet a vásárló fizet a termék megvásárlásakor. Egy nadrágért 6350 Ft-ot fizetünk. Hány forint áfát tartalmaz a nadrág ára? Megoldását részletezze! (3 pont)

***Megoldás*:**

Jelöljük x-szel a nadrág áfa előtti árát. Ekkor az alábbi egyenletet írhatjuk fel: $x \cdot 1{,}27 = 6350$, melyből következik, hogy $x = 5000$. (2 pont)

Ha az így kapott nettó árat levonjuk a nadrág bruttó árából, megkapjuk az áfa összegét.

$6350 - 5000 = 1350$, vagyis **1350 Ft** áfát tartalmaz a nadrág ára. (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) Az iskolai asztaliteniszbajnokságon heten indulnak. Mindenki mindenkivel egyszer játszik. Mostanáig Anita már mind a 6 mérkőzését lejátszotta, Zsuzsa 2, Gabi, Szilvi, Kati és Orsi pedig 1-1 mérkőzésen vannak túl. Hány mérkőzését játszotta le mostanáig a bajnokság hetedik résztvevője, Flóra? (2 pont)

***Megoldás*:**

Anita 6 mérkőzést játszott le, vagyis ő már mindenkivel játszott egyet. Ebből következik, hogy Gabi, Szilvi, Kati és Orsi az 1-1 mérkőzését mind Anitával játszották le. Zsuzsa 2 mérkőzéséből az egyiket szintén Anitával játszotta le, a maradék egyet pedig kizárólag Flórával játszhatta le. Így Flóra Anitával és Zsuzsával játszott, azaz **2 mérkőzésen** van túl. (2 pont)

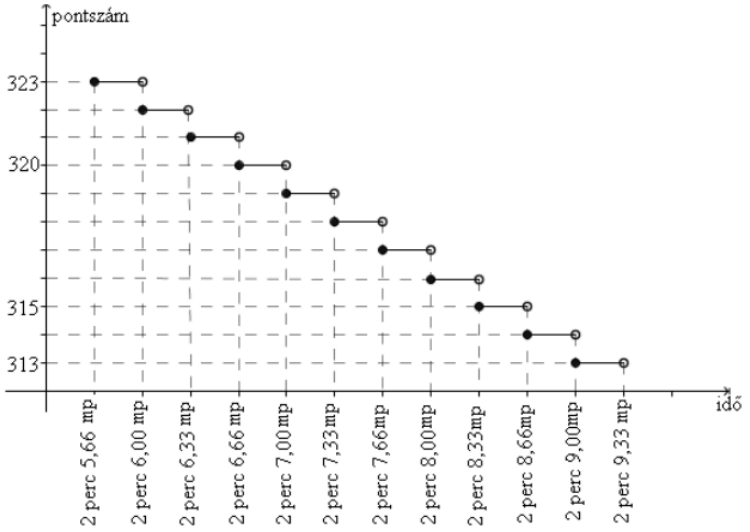
Összesen: 2 pont

37) Egy öttusaversenyen 31 résztvevő indult. A vívás az első szám, ahol mindenkivel egyszer mérkőzik meg. Aki 21 győzelmet arat, az 250 pontot kap. Aki ennél több győzelmet arat, az minden egyes további győzelemért 7 pontot kap a 250 ponton felül. Aki ennél kevesebbszer győz, attól annyiszor vonnak le 7 pontot a 250-ből, ahány győzelem hiányzik a 21-hez. (A mérkőzések nem végződhetnek döntetlenre.)

a) Hány pontot kapott a vívás során Péter, akinek 5 veresége volt? (3 pont)

b) Hány győzelme volt Bencének, aki 215 pontot szerzett? (3 pont)

Az öttusa úszás számában 200 métert kell úszni. Az elért időeredményeként járó pontszámot mutatja a grafikon.



c) Jelölje meg az alábbi két kérdés esetén a helyes választ!
Hány pontot kapott Robi, akinek az időeredménye 2 perc 6,28 másodperc? (2 pont)
A: 320
B: 321
C: 322
D: 323
Péter 317 pontot kapott. Az alábbiak közül válassza ki Péter időeredményét!
A: 2 perc 7,00 mp
B: 2 perc 7,60 mp
C: 2 perc 7,80 mp
D: 2 perc 8,00 mp

Az öttusa lovaglás számában egy akadálypályán tizenkét különböző akadályt kell a versenyzőnek átugrania. Egy akadály a nehézsége alapján három csoportba sorolható: A, B vagy C típusú. Ádám a verseny előtti bemelegítéskor először az öt darab A, majd a négy darab B, végül a három darab C típusú akadályokon ugrat át, mindegyiken pontosan egyszer. Bemelegítéskor az egyes akadálytípusokon belül a sorrend szabadon megválasztható.

d) Számítsa ki, hogy a bemelegítés során hányféle sorrendben ugrathatja át Ádám a tizenkét akadályt! (4 pont)

***Megoldás*:**

a) Péter 30 mérkőzést játszott le, ebből 25-öt megnyert. (1 pont)
A 21 győzelemért megkapta a 250 pontot, a további 4 győzelemért pedig 7-7 pontot kapott, így az ő pontszáma összesen $250+7\cdot 4=$ **278**. (2 pont)

b) Bence nem kapta meg a 250 pontot, tehát 21-nél kevesebb győzelme volt. (1 pont)
Minden hiányzó győzelemért 7-7 pontot vontak le a 250-ből.
Ez összesen $250-215=35$ pont, ebből következik, hogy (1 pont)
5-ször vontak le 7 pontot, vagyis **16** győzelmet aratott. (1 pont)

c) A grafikon leolvasása után a megoldás:
***C*: 322** és ***C*: 2 perc 7,80 mp**. (1+1 pont)

d) Ádám az 5 db A akadályon 5!, a 4 db B akadályon 4! féleképpen, a 3 db C akadályon pedig 3! féleképpen tud átugrani. (2 pont)
Ez összesen $5!\cdot 4!\cdot 3!$, azaz **17280** lehetőség. (2 pont)

Összesen: 12 pont

38) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x)=3600\cdot 0,854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)
(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

***Megoldás*:**

a) A tigrisek száma minden évben az előző évinek $0,854$-szeresére csökken. (1 pont)
Így 2014 és 2016 között a tigrisek száma $0,854^2 \approx 0,73$-szorosára változik. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a számuk **27%**-kal csökken. (1 pont)

b) A feladat szövege alapján az alábbi egyenletet írhatjuk fel:
$3600 \cdot 0,854^x = 900$. (1 pont)
Az egyenlet megoldása $x \approx 8,78$. (3 pont)
Így 9 év múlva, azaz **2023**-ban várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökkenni. (1 pont)

c) A (I) és (II) miatt a kisebb kifutóba 3 vagy 4 tigris kerülhet. (1 pont)
Ha 3 tigris kerül a kisebb kifutóba, a (III) miatt (IV) miatt ez csak két nőstény és egy hím lehet. (1 pont)
Két nőstényt és egy hímet $\binom{5}{2} \cdot 4 = 40$-féleképpen lehet összesen kiválasztani. (2 pont)
Ha 4 tigris kerül a kisebb kifutóba, akkor (III) és (IV) miatt ez csak két nőstény és két hím lehet, őket $\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 60$-féleképpen lehet kiválasztani. (2 pont)
Így összesen $40 + 60 = \mathbf{100}$ eset lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

39) Ha 1 kg szalámi ára 2800 Ft, akkor hány forintba kerül 35 dkg szalámi? (2 pont)

***Megoldás*:**

$35\,\text{dkg}$ a $100\,\text{dkg}$-nak $\frac{35}{100}$-ad része, így a $35\,\text{dkg}$ szalámi ára is $\frac{35}{100}$-ad része a $100\,\text{dkg}$ szalámi árának, vagyis $2800 \cdot \frac{35}{100} = \mathbf{980\,Ft}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

40) A kereskedelemmel foglalkozó cégek között több olyan is van, amely állandóan emelkedő fizetéssel jutalmazza a dolgozók munkavégzését. Péter munkát keres, és két cég ajánlata közül választhat:
I. ajánlat: Az induló fizetés 200 000 Ft, amit havonta 5000 Ft-tal emelnek négy éven át.
II. ajánlat: Az induló fizetés 200 000 Ft, amit havonta 2%-kal emelnek négy éven át.

a) Melyik ajánlatot válassza Péter, ha tervei szerint négy évig a választott munkahelyen akar dolgozni, és azt az ajánlatot szeretné választani, amelyik a négy év alatt nagyobb összjövedelmet kínál?
(7 pont)

A Péter szerződésében szereplő napi 8 óra munkaidő rugalmas, azaz lehetnek olyan napok, amikor 8 óránál többet, és olyanok is, amikor kevesebbet dolgozik. 6 óránál kevesebbet, illetve 10 óránál többet sosem dolgozik egy nap. Az alábbi táblázatban Péter januári munkaidő-kimutatásának néhány adata látható.

Napi munkaidő (óra)	6	7	8	9	10
Hány munkanapon dolgozott ennyi órát?	4	5			3

b) Számítsa ki a táblázatból hiányzó két adatot, ha tudjuk, hogy január hónap 22 munkanapján Péter átlagosan naponta 8 órát dolgozott!(6 pont)

***Megoldás*:**

a) Az I. ajánlatban Péter havi fizetése egy 5000 differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai, ahol a sorozat első tagja $200\,000$. Így az első 48 tag összege $S_{48} = \frac{2 \cdot 200\,000 + 47 \cdot 5000}{2} \cdot 48 = \mathbf{15\ 240\ 000\ Ft}$. (3 pont)

A II. ajánlatban egy mértani sorozatot írhatunk fel, melynek első tagja $200\,000$, kvóciense $1{,}02$. Itt az első 48 tag összege: $S'_{48} = 200\,000 \cdot \frac{1{,}02^{48} - 1}{1{,}02 - 1} = \mathbf{15\ 870\ 700\ Ft}$. (3 pont)

Mivel II. ajánlat során a négy év alatti összjövedelem nagyobb, a II. ajánlatot érdemes választania. (1 pont)

b) Jelöljük x-szel a 8 óra munkával töltött napok számát, illetve $22 - (4 + 5 + 3 + x) = 10 - x$ a 9 óra munkával töltött napok számát. (2 pont)

Tudjuk, hogy átlagosan naponta 8 órát dolgozott, ezért az alábbi egyenletet írhatjuk fel.

$8 = \frac{4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + x \cdot 8 + (10 - x) \cdot 9 + 3 \cdot 10}{22}$, amelyből $x = 3$ (3 pont)

Vagyis Péter **3** napon dolgozott 8 órát, és **7** napon dolgozott 9 órát. (1 pont)

Összesen: 13 pont

41) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)

1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg: $f(x) = 51 \cdot 1{,}667^x$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózaból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

Megoldás:

a) $\frac{12000000}{7000000} \approx 1{,}714$ (1 pont)

Kb. **71%-kal nőtt** az előfizetések száma. (1 pont)

b) Az eltelt évek száma: $x = 8$. (1 pont)

$51 \cdot 1{,}667^8 \approx 3041$ (1 pont)

3 millió 41 ezer mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén. (1 pont)

c) A hívások száma egyik hónapról a másikra 1,065-szeresére nőtt. (1 pont)

1991 januárja óta eltelt hónapok számát jelölje n.

$350000 \cdot 1{,}065^n = 100\,000\,000$ (1 pont)

$n = \log_{1{,}065} \frac{100000000}{350000}$, (1 pont)

amiből $n \approx 90$. (1 pont)

Az eltelt évek száma: $\frac{90}{12} = 7{,}5$. (1 pont)

Tehát **1998-ban** lehetett az a hónap, amikor a mobilhívások száma először elérte a 100 milliót. (1 pont)

d) A megadott időszakban a vezetékes hívások száma mértani sorozatot alkot, melynek első tagja 4200 (millió darab) és hányadosa $q = 0{,}92$. (2 pont)

$4200 \cdot 0{,}92^9 \approx 1983{,}08$ (1 pont)

≈ 1983 millió vezetékes hívást indítottak 2009-ben. (1 pont)

2000 eleje és 2009 vége között összesen

$4200 \cdot \frac{0,92^{10}-1}{0,92-1} \approx 29694,6$ (1 pont)

$\approx$**29695 millió** vezetékes hívást indítottak. (1 pont)

Összesen: 17 pont

42) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.

a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására? (7 pont)

A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4 \cdot H - R + F$ képlettel történik, ahol H a helyes válaszok, R a rossz feladatok, F pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.

b) Hány helyes választ adott Vera? (5 pont)

Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.

c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem? (5 pont)

Megoldás:

a) A terv szerint az egyes feladatokra szánt időtartamok olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1 (perc), és az első 25 tagjának összege 75 (perc) (1 pont)

A sorozat különbségét d-vel jelölve az adatok alapján felírható:

$\frac{2 \cdot 1 + 24d}{2} \cdot 25 = 75$. (1 pont)

Ebből $d = \frac{1}{6}$ (perc). (1 pont)

A számtani sorozat első 21 tagjának összege:

$\frac{2 \cdot 1 + 20 \cdot \frac{1}{6}}{2} \cdot 21 = 56$ (2 pont)

Így az utolsó 4 feladatra összesen $(75 - 56 =)$ **19 percet** szánt Vera a terc szerint. (1 pont)

b) Vera esetében $F = 25$, $H + R = 22$. (1 pont)

A helyes válaszok számát x-szel jelölve felíratható a következő egyenlet:

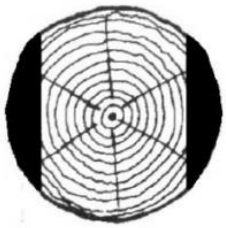
$4x - (22 - x) + 25 = 93$. (2 pont)

Ebből $x=18$, tehát **Vera 18 helyes választ adott**. (1 pont)
Ellenőrzés… (1 pont)

c) Jelölje x azoknak a diákoknak a számát, akik megoldották a 24-es illetve a 25-ös feladatot, illetve azok számát, akik egyik feladatot sem tudták megoldani.
(1 pont)
Csak a 24-es feladatot $x-1$, csak a 25-ös feladatot szintén $x-1$ tanuló oldotta meg. (1 pont)
A feladat szövege alapján $2(x-1)+1+x=11$, (1 pont)
amiből $x=4$, (1 pont)
$(4-1)=$ **3 olyan tanuló volt**, aki a 24-es feladatot megoldotta, de a 25-öst nem. (1 pont)

Összesen: 17 pont

43) A Hód Kft. Faárutelephelyén rönkfából (henger alakú fatörzsekből) a következő módon készítenek gerendát. A keresztfűrészgép először két oldalt levág egy-egy – az ábra sötéttel jelölt – részt, majd a fa 90°-kal történő elfordítása után egy hasonló vágással végül egy négyzetes hasáb alakú gerendát készít. A gépet úgy állítják be, hogy a kapott hasáb alaplapja a lehető legnagyobb legyen. Most egy forgáshenger alakú, 60 cm átmérőjű, 5 méter hosszú rönkfát fűrészel így a gép.



a) Igaz-e, hogy a kapott négyzetes hasáb alakú fagerenda térfogata kisebb 1 köbméternél? (6 pont)

A Hód Kft. Deszkaárut is gyárt, ehhez a faanyagot 30000 Ft/ m^3-es beszerzési áron vásárolja meg a termelőtől. A gyártás közben a megvásárolt fa kb. 40%-ából hulladékfa lesz. A késztermék 1 köbméterét 90000 forintért adja el a cég, de az eladási ár 35%-át a költségekre kell fordítania (feldolgozás, telephely fenntartása stb.).

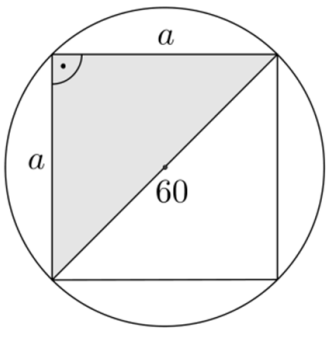
b) Mennyi haszna keletkezik a Hód Kft.-nek 1 köbméter deszkaáru eladásakor? (5 pont)

A fakitermelő cég telephelyéről hat teherautó indul el egymás után. Négy teherautó fenyőfát, kettő pedig tölgyfát szállít.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a két, tölgyfát szállító teherautó közvetlenül egymás után gördül ki a telephelyről, ha az autók indulási sorrendje véletlenszerű! (6 pont)

Megoldás:

a) A farönk tekinthető egy 60 cm átmérőjű, 5 méter magasságú körhengernek. A fűrészelés után kapott hasáb alaplapja egy négyzet, melynek átlója a henger alapkörének átmérője. (1 pont)



Az alapkörbe írható négyzet oldalát a-val jelölve (Pitagorasz-tétel szerint):
$a^2+a^2=60^2$, ahonnan $a^2=1800$. (2 pont)
A négyzetes oszlop térfogata $1800\cdot 500=900000\,\text{cm}^3$ (1 pont)
Mivel $1\,\text{m}^3=1000000\,\text{cm}^3$, így **az állítás igaz, a hasáb térfogata 1 köbméternél valóban kevesebb**. (2 pont)

b) 1m^3 deszkaáru előállításához $1:0,6=\frac{10}{6}$ m^3 rönkfa szükséges, (2 pont)

melynek ára 50000 Ft (1 pont)

1m^3 deszkaárú eladási árának 35%-a 31500 Ft (1 pont)

A Hód Kft. Haszna egy köbméter deszkaáru eladásakor:

$90000-31500-50000=$ **8500 Ft** (1 pont)

c) A hat teherautó összesen $6!=(720)$-féle sorrendben indulhat el. (1 pont)

A két, tölgyfát szállító teherautót tekintsük egy járműnek. (1 pont)

Az öt „jármű” lehetséges sorrendjeinek a száma $5!=(120)$ (1 pont)

A két tölgyfát szállító teherautó minden egyes sorrendben kétféleképpen helyezkedhet el közvetlenül egymás mögött (1 pont)

így a kedvező esetek száma $2\cdot 5!=(240)$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{\mathbf{240}}{\mathbf{720}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

Térgeometria
Megoldások

1) Egy gömb alakú labda belső sugara 13 cm. Hány liter levegő van benne? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$V = \frac{4r^3\pi}{3}$

$V = \frac{4 \cdot 13^3\pi}{3}$ (1 pont)

$V \approx 9202{,}8 \ \left(\text{cm}^3\right)$ (1 pont)

A labdában $\approx$ **9,2 liter** levegő van. (1 pont)

Összesen: 3 pont

2) Egy forgáskúp alapkörének átmérője egyenlő a kúp alkotójával. A kúp magasságának hossza $5\sqrt{3}$ cm. Készítsen vázlatot!

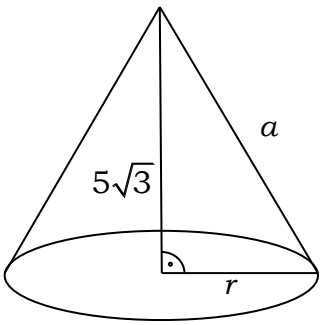
a) Mekkora a kúp felszíne? (9 pont)

b) Mekkora a kúp térfogata? (2 pont)

c) Mekkora a kúp kiterített palástjának középponti szöge? (6 pont)

Megoldás:

a) Ábra (2 pont)



Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

$a^2 = r^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2$. (1 pont)

$4r^2 = r^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2$. (2 pont)

$r = 5$ cm (1 pont)

$a = 10$ cm (1 pont)

$A = r^2\pi + r\pi a$

$A = 25\pi + 50\pi$ (1 pont)

$A = 75\pi \approx$ **235,6 cm²** (1 pont)

b) $V = \frac{r^2\pi m}{3} \Rightarrow V = \frac{25\pi 5\sqrt{3}}{3}$. (1 pont)

$V \approx$ **226,7 cm³**. (1 pont)

c) A körcikk sugara a. (1 pont)

Az ívhossz: $a\pi$. (2 pont)

$\frac{a}{360^\circ} = \frac{a\pi}{2a\pi}$. (2 pont)

A kérdezett középponti szög: $\alpha =$ **180°** (1 pont)

A feladat megoldható az ívhosszak arányának felírásával is.

Összesen: 17 pont

3) Egy vállalkozás reklám-ajándéka szabályos hatszög alapú egyenes gúla, amit fából készítenek el. A gúla alapélei 4,2 cm hosszúak, magassága 25 mm.

a) Hány cm^3 faanyag van egy elkészült gúlában? (4 pont)

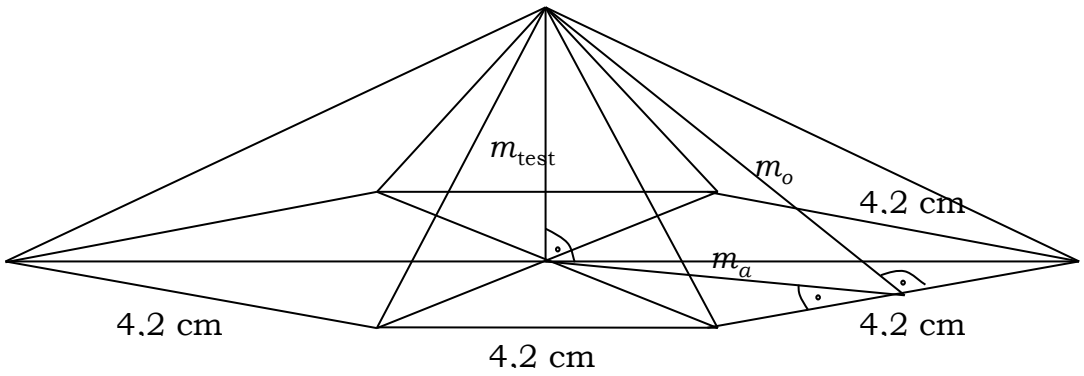
b) A gúla oldallapjait színesre festik. Hány cm^2 felületet festenek be egy gúla oldallapjainak a színezésekor? (8 pont)

c) A gúla oldallapjait hat különböző színnel festik be úgy, hogy 1-1 laphoz egy színt használnak. Hányféle lehet ez a színezés? (Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha forgatással nem vihetők át egymásba.) (3 pont)

d) A cég bejáratánál az előbbi tárgy tízszeresére nagyított változatát helyezték el. Hányszor annyi fát tartalmaz ez, mint egy ajándéktárgy? (2 pont)

Megoldás:

a)



$V = \frac{1}{3} T_{\text{hatszög}} \cdot m_{\text{test}} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot T_{\text{háromszög}} \cdot m_{\text{test}}$ (1 pont)

A hatszög 6 egybevágó szabályos háromszögből épül fel, melyeknek minden oldala 4,2 cm hosszúságú.

A szabályos háromszög területe: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{4,2^2\sqrt{3}}{4}$.

$m = 25 \text{ mm} = 2,5 \text{ cm}$ (1 pont)

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4,2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2,5 = 38,19 \text{ cm}^3 \approx \mathbf{38,2\ cm^3}$ faanyag van a gúlában. (2 pont)

b) $T_{\text{palást}} = 6 \cdot T_{\text{oldallap}} = 3am_o$ (1 pont)

$m_o{}^2 = m_a{}^2 + m_{\text{test}}{}^2$ (2 pont)

$m_a = \frac{4,2\sqrt{3}}{2} = 3,61 \text{ (cm)}$ (3 pont)

$m_o = 4,41 \text{ cm}$ (1 pont)

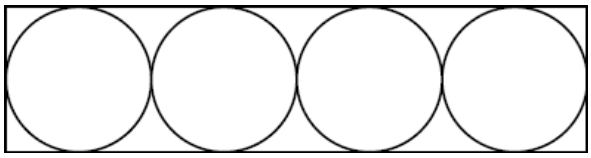
$T_{\text{palást}} = \mathbf{55,6\ cm^2}$, ennyi felületet festenek be. (1 pont)

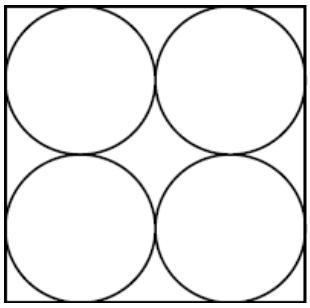
c) Hatféle színt 6!-féle sorrendben lehet befesteni. (1 pont)
A gúla forgásszimmetriája miatt a színezések száma $5! = \mathbf{120}$ (2 pont)

d) A tízszeres nagyítás miatt $10^3 = \mathbf{1000\text{-szer}}$ annyi fát tartalmaz. (2 pont)

Összesen: 17 pont

4) 4 cm átmérőjű fagolyókat négyesével kis (téglatest alakú) dobozokba csomagolunk úgy, hogy azok ne lötyögjenek a dobozokban. A két szóba jövő elrendezést felülnézetből lerajzoltuk:





A dobozokat átlátszó műanyag fóliával fedjük le, a doboz többi része kartonpapírból készül. A ragasztáshoz, hegesztéshez hozzászámoltuk a doboz méreteiből adódó anyagszükséglet 10%-át.

a) Mennyi az anyagszükséglet egy-egy dobozfajtánál a két felhasznált anyagból külön-külön? (8 pont)

b) A négyzet alapú dobozban a fagolyók közötti teret állagmegóvási célból tömítő anyaggal töltik ki. A doboz térfogatának hány százalékát teszi ki a tömítő anyag térfogata? (4 pont)

Megoldás:

a) A négyzet alapú doboznál:

$T_{\text{alap}} = 64 \text{ cm}^2$ (1 pont)

$T_{\text{oldal}} = 128 \text{ cm}^2$ (1 pont)

Az anyagszükséglet $1{,}1 \cdot (128 + 64) =$ **211,2 cm² papír**, (1 pont)

és $1{,}1 \cdot 64 = 70{,}4 \text{ cm}^2$ fólia. (1 pont)

A téglalap alapú doboznál:

$T_{\text{alap}} = 64 \text{ cm}^2$ (1 pont)

$T_{\text{oldal}} = 4 \cdot (32 + 8) = 160 \text{ cm}^2$ (1 pont)

Az anyagszükséglet $1{,}1 \cdot 224 =$ **246,4 cm² és 70,4 cm² fólia**. (2 pont)

b) A doboz térfogata $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256 \text{ cm}^3$ (1 pont)

A négy golyó térfogata együtt: $4 \cdot \frac{4 \cdot 2^3 \cdot \pi}{3} \approx 134 \text{ cm}^3$ (1 pont)

$256 - 134 = 122$

A keresett arány: $\frac{122}{256} \cdot 100 = 47{,}66 \approx$ **48%**. (2 pont)

Összesen: 12 pont

5) Egy téglatest alakú akvárium belső méretei (egy csúcsból kiinduló éleinek hossza): 42 cm, 25 cm és 3 dm. Megtelik-e az akvárium, ha beletöltünk 20 liter vizet? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$V = 42 \cdot 25 \cdot 30 \left(= 31500 \text{ cm}^3 = 31{,}5 \text{ dm}^3\right) = 31{,}5 \text{ liter}$ (2 pont)

Az akvárium nem telik meg. (1 pont)

Összesen: 3 pont

6) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm hosszú, palástjának területe (az oldallapok területösszege) hatszorosa az egyik alaplap területének. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? (12 pont)

Megoldás:

Az a oldalú szabályos háromszög magassága: $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. (1 pont)

Az alaplap területe: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$ (2 pont)

A palást területe: $3am_t = 24m_t$ (2 pont)

$24m_t = 6 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}$

$m_t = 4\sqrt{3}$ (2 pont)

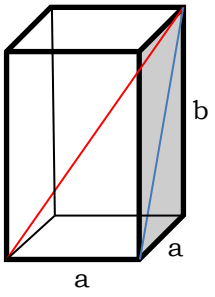
$V_{hasáb} = \left(T_a \cdot m_t =\right) 16\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 192\ \left(\text{cm}^3\right)$ (2 pont)

$A_{hasáb} = 2T_a \cdot 3a \cdot m_t$ (1 pont)

$A_{hasáb} = 2 \cdot 16 \cdot \sqrt{3} + 24 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 128 \cdot \sqrt{3} \approx \mathbf{221,7}\ \left(\mathbf{cm^3}\right)$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

7) Egy négyzetes oszlop egy csúcsból kiinduló három élének hossza: *a*, *a* és *b*. Fejezze ki ezekkel az adatokkal az ebből a csúcsból kiinduló testátló hosszát! (3 pont)



Megoldás:

A lapátló hossza $\sqrt{a^2 + b^2}$

A testátló hossza $\sqrt{a^2 + \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{\mathbf{2a^2 + b^2}}$ (3 pont)

8) Egy gyertyagyárban sokféle színű, formájú és méretű gyertyát készítenek. A folyékony, felhevített viaszt különféle formákba öntik. Az öntőhelyek egyikén négyzet alapú egyenes gúlát öntenek, melynek alapéle 5 cm, oldaléle 8 cm hosszú.

a) Számítsa ki ennek a gúla alakú gyertyának a térfogatát! (Az eredményt cm³-ben, egészre kerekítve adja meg!) (4 pont)

Ezen az öntőhelyen az egyik műszakban 130 darab ilyen gyertyát gyártanak.

b) Hány liter viaszra van szükség, ha tudjuk, hogy a felhasznált anyag 6 %-a veszteség? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

A gúla alakú gyertyákat egyenként díszdobozba csomagolják.

c) Hány cm² papír szükséges 40 darab díszdoboz elkészítéséhez, ha egy doboz papírszükséglete a gúla felszínének 136%-a? (4 pont)

Megoldás:

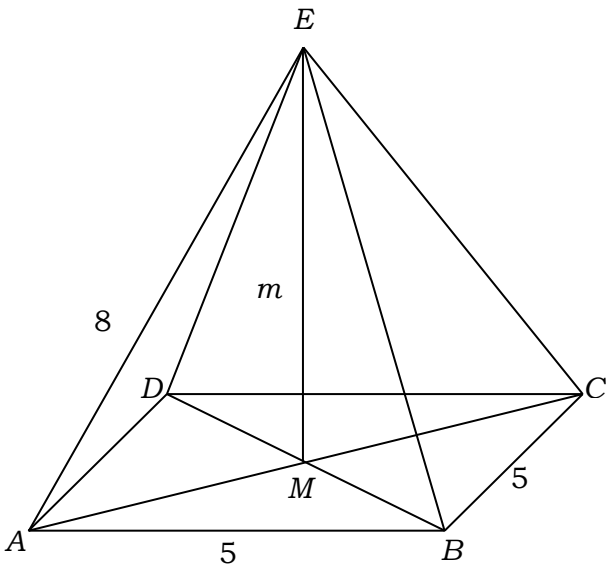
a) A test magassága *m*. (1 pont)

A négyzet átlójának a fele: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (cm) (1 pont)

$m = \sqrt{64 - 12{,}5} \left(\approx 7{,}2 \text{ cm}\right)$ (1 pont)

A gúla alakú gyertya térfogata:

$V = \frac{T_a \cdot m}{3} \approx \mathbf{\frac{5^2 \cdot 7{,}2}{3} \approx 60 \ (cm)}$ (1 pont)



b) Az *x* térfogatú viasznak a 94%-a adja a 130 db gyertya térfogatát:

$0{,}94 \cdot x = 130 \cdot V$ (2 pont)

$x = \frac{130}{0{,}94} \cdot 60 \approx 8296 \ \left(\text{cm}^3\right)$ (1 pont)

8,3 liter viaszra van szükség. (1 pont)

c) Az oldallap magassága (Pitagorasz-tétellel) $m_o = \sqrt{8^2 - 2{,}5^2} \left(\approx 7{,}6 \text{ cm}\right)$ (1 pont)

A palást területe: $P = 4 \cdot \frac{5 \cdot m_o}{2} = 10 m_o \left(\approx 76 \text{ cm}^2\right)$ (1 pont)

A gúla felszíne: $A = 5^2 + P = 101 \left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A teljes felhasznált papírmennyiség:

$\mathbf{1{,}36 \cdot 40 \cdot A = 1{,}36 \cdot 40 \cdot 101 \approx 5494 \ \left(cm^2\right)}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

9) Egy facölöp egyik végét csonka kúp alakúra, másik végét forgáskúp alakúra formálták. (Így egy forgástestet kaptunk.) A középső, forgáshenger alakú rész hossza 60 cm és átmérője 12 cm. A csonka kúp alakú rész magassága 4 cm, a csonka kúp fedőlapja pedig 8 cm átmérőjű. Az elkészült cölöp teljes hossza 80 cm.

a) Hány m³ fára volt szükség 5000 darab cölöp gyártásához, ha a gyártáskor a felhasznált alapanyag 18%-a a hulladék? (Válaszát egész m³-re kerekítve adja meg!) (8 pont)

Az elkészült cölöpök felületét vékony lakkréteggel vonják be.

b) Hány m² felületet kell belakkozni, ha 5000 cölöpöt gyártottak? (Válaszát egész m²-re kerekítve adja meg!) (9 pont)

Megoldás:

a) Az adatok helyes értelmezése (pl. ábra). (1 pont)

A csonka kúp alakú rész térfogatának kiszámítása $\left(\approx 318 \text{ cm}^3\right)$. (1 pont)

A henger alakú rész térfogatának kiszámítása $\left(\approx 6786 \text{ cm}^3\right)$. (1 pont)

A kúp alakú rész térfogatának kiszámítása $\left(\approx 603 \text{ cm}^3\right)$. (1 pont)

Egy cölöp térfogatának kiszámítása $\approx 7707 \text{ cm}^3$. (1 pont)

Egy cölöp elkészítéséhez $\approx \frac{7707}{0{,}82} \left(\approx 9399\right) \text{ cm}^3$. (2 pont)

5000 cölöp elkészítéséhez $\approx 46995000 \text{ cm}^3$, azaz $\mathbf{\approx 47 \ m^3}$ fára van szükség. (1 pont)

b) A csonka kúp fedőköre területének kiszámítása: $\approx 50\ \text{cm}^2$ (1 pont)
A csonka kúp alkotójának kiszámítása: $\sqrt{20}\,(\approx 4{,}47)$ (1 pont)
palást területének kiszámítása: $\approx 141\ \text{cm}^2$ (1 pont)
A hengerpalást területének kiszámítása: $\approx 2262\ \text{cm}^2$ (1 pont)
A kúp alkotójának kiszámítása: $\sqrt{292}\,(\approx 17{,}09)$ (1 pont)
a kúppalást területének kiszámítása: $\approx 322\ \text{cm}^2$ (1 pont)
1 cölöp felszíne $\approx 2775\ \text{cm}^2$ (1 pont)
5000 cölöp felszíne $\approx 13875000\ \text{cm}^2$, (1 pont)
ami $\approx$ **1388 m²**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

10) Egy fa építőjáték-készlet négyféle, különböző méretű téglatestfajtából áll. A készletben a különböző méretű elemek mindegyikéből 10 db van. Az egyik téglatest, nevezzük alapelemnek, egy csúcsából induló éleinek hossza: 8 cm, 4 cm, 2 cm. A többi elem méreteit úgy kapjuk, hogy az alapelem valamelyik 4 párhuzamos élének a hosszát megduplázzuk, a többi él hosszát pedig változatlanul hagyjuk.

a) Mekkora az egyes elemek felszíne? (4 pont)
b) Rajzolja le az alapelem kiterített hálózatának 1:2 arányú kicsinyített képét! (4 pont)
c) Elférhet-e a játékkészlet egy olyan kocka alakú dobozban, amelynek belső éle 16 cm? (4 pont)
d) A teljes készletből öt elemet kiveszünk. (A kiválasztás során minden elemet azonos valószínűséggel választunk.) Mekkora valószínűséggel lesz mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop? (A valószínűség értékét három tizedesjegy pontossággal adja meg!) (5 pont)

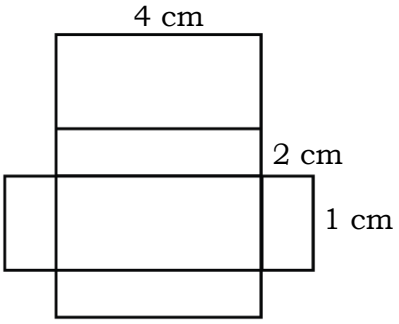
Megoldás:

a)

Az elem	Az elem méretei (cm)	Az elem felszíne (cm^2)
alapelem	$8\times4\times2$	**112**
A elem	$16\times4\times2$	**208**
B elem	$8\times8\times2$	**192**
C elem	$8\times4\times4$	**160**

(4 pont)

b) Az alapelem éleinek hossza 1:2 arányú kicsinyítésben 4 cm, 2 cm és 1 cm. (4 pont)



c) Az alapelem térfogata $64\ \text{cm}^3$. Az alapelemen kívül még három különböző méretű elem van a készletben, ezek mindegyikének a térfogata $2\cdot 64 = 128\ \left(\text{cm}^3\right)$. (1 pont)
A négy különböző méretű elem térfogatának összege $448\ \text{cm}^3$. (1 pont)
A teljes készlet térfogata tízszer ennyi, vagyis $4480\ \text{cm}^3$. (1 pont)
Mivel a 16 cm élű doboz térfogata $4096\ \text{cm}^3$, a **játékkészlet nem fér el a dobozban**. (1 pont)

d) A teljes készletben 40 elem van. A B és a C elem négyzetes oszlop. A négyzetes oszlopok száma a készletben 20. (1 pont)
Annak valószínűsége, hogy az első kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen: $\frac{20}{40}$
hogy a második is az legyen: $\frac{20}{40}\cdot\frac{19}{39}$, (1 pont)
és így tovább. (Minden helyes kiválasztásnál eggyel csökken a négyzetes oszlopok és a készlet elemszáma is.)
Hogy az ötödik is négyzetes oszlop legyen: $\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36}(\approx 0,02356)$
(2 pont)
Annak a valószínűsége, hogy mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop legyen: $\approx \mathbf{0,024}$. (1 pont)
A feladat megoldható úgy is, ha a készletből kiválasztható 5 elemű részhalmazokat vesszük számba.

Összesen: 12 pont

11) Egy gömb alakú gáztároló térfogata 5000 m³. Hány méter a gömb sugara? A választ egy tizedesre kerekítve adja meg! Írja le a számítás menetét! (4 pont)

Megoldás:

Ha a gömb sugara r, akkor: $\frac{4\pi r^3}{3}=5000$, (1 pont)

$r^3=\frac{15000}{4\pi}(\approx 11994)$, (1 pont)

ebből $r=\sqrt[3]{\frac{15000}{4\pi}}$, (1 pont)

A gömb sugara **10,6 m**. (1 pont)

Összesen: 4 pont

12) Belefér-e egy 1600 cm² felszínű (gömb alakú) vasgolyó egy 20 cm élű kocka alakú dobozba? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

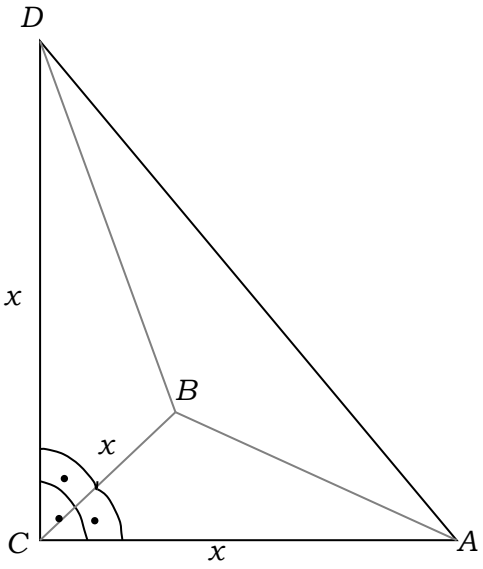
A kockába tehető legnagyobb felszínű gömb sugara 10 cm, (1 pont)
ennek felszíne $400\pi\approx 1256$ cm² (1 pont)
Nem fér bele a gömb a dobozba. (1 pont)

Összesen: 3 pont

13) Az iskolatejet gúla alakú, impregnált papírból készült dobozba csomagolják. (Lásd az alábbi ábrát, ahol $CA = CB = CD$.) A dobozba 2,88 dl tej fér.

a) Számítsa ki a gúla éleinek hosszát! Válaszát egész cm-ben adja meg! (8 pont)

b) Mekkora a papírdoboz felszíne? Válaszát cm²-ben, egészre kerekítve adja meg! (4 pont)



Megoldás:

a) $2,88 \text{ dl} = 288 \text{ cm}^3$ (1 pont)

A tetraéder (gúla) alapterülete $T_a = \frac{x^2}{2}$

(ekkor a magassága x), (1 pont)

a térfogata $V = \frac{x^3}{6}$ (1 pont)

$288 = \frac{x^3}{6}$, melyből (1 pont)

$x^3 = 1728$; $x = 12$ (1 pont)

Az *ABD* háromszög mindegyik oldala egyenlő, (1 pont)

hosszuk $x \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{16,97 \approx 17}$ cm (1 pont)

A tetraéder (gúla) élei **12 cm**, illetve **17 cm** hosszúak. (1 pont)

b) Az egybevágó derékszögű háromszögek területe: $T_1 = \frac{144}{2} = 72 \left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A negyedik lap területe $T_2 = \frac{2x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$ (1 pont)

$\approx 124,7 \left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A papírdoboz felszíne $A = 3T_1 + T_2 = 340,7 \approx \mathbf{341 \text{ cm}^2}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

14) Hányszorosára nő egy kocka térfogata, ha minden élét háromszorosára növeljük? (2 pont)

Megoldás:

Ha az eredeti kocka oldala a (a térfogata: a^3), akkor a már megnövelt kocka oldaléle :$3a$. Az új kocka térfogata, így $27a^3$.

A kocka térfogata **27-szeresére** nő. (2 pont)

15) Egy 12 cm oldalhosszúságú négyzetet megforgatunk az egyik oldalával párhuzamos szimmetriatengelye körül.

a) Mekkora az így keletkező forgástest térfogata és felszíne? (6 pont)
A felszínt egész cm²-re, a térfogatot egész cm³-re kerekítve adja meg!

Ugyanezt a négyzetet forgassuk meg az egyik átlóját tartalmazó forgástengely körül!

b) Mekkora az így keletkező forgástest térfogata és felszíne? (9 pont)
A felszínt egész cm²-re, a térfogatot egész cm³-re kerekítve adja meg!

c) A forgástestek közül az utóbbinak a felszíne hány százaléka az első forgatással kapott forgástest felszínének? (2 pont)

Megoldás:

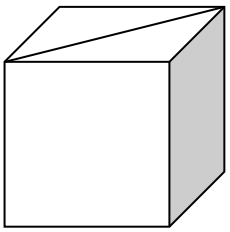
a) Az első esetben a forgástengely a négyzet szemközti oldalainak közös felezőmerőlegese, (1 pont)
a keletkező forgástest forgáshenger: alapkörének sugara 6 cm, magassága 12 cm. (1 pont)
Térfogata: $V_1 = 6^2\pi \cdot 12$ (1 pont)
$V_1 = 432\pi \approx$ **1357 cm³** (1 pont)
Felszíne: $A_1 = 2 \cdot 6^2\pi + 2 \cdot 6\pi \cdot 12$ (1 pont)
$A_1 = 216\pi \approx$ **679 cm²** (1 pont)

b) A második esetben (mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást) a forgástest egy kettőskúp. A közös köralap átmérője a négyzet átlója, a kúpok magassága a négyzet átlóhosszának fele. (1 pont)
A négyzet átlója: $d = 12 \cdot \sqrt{2}\,(\approx 17)$ (1 pont)
Az egyik kúp térfogata: $V_1 = \dfrac{\left(6\sqrt{2}\right)^2 \pi \cdot 6\sqrt{2}}{3}$ (1 pont)
azaz $V_1 = 144\pi \cdot \sqrt{2}\,(\approx 640)$ (1 pont)
A két kúp egybevágó, így a kettőskúp térfogata: $V = 2V_1 \approx$ **1280** cm² (1 pont)
A forgáskúp palástja kiterítve körcikk, amelynek az ívhossza $2 \cdot 6\sqrt{2}\pi (\approx 17\pi \approx 53{,}4)(\text{cm})$, (1 pont)
sugara 12 cm hosszú. (1 pont)
Így a területe: $T = \dfrac{2 \cdot 6\sqrt{2}\pi \cdot 12}{2} = 72\sqrt{2}\pi \left(\approx 320\ \text{cm}^2\right)$ (1 pont)
A kettőskúp felszíne: $\boldsymbol{2T = 144\sqrt{2}\pi \left(\approx 640\ \text{cm}^2\right)}$. (1 pont)

c) A kérdezett százalék: $\dfrac{2T}{A_1} \cdot 100 = \left(\dfrac{144\sqrt{2}\pi}{216\pi} \cdot 100\right)$, (1 pont)
azaz kb. **94%**. (1 pont)

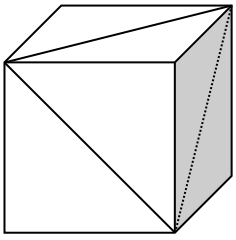
Összesen: 17 pont

16) Az ábrán látható kockának berajzoltuk az egyik lapátlóját. Rajzoljon ebbe az ábrába egy olyan másik lapátlót, amelynek van közös végpontja a berajzolt lapátlóval!
Hány fokos szöget zár be ez a két lapátló?
Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:

Az egy csúcsból kiinduló (bármelyik) két lapátló a végpontjaik által meghatározott harmadik lapátlóval kiegészítve szabályos háromszöget határoz meg, (2 pont)
a keresett szög ezért **60°**-os. (1 pont)



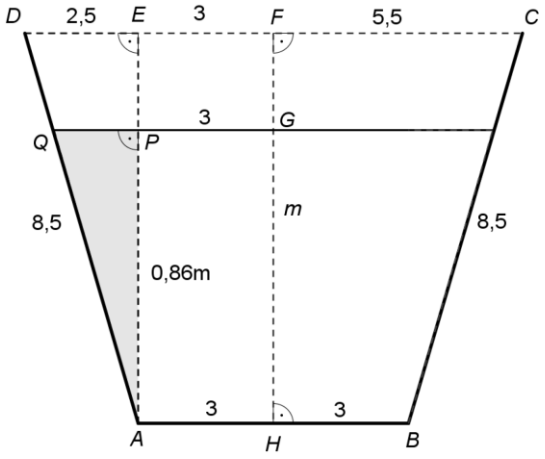
Összesen: 3 pont

17) Egy csonkakúp alakú tejfölös doboz méretei a következők: az alaplap átmérője 6 cm, a fedőlap átmérője 11 cm és az alkotója 8,5 cm.

a) Hány cm³ tejföl kerül a dobozba, ha a gyárban a kisebbik körlapján álló dobozt magasságának 86%-áig töltik meg?
Válaszát tíz cm³-re kerekítve adja meg! (11 pont)

b) A gyártás során a dobozok 3%-a megsérül, selejtes lesz. Az ellenőr a gyártott dobozok közül visszatevéssel 10 dobozt kiválaszt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 doboz között lesz legalább egy selejtes?
Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

Megoldás:



a) Ábra. (1 pont)
A csonkakúp m cm magas.
(A szimmetria miatt) $ED = 2{,}5$ cm. (1 pont)
Az AED derékszögű háromszögből ($AD = 8{,}5$ cm, $AE = m$):
$m^2 = 8{,}5^2 - 2{,}5^2$
$m \approx 8{,}1$ (1 pont)
Ennek 86%-a: $0{,}86m \approx 7{,}0$. (1 pont)
Az APQ és az AED derékszögű háromszögek hasonlók (mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük közös); (1 pont)
a hasonlóságuk aránya (megfelelő oldalaik hosszának aránya) 0,86. (1 pont)
Ezért $PQ = 0{,}86 \cdot DE$, vagyis $PQ = 8{,}6 \cdot 2{,}5 = 2{,}15$. (1 pont)
A síkmetszet sugara: $GQ = 3 + 2{,}15 = 5{,}15$. (1 pont)
A tejföl térfogata $V \approx \frac{7{,}0\pi}{3}\left(5{,}15^2 + 3^2 + 5{,}15 \cdot 3\right)$ (1 pont)
$V \approx 372{,}9 \ \left(\text{cm}^3\right)$ (1 pont)
Tíz cm³-re kerekítve a tejföl térfogata **370 cm³**. (1 pont)

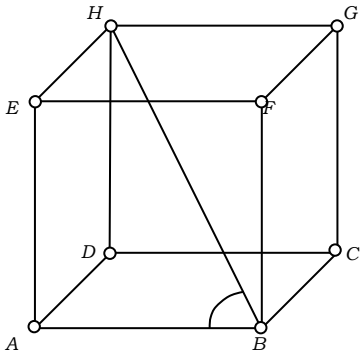
b) Komplementer eseménnyel számolunk. (1 pont)
Sérült doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,03, ezért a jó doboz kiválasztásának a valószínűsége 0,97. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy az ellenőr nem talál selejtes terméket $0{,}97^{10}$, (2 pont)
tehát annak a valószínűsége, hogy talál selejtest $1 - 0{,}97^{10} \left(\approx 0{,}2626\right)$ (1 pont)
A keresett valószínűség két tizedesjegyre kerekítve **0,26**. (1 pont)
A feladat az eredeti esemény valószínűségét kiszámolva is megoldható.

Összesen: 17 pont

18)

a) Számítsa ki annak a szabályos négyoldalú gúlának a térfogatát, melynek minden éle 10 cm hosszú! (6 pont)

Térgeometriai feladatok megoldásában segíthet egy olyan készlet, melynek elemeiből (kilyuggatott kisméretű gömbökből és különböző hosszúságú műanyag pálcikákból) matematikai és kémiai modellek építhetők. Az ábrán egy kocka modellje látható.



b) Számítsa ki az *ABH* szög nagyságát! (A test csúcsait tekintse pontoknak, az éleket pedig szakaszoknak!) (4 pont)

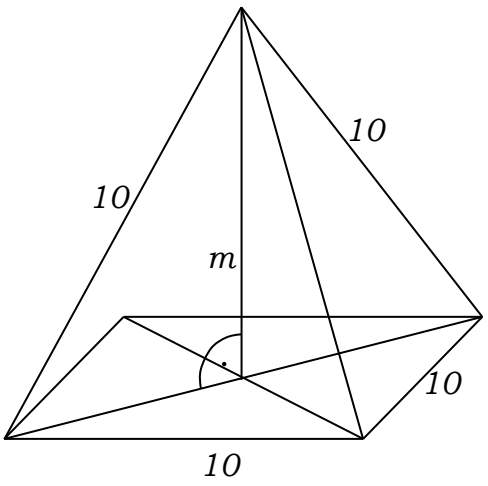
Anna egy molekulát modellezett a készlet segítségével, ehhez 7 gömböt és néhány pálcikát használt fel. Minden pálcika két gömböt kötött össze, és bármely két gömböt legfeljebb egy pálcika kötött össze. A modell elkészítése után feljegyezte, hogy hány pálcikát szúrt bele az egyes gömbökbe. A feljegyzett adatok: 6, 5, 3, 2, 2, 1, 1.

c) Mutassa meg, hogy Anna hibát követett el az adatok felírásában! (4 pont)

Anna is rájött, hogy hibázott. A helyes adatok: 6, 5, 3, 3, 2, 2, 1.

d) Hány pálcikát használt fel Anna a modell elkészítéséhez? (3 pont)

Megoldás:



a) A test alaplapja négyzet, melynek területe $T = 100\ \left(\text{cm}^2\right)$. (1 pont)

A gúla m magassága egy olyan derékszögű háromszög egyik befogója, melynek átfogója 10 (cm), (1 pont)

másik befogója (az alaplap átlójának fele):

$\frac{10\sqrt{2}}{2}\left(=\sqrt{50}\approx 7{,}07\ \text{cm}\right)$ (1 pont)

(Így a Pitagorasz-tétel értelmében:)

$m^2 = 100 - 50 = 50$ (1 pont)

amiből ($m > 0$ miatt) $m = \sqrt{50}\left(\approx 7{,}07\ \text{cm}\right)$ (1 pont)

A gúla térfogata $V = \frac{Tm}{3} = \mathbf{\frac{100\sqrt{50}}{3}\left(\approx 236\right)\ cm^3}$. (1 pont)

A magasság kiszámítható az oldallap magassága és a testmagasság által meghatározott háromszögből is.

b) (Mivel a kocka *BA* éle merőleges az *ADHE* oldallapra, ezért) a *HAB* szög nagysága 90°. (1 pont)

ABH szög legyen α .

A kocka élének hosszát a-val jelölve $AH = a\sqrt{2}$, (1 pont)

így $\text{tg}\alpha = \sqrt{2}$, (1 pont)

amiből ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ miatt) $\mathbf{\alpha = 54{,}74^\circ}$. (1 pont)

A szög nagysága koszinusztétel segítségével is megadható.

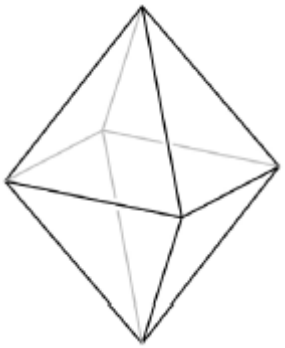
c) A gömböket jelölje a megadott fokszámok sorrendjében *A, B, C, D, E, F* és *G*. Az *A* gömb mindegyik másik gömbbel össze van kötve. (1 pont)

Mivel *G* elsőfokú gömb, ezért csak *A*-val van összekötve. (1 pont)
F is elsőfokú gömb, ezért *F* is csak *A*-val van összekötve. (1 pont)
Ezek szerint *B* csak *A*-val, *C*-vel, *D*-vel és *E*-vel lehet összekötve, vagyis nem lehet ötödfokú. (1 pont)

d) Mindegyik felhasznált pálcika két gömböt köt össze, így az egyes csúcsokból induló pálcikákat megszámolva minden felhasznált pálcikát kétszer számolunk meg. (1 pont)
Így az összes (jól) feljegyzett szám összege éppen kétszerese a pálcikák számának. (1 pont)
A pálcikák száma tehát: $\frac{6+5+3+3+2+2+1}{2} = \mathbf{11}$ (1 pont)
A pálcikák száma gráfos indoklással is megadható (a csúcsok fokszám-összege az élek számának kétszerese.)

Összesen: 17 pont

19) Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm-esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.



a) Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm^2-ben) és a térfogatát (cm^3-ben)! Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A test lapjait 1-től 8-ig megszámozzuk, így egy „dobó-oktaédert" kapunk, amely minden oldallapjára egyforma valószínűséggel esik. Egy ilyen test esetében is van egy felső lap, az ezen lévő számot tekintjük a dobás kimenetelének. (Az ábrán látható „dobó-oktaéderrel" 8-ast dobtunk.)



b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezzel a „dobó-oktaéderrel" egymás után négyszer dobva, legalább három esetben 5-nél nagyobb számot dobunk! (8 pont)

Megoldás:

a) Az oldallap-háromszögekben a 2 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $\sqrt{3^2-1^2} = \sqrt{8}\,(\approx 2{,}83)$ (cm). (1 pont)

Egy oldallap területe $\frac{2\cdot\sqrt{8}}{2}\,(\approx 2{,}83)$ (cm^2). (1 pont)

A test felszíne: $A \approx 22{,}6$ cm^2. (1 pont)

A testet alkotó gúlák magassága megegyezik annak az egyenlő szárú háromszögnek a magasságával, amelynek szára a gúlák oldalélével, alapja a gúla alapjának átlójával egyezik meg. (1 pont)

A gúla m magasságára (a Pitagorasz-tételt alkalmazva): $m^2 = 3^2 - \left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2$ (1 pont)

$m = \sqrt{7}\,(\approx 2{,}65)$ (cm). (1 pont)

A gúla térfogata: $V = \frac{1}{3}\cdot 2^2 \cdot \sqrt{7}\,(\approx 3{,}53)$ (cm^3). (1 pont)

A test térfogata ennek kétszerese, azaz megközelítőleg $\mathbf{7{,}1\,cm^3}$. (2 pont)

b) $P(\text{egy adott dobás 5-nél nagyobb}) = \frac{3}{8}$ (2 pont)

$P(\text{mind a négy dobás 5-nél nagyobb}) = \left(\frac{3}{8}\right)^4 \ (\approx 0{,}0198)$ (1 pont)

$P(\text{három dobás 5-nél nagyobb, egy nem}) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{8} (\approx 0{,}1318)$ (2 pont)

A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz $\approx \mathbf{0{,}152}$. (3 pont)

Összesen: 17 pont

20) Egy szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúla alapéle 12 cm, oldallapjai 60°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Számítsa ki a gúla felszínét (cm²-ben) és térfogatát (cm³-ben)! Válaszait egészre kerekítve adja meg! (7 pont)

A gúlát két részre osztjuk egy az alaplappal párhuzamos síkkal, amely a gúla magasságát a csúcstól távolabbi harmadoló pontban metszi.

b) Mekkora a keletkező gúla és csonkagúla térfogatának aránya? Válaszát egész számok hányadosaként adja meg! (5 pont)

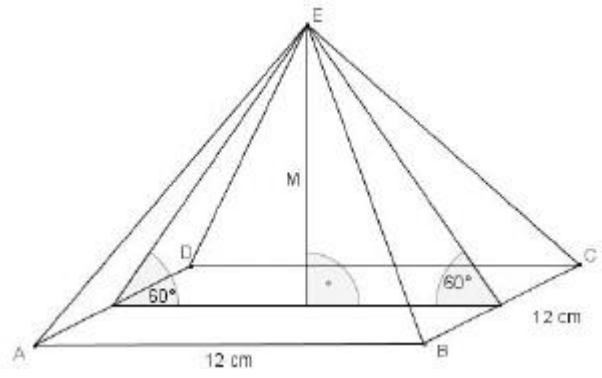
c) Számítsa ki a keletkező csonkagúla felszínét cm²-ben! (5 pont)

Megoldás:

a) Jó ábra az adatok feltüntetésével. (1 pont)

A gúla magassága:

$M = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(= 6\sqrt{3} \approx 10{,}39\right)$ (cm). (1 pont)



A gúla oldallapjának a 12 cm-es oldalhoz tartozó magassága szintén 12 cm. (1 pont)

A gúla felszíne: $A = 12^2 + 4 \cdot \frac{12^2}{2} =$ **432 cm²**. (2 pont)

A gúla térfogata: $V = \frac{12^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3} \approx$ **499** cm³. (2 pont)

b) Az adott sík a gúlát egy csonkagúlára és egy az eredetihez hasonló gúlára vágja szét, ahol a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{2}{3}$. (2 pont)

A hasonló testek térfogatának aránya: $\frac{V_{\text{levágott gúla}}}{V_{\text{eredeti gúla}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, (1 pont)

A hasonló testek térfogatának aránya: $19 : 27$, (1 pont)

azaz a keletkező testek térfogatának aránya $\mathbf{8 : 19}$. (1 pont)

c) (A középpontos hasonlósági transzformáció tulajdonságai miatt) a csonkagúla fedőéle $12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ (cm), alapéle 12 cm. (1 pont)

Egy oldallapjának magassága $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ (cm). (1 pont)

Egy oldallapjának területe: $T = \frac{12+8}{2} \cdot 4 = 40$ (cm²). (1 pont)

A csonkagúla felszíne: $A = 12^2 + 8^2 + 4 \cdot 40 =$ **368 cm².** (2 pont)

Összesen: 17 pont

21) Egy henger alakú bögre belsejének magassága 12 cm, belső alapkörének átmérője 8 cm. Belefér-e egyszerre $\frac{1}{2}$ liter kakaó? Válaszát indokolja! **(4 pont)**

Megoldás:

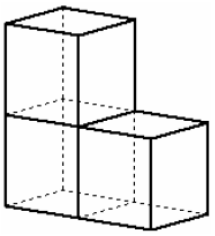
$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 4^2 \cdot \pi \cdot 12$ (2 pont)

$V \approx 603 \text{ cm}^3$ (1 pont)

$\frac{1}{2}$ liter = 500 cm^3, tehát **belefér** a bögrébe. (1 pont)

Összesen: 4 pont

22) Három tömör játékkockát az ábrának megfelelően rakunk össze. Mindegyik kocka éle 3 cm.
Mekkora a keletkező test
a) felszíne, (3 pont)
b) térfogata? (1 pont)
Számítását írja le!



Megoldás:

a) Egy lap területe 9 cm^2. (1 pont)
A felszín 14 lap területének összege. (1 pont)
$A = 14 \cdot 9 \text{ cm}^2 =$ **126** cm^2. (1 pont)

b) A keletkező test térfogata $3 \cdot 3^3 \text{cm}^3 =$ **81** cm^3. (1 pont)

Összesen: 4 pont

23) Egy téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza 15 cm, 12 cm és 8 cm. Számítsa ki a téglatest felszínét! Írja le a számítás menetét! (3 pont)

Megoldás:

$A = 2 \cdot (15 \cdot 12 + 15 \cdot 8 + 8 \cdot 12) = 792$ (2 pont)

Tehát a téglatest felszíne **792 cm².** (1 pont)

Összesen: 3 pont

24) Egy henger alakú fazék belsejének magassága 14 cm, belső alapkörének átmérője 20 cm. Meg lehet-e főzni benne egyszerre 5 liter levest? Válaszát indokolja! Belefér 5 liter leves? (4 pont)

Megoldás:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 10^2 \cdot \pi \cdot 14$ (2 pont)

$V \approx 4398 \text{ cm}^3$ (1 pont)

Tehát az 5 liter leves nem fér bele a fazékba, mivel a 4393 cm³ kevesebb, mint az 5000 cm³. (1 pont)

Összesen: 4 pont

25) A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer $\left(2 \cdot 10^{-6}\text{m}\right)$, átmérője 0,5 mikrométer $\left(5 \cdot 10^{-7}\text{m}\right)$.

a) Számítsa ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításainak eredményét m³-ben, illetve m²-ben, normálalakban adja meg! (5 pont)

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.

b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? (4 pont)

A baktériumok számát a tápoldatban *t* perc elteltével a $B(t) = 3000000 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$ összefüggés adja meg.

c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

Megoldás:

a) A henger alapkörének sugara $2{,}5 \cdot 10^{-7}\ (\mathrm{m})$, (1 pont)

térfogata $V = \left(2{,}5 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}$, (1 pont)

normálalakban $\boldsymbol{V \approx 3{,}9 \cdot 10^{-19}\ (\mathrm{m}^3)}$. (1 pont)

A henger felszíne:

$A = 2 \cdot \left(2{,}5 \cdot 10^{-7}\right)^2 \cdot \pi + 5 \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}$, (1 pont)

normálalakban $\boldsymbol{A \approx 3{,}5 \cdot 10^{-12}\ (\mathrm{m}^2)}$. (1 pont)

b) A kólibaktériumok száma 1,5 óra alatt 6-szor duplázódott, (2 pont)

ezért 1,5 óra után $3000000 \cdot 2^6 =$ (1 pont)

$\boldsymbol{= 192}$ millió lesz a baktériumok száma. (1 pont)

c) A baktériumok száma *x* perc múlva lesz 600 millió. Meg kell oldanunk a $3 \cdot 2^{\frac{x}{15}} = 600$ egyenletet. (2 pont)

$2^{\frac{x}{15}} = 200$ (1 pont)

Átalakítva:

$\frac{x}{15} = \log_2 200$ (2 pont)

$x = 15 \cdot \frac{\lg 200}{\lg 2}$ (1 pont)

amiből $\boldsymbol{x \approx 115}$ adódik, tehát (1 pont)

115 perc múlva lesz a baktériumok száma 600 millió. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben $1{,}5\ \mathrm{m}^2$-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a $27\ \mathrm{m}^2$-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

Megoldás:

a) Ha naponta x-szeresére nőtt az algás terület, akkor:

$1,5 \cdot x^7 = 27$. (1 pont)

$x = \sqrt[7]{18} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{1,5}$ (1 pont)

Az algás terület naponta körülbelül a másfélszeresére növekedett. (1 pont)

b) A medence alaplapja egy 2,4 m oldalhosszúságú szabályos hatszög, ennek területe $T_{\text{alaplap}} = 6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx$ (2 pont)

$\approx 14,96\left(\text{m}^2\right)$ (1 pont)

A medence oldalfalainak összterülete

$T_{\text{oldalfal}} = 6 \cdot 2,4 \cdot 0,4 = 5,76\left(\text{m}^2\right)$. (1 pont)

Így összesen körülbelül **$20,7\ \text{m}^2$** felületet burkoltak csempével. (1 pont)

A medence térfogata

$V = T_{\text{alaplap}} \cdot m = 6 \cdot \frac{2,4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 0,4 \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{5,986\left(m^3\right)}$. (1 pont)

Körülbelül **5986 liter** víz fér el a medencében. (1 pont)

c) Ha például a kék és a sárga színt választották ki, akkor $\binom{6}{3} = 20$ különböző módon választható ki az a három vízsugár, amelyet a kék színnel világítanak meg (a másik három fénysugarat ugyanekkor sárga színnel világítják meg). (2 pont)

A megvilágításhoz két színt háromféleképpen választhatnak ki (kék-sárga, kék-piros, piros-sárga). (1 pont)

$3 \cdot \binom{6}{3} = 60$ (1 pont)

Azaz **60** különböző megvilágítás lehetséges. (1 pont)

Összesen: 17 pont

27) Egy család személyautóval Budapestről Keszthelyre utazott. Útközben lakott területen belül, országúton és autópályán is haladtak. Az utazással és az autóval kapcsolatos adatokat a következő táblázat tartalmazza:

	megtett út hossza (km)	átlagsebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$	átlagos benzinfogyasztás 100 km-en (liter)
lakott területen belül	45	40	8,3
országúton	35	70	5,1
autópályán	105	120	5,9

a) Mennyi ideig tartott az utazás? (4 pont)
b) Hány liter ezen az utazáson az autó 100 km-re eső átlagfogyasztása? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Útközben elfogyott az autóból a benzin. A legközelebbi benzinkútnál kétféle benzines kannát lehet kapni. A nagyobbra rá van írva, hogy 20 literes, a kisebbre nincs ráírva semmi. A két kanna (matematikai értelemben) hasonló, a nagyobb kanna magassága éppen kétszerese a kisebb kanna magasságának.

c) Hány literes a kisebb kanna? (4 pont)

Megoldás:

a) Egy adott útszakasz megtételéhez szükséges időt megkapjuk, ha az útszakasz hosszát elosztjuk az útszakon mért átlagsebességgel. (1 pont)
Az egyes útszakaszok megtételéhez szükséges idő
lakott területen belül: $1{,}125$ (óra)
országúton: $0{,}5$ (óra) (2 pont)
autópályán $0{,}875$ (óra).
Így összesen $1{,}125 + 0{,}5 + 0{,}875 = \mathbf{2{,}5}$ óráig tartott az utazás. (1 pont)

b) Az egyes útszakaszokon az autó fogyasztása
lakott területen belül: $\frac{45}{100} \cdot 8{,}3 = 3{,}735$ (liter),
országúton: $\frac{35}{100} \cdot 5{,}1 = 1{,}785$ (liter), (2 pont)
autópályán: $\frac{105}{100} \cdot 5{,}9 = 6{,}195$ (liter).
Az összes fogyasztás 185 km-en $11{,}715$ liter. (1 pont)
100 km-en az átlagfogyasztás: $\frac{11{,}715}{185} \cdot 100$ (liter). (1 pont)
Az autó átlagfogyasztása 100 km-en kb. **6,3 liter**. (1 pont)

c) A két test hasonló, a hasonlósági arány $1:2$, (1 pont)
így a térfogatok aránya $1:8$. (2 pont)
A kisebb kanna térfogata $\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{8}} = \mathbf{2{,}5}$ **liter**. (1 pont)

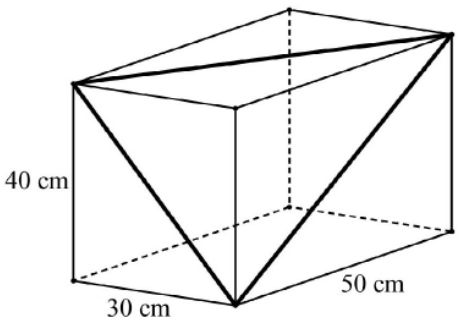
Összesen: 13 pont

28) Egy téglatest alakú akvárium egy csúcsból kiinduló élei 30 cm, 40 cm, illetve 50 cm hosszúak.

a) Hány literes ez az akvárium? (A számolás során tekintsen el az oldallapok vastagságától!) (3 pont)

Tekintsük azt a háromszöget, amelynek oldalait az ábrán látható téglatest három különböző hosszúságú lapátlója alkotja.

b) Mekkora ennek a háromszögnek a legkisebb szöge? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)



Megoldás:

a) $V = 30 \times 40 \times 50 = 60000 \ \left(\text{cm}^3\right)$ (1 pont)

$V = 60 \ \text{dm}^3$. (1 pont)

Az akvárium térfogata **60 liter**. (1 pont)

b) Az egyes lapátlók hossza:

$\sqrt{50^2 + 40^2} = \sqrt{4100} \left(\approx 64{,}03\right) \left(\text{cm}\right)$,

$\sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{3400} \left(\approx 58{,}31\right) \left(\text{cm}\right)$, (2 pont)

$\sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \left(\text{cm}\right)$.

A legkisebb szög a legrövidebb oldallal van szemben. (1 pont)

A legrövidebb oldallal szemközti szöget α-val jelölve, koszinusztétellel:

$2500=4100+3400-2\times\sqrt{4100}\times\sqrt{3400}\cdot\cos\alpha$. (2 pont)

Ebből $\cos\alpha \approx 0{,}6696$. (2 pont)

A háromszög legkisebb szöge: $\boldsymbol{\alpha = 48°}$. (1 pont)

Összesen: 11 pont

29) A biliárdjáték megkezdésekor az asztalon 15 darab azonos méretű, színezésű biliárdgolyót helyezünk el háromszög alakban úgy, hogy az első sorban 5 golyó legyen, a másodikban 4, a következőkben pedig 3, 2, illetve 1 golyó. (A golyók elhelyezésére vonatkozó egyéb szabályoktól tekintsünk el.)

a) Hányféleképpen lehet kiválasztani a 15-ből azt az 5 golyót, amelyet majd az első sorban helyezünk el? (Az 5 golyó sorrendjét nem vesszük figyelembe.) (3 pont)

b) Hányféle különböző módon lehet az első két sort kirakni, ha a 9 golyó sorrendjét is figyelembe vesszük? (3 pont)

Egy biliárdasztal játékterülete téglalap alakú, mérete 194 cm × 97 cm. A játékterület középpontja felett 85 cm-rel egy olyan (pontszerűnek tekinthető) lámpa van, amely fénykúpjának a nyílásszöge 100°.

c) Számítással állapítsa meg, hogy a lámpa megvilágítja-e a játékterület minden pontját! (11 pont)

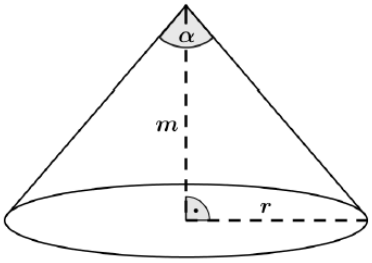
Megoldás:

a) 15 golyóból az első sorba kerülő 5-öt $\binom{15}{5} =$ (2 pont)

$= \mathbf{3003}$-féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)

b) A lehetséges különböző kirakások száma:
$15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot 7 =$ (2 pont)
$= \mathbf{1816214400}$. (1 pont)

c) Az ábra, melyen a lámpa fénykúpjának nyílásszöge, azaz $\alpha = 100°$, a kúp magassága $m = 85\,\text{cm}$, az alapkör sugara r. (2 pont)



Szögfüggvény alkalmazása a derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 50° =$ (1 pont)
$= \frac{r}{m}$. (1 pont)
Ebből az alapkör sugara: $r \approx 101{,}3\,(\text{cm})$. (1 pont)

A kérdés megválaszolásához az asztallap két legtávolabbi pontjának a távolságát kell vizsgálni, vagyis meg kell határozni a téglalap átlóinak (e) a hosszát. (2 pont)
$e^2 = 194^2 + 97^2$ (1 pont)
$e \approx 216{,}9\,(\text{cm})$ (1 pont)
Mivel $e > 2r$, (1 pont)
ezért a lámpa **nem világítja be** az asztallap minden pontját. (1 pont)

Összesen: 17 pont

30) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus négyszög.
b) A kocka testátlója 45°-os szöget zár be az alaplappal.
c) A szabályos tizenhétszögben az egyik csúcsból kiinduló összes átló a tizenhétszöget 15 háromszögre bontja. (2 pont)

Megoldás:

a) **Hamis**
b) **Hamis**
c) **Igaz** (2 pont)

31) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előre jelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? (5 pont)

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

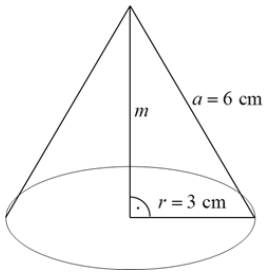
Megoldás:

a) A kereslet minden évben várhatóan az előző évi kereslet $1,6$-szorosára változik, (1 pont)
így 5 év múlva az idei $1,06^5 \approx 1,34$-szorosára nő. (1 pont)
Ez kb. **34%-kal** magasabb, mint az idei kereslet. (1 pont)

b) Az ár minden évben várhatóan az előző év ár $0,9$-szorosára változik, (1 pont)
így megoldandó a $0,94^n = 0,65$ egyenlet, (ahol n az eltelt évek számát jelenti.) (1 pont)
Ebből $n = \dfrac{\lg 0,65}{\lg 0,94} (\approx 6,96)$. (2 pont)
Azaz várhatóan **7 év múlva** lesz az ár a jelenlegi ár 65%-a. (1 pont)

c) A bevételt a kereslet és az ár szorzatából kapjuk, (1 pont)
így 8 év múlva a jelenlegi bevétel $(1,06 \cdot 0,94)^8 \approx$ (1 pont)
$\approx 0,972$-szerese várható. (2 pont)
Azaz **8 év múlva** a bevétel az ideinél kb. $2,8\,\%$-kal lesz alacsonyabb. (1 pont)

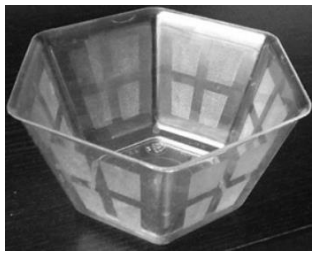
d) Ábra az adatok feltüntetésével. (1 pont)



A kúp magasságát m-mel jelölve a Pitagorasz-tétel alapján:
$m = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} (\approx 5,2\,\text{cm})$. (1 pont)
A kúp térfogata $V \approx \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 5,2 \approx$ (1 pont)
$\approx \mathbf{49\,cm^3}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

32) Egy műanyag terméket gyártó üzemben szabályos hatoldalú csonkagúla alakú, felül nyitott virágtartó dobozokat készítenek egy kertészet számára (lásd az ábrát). A csonkagúla alaplapja 13 cm oldalú szabályos hatszög, fedőlapja 7 cm oldalú szabályos hatszög, az oldalélei 8 cm hosszúak.



a) Egy műanyagöntő gép 1 kg alapanyagból (a virágtartó doboz falának megfelelő anyagvastagság mellett) $0,93\,m^2$ felületet képes készíteni. Számítsa ki, hány virágtartó doboz készíthető 1 kg alapanyagból! (11 pont)

A kertészetben a sok virághagymának csak egy része hajt ki: $0,91$ annak a valószínűsége, hogy egy elültetett virághagyma kihajt.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy 10 darab elültetett virághagyma közül legalább 8 kihajt! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

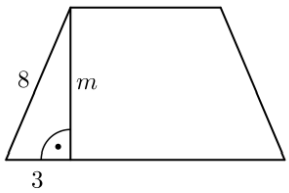
***Megoldás*:**

a) A virágtartó doboz talpának felszíne megegyezik a csonkagúla $7\,\text{cm}$-es oldalhosszúságú fedőlapjának területével. Ez egy szabályos hatszög, melynek területe egyenlő $6\,\text{db}$ $7\,\text{cm}$ oldalhosszúságú szabályos háromszög területével. (1 pont)

$t_1 = 6 \cdot \dfrac{7^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} \approx 127,3\,\text{cm}^2$ (2 pont)

A virágtartó oldalának felületét a csonkagúla oldallapjait alkotó húrtrapézok területével számítjuk ki.

A magasság az $3^2 + m^2 = 8^2$ összefüggésből adódóan $m \approx 7,42\,\text{cm}$. (3 pont)



A trapéz területe ekkor: $t_2 = \frac{7+13}{2} \cdot 7,42 = 74,2\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Így a teljes felület $A = 127,3 + 6 \cdot 74,2 = 572,5\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Mivel a gép 1kg anyagból $9300\,\text{cm}^2$ felületet képes elkészíteni, ezért 1kg anyagból $\frac{9300}{572,5} \approx 16,24$. (2 pont)

Vagyis **16** virágtartó doboz készíthető. (1 pont)

b) Ha legalább 8 virághagyma kihajt, akkor 8, 9 vagy 10 hajt ki. (1 pont)

I. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 8 kihajt és 2 nem a binomiális tétellel számítható ki: $p_1 = \binom{10}{8} \cdot 0,91^8 \cdot 0,09^2 \approx 0,1714$ (1 pont)

II. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 9 kihajt és 1 nem: $p_2 = \binom{10}{9} \cdot 0,91^9 \cdot 0,09 \approx 0,3851$ (1 pont)

III. Végül annak a valószínűsége, hogy mind a 10 kihajt: $p_3 = 0,91^{10} \approx 0,3894$ (1 pont)

A keresett valószínűség a három eset valószínűségének összege, vagyis $P = p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{0,946}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

33) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle 6cm, oldaléle 5cm hosszúságú. Egy szaküzletben 11cm oldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy 11cm oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

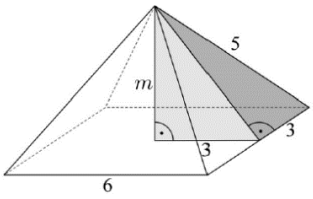
b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot" használ. Mindegyik fajta „varázskanóc" fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A gúla oldallap magasságának kiszámításához Pitagorasz-tételt írunk fel: $\sqrt{5^2-3^2}=4$, majd a gúla magasságához újra alkalmazzuk: $m=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}\approx 2{,}65\,\text{cm}$. (3 pont)



Ezután kiszámoljuk a gúla térfogatát.

$V_{gúla}=\frac{6^2\cdot\sqrt{7}}{3}=12\sqrt{7}\approx 31{,}75\,\text{cm}^3$ (1 pont)

Egy kocka alakú tömb térfogata $V_{kocka}=11^3=1331\,\text{cm}^3$, így egy kockából $\frac{1331}{31{,}75}\approx 41{,}9$, azaz **41** gyertya önthető ki. (3 pont)

b) Az alaplapot kétféleképpen lehet kiszínezni. (1 pont)
Az oldallapok lehetnek ugyanolyan színűek, mindegyik kék, vagy mindegyik zöld, ez összesen két eset. (1 pont)
Lehet három oldallap zöld és egy kék, vagy három oldallap kék és egy zöld, ez is összesen két eset. (1 pont)
Olyan festésből, amikor két oldallap zöld és két oldallap kék, szintén kétféle lehet, attól függően, hogy az ugyanolyan színű lapok szomszédosak vagy szemköztiek. (1 pont)
Az oldallapokat tehát hatféleképpen lehet kiszínezni, így összesen $2\cdot 6=$ **12** különböző színezés készíthető. (2 pont)

c) Az első gyertya bármilyen színű lánggal éghet. (1 pont)
Annak, hogy a második gyertya más színű lánggal ég, $\frac{4}{5}$ a valószínűsége. (1 pont)
Annak, hogy a harmadik gyertya más színű lánggal ég, mint az első kettő, $\frac{2}{4}$ a valószínűsége. (1 pont)
Ekkor a kérdéses valószínűség $P=1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}=$ **0,4**. (2 pont)

Összesen: 17 pont

34) Egy forgáskúp alapkörének sugara 5 cm, magassága 9 cm hosszú. Számítsa ki a kúp térfogatát! (2 pont)

***Megoldás*:**

$\left(\frac{5^2\pi\cdot 9}{3}=\right)75\pi\,\text{cm}^3\approx$ **235,6 cm³** (2 pont)

Összesen: 2 pont

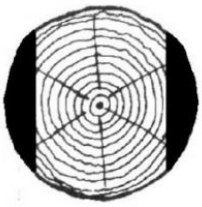
35) A Bocitej Kft. 1 literes tejesdobozának alakja négyzet alapú egyenes hasáb. A dobozt színültig töltik tejjel. Hány cm magas a doboz, ha az alapnégyzet oldala 7 cm? Megoldását részletezze! (3 pont)

***Megoldás*:**

1 liter = 1000 cm^3 (1 pont)
Ha a doboz m magas, akkor a térfogata $7\cdot 7\cdot m=1000$ (1 pont)
,ahonnan $\boldsymbol{m\approx 20{,}04\,(\text{cm})}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) A Hód Kft. Faárutelephelyén rönkfából (henger alakú fatörzsekből) a következő módon készítenek gerendát. A keresztfűrészgép először két oldalt levág egy-egy – az ábra sötéttel jelölt – részt, majd a fa 90°-kal történő elfordítása után egy hasonló vágással végül egy négyzetes hasáb alakú gerendát készít. A gépet úgy állítják be, hogy a kapott hasáb alaplapja a lehető legnagyobb legyen. Most egy forgáshenger alakú, 60 cm átmérőjű, 5 méter hosszú rönkfát fűrészel így a gép.



a) Igaz-e, hogy a kapott négyzetes hasáb alakú fagerenda térfogata kisebb 1 köbméternél? (6 pont)

A Hód Kft. Deszkaárut is gyárt, ehhez a faanyagot 30000 Ft/ m^3-es beszerzési áron vásárolja meg a termelőtől. A gyártás közben a megvásárolt fa kb. 40%-ából hulladékfa lesz. A késztermék 1 köbméterét 90000 forintért adja el a cég, de az eladási ár 35%-át a költségekre kell fordítania (feldolgozás, telephely fenntartása stb.).

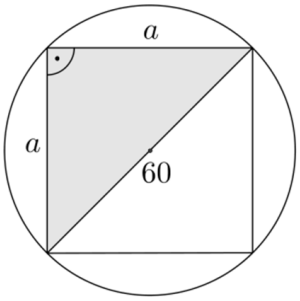
b) Mennyi haszna keletkezik a Hód Kft.-nek 1 köbméter deszkaáru eladásakor? (5 pont)

A fakitermelő cég telephelyéről hat teherautó indul el egymás után. Négy teherautó fenyőfát, kettő pedig tölgyfát szállít.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a két, tölgyfát szállító teherautó közvetlenül egymás után gördül ki a telephelyről, ha az autók indulási sorrendje véletlenszerű! (6 pont)

Megoldás:

a) A farönk tekinthető egy 60 cm átmérőjű, 5 méter magasságú körhengernek. A fűrészelés után kapott hasáb alaplapja egy négyzet, melynek átlója a henger alapkörének átmérője. (1 pont)



Az alapkörbe írható négyzet oldalát a-val jelölve (Pitagorasz-tétel szerint): $a^2 + a^2 = 60^2$, ahonnan $a^2 = 1800$. (2 pont)

A négyzetes oszlop térfogata $1800 \cdot 500 = 900000\,\text{cm}^3$ (1 pont)

Mivel $1\text{m}^3 = 1000000\,\text{cm}^3$, így **az állítás igaz, a hasáb térfogata 1 köbméternél valóban kevesebb**. (2 pont)

b) 1m^3 deszkaáru előállításához $1 : 0,6 = 1,6667\,\text{m}^3$ rönkfa szükséges, (2 pont)

melynek ára 50000 Ft (1 pont)

1m^3 deszkaárú eladási árának 35%-a 31500 Ft (1 pont)

A Hód Kft. Haszna egy köbméter deszkaáru eladásakor:

$90000 - 31500 - 50000 =$ **8500 Ft** (1 pont)

c) A hat teherautó összesen $6! = (720)$-féle sorrendben indulhat el. (1 pont)

A két, tölgyfát szállító teherautót tekintsük egy járműnek. (1 pont)

Az öt „jármű” lehetséges sorrendjeinek a száma $5! = (120)$ (1 pont)

A két tölgyfát szállító teherautó minden egyes sorrendben kétféleképpen helyezkedhet el közvetlenül egymás mögött (1 pont)

így a kedvező esetek száma $2 \cdot 5! = (240)$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\dfrac{\mathbf{240}}{\mathbf{720}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

Trigonometria
Megoldások

1) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$$ **(12 pont)**

Megoldás:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x + 4\cos x = 3\left(1 - \cos^2 x\right)$ (2+1 pont)

$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva a fenti egyenletet, a gyökök:

$$\cos x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4}$$

$\cos x = \frac{1}{2}$ vagy $\cos x = -\frac{3}{2}$ (1+1 pont)

Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor $\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{3} + k2\pi}$, $\boldsymbol{x_2 = \frac{5\pi}{3} + k2\pi}$ (3 pont)

ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Ha $\cos x = -\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás, hiszen $\cos x \geq -1$, minden x esetén.

(2 pont)

Az egyenlet megoldása közben ekvivalens átalakításokat végeztünk, így mindkét gyöksorozat megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2$, ahol x valós szám és $x > -1$ **(6 pont)**

b) $2\cos^2 x = 4 - 5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl **(11 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1}+1 = 3^2$ (2 pont)

$\sqrt{x+1} = 8$ (1 pont)

$x + 1 = 64$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = 63}$ (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

b) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítéssel, (1 pont)

$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ (1 pont)

$\sin x = y$ új változóval $2y^2 - 5y + 2 = 0$. (1 pont)

$y_1 = 2;\ y_2 = \frac{1}{2}$ (2 pont)

y_1 nem megoldás, mert $|\sin x| \leq 1$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = \frac{1}{6}\pi + k2\pi}$ vagy $\boldsymbol{x = \frac{5}{6}\pi + k2\pi}$ (fokban is megadható) (3 pont)

$k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Ellenőrzés, vagy le kell írni, hogy a gyökök igazzá teszik az eredeti egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

Összesen: 17 pont

3) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ **(6 pont)**

b) $\sin^2 x = 2 \sin x + 3$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Legyen $3^x = a$

Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. (1 pont)

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$ (1 pont)

$a = 3^x = 3$ esetén $x = 1$ (1 pont)

$a = 3^x = -1$ egyenlet nem ad megoldást, (1 pont)

mert 3 minden valós kitevőjű hatványa pozitív szám. (1 pont)

Az $x = 1$ kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) Legyen $\sin x = a$

Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani.

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$. (1 pont)

$a = \sin x = 3$ nem ad megoldást, (1 pont)

mert $\sin x \leq 1$ (1 pont)

$a = \sin x = -1$ (1 pont)

A $\sin x = -1$ egyenlet gyökei: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$,

ahol k tetszőleges egész szám. (1 pont)

Ezek az x értékek kielégítik az egyenletet. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Mely valós számokra teljesül a $[0;2\pi]$ intervallumon a $\sin x = \frac{1}{2}$ egyenlőség? (2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{x_1 = \frac{\pi}{6}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{x_2 = \frac{5\pi}{6}}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

5) Adja meg az összes olyan forgásszöget fokokban mérve, amelyre a $\boldsymbol{k(x) = \frac{5}{\cos x}}$ kifejezés nem értelmezhető! Indokolja a válaszát! (3 pont)

Megoldás:

A kifejezés nem értelmezhető, ha

$\boldsymbol{x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ}$, $\boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$ (3 pont)

6) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $\left(\log_2 x - 3\right)\cdot\left(\log_2 x^2 + 6\right) = 0$ **(7 pont)**

b) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ **(10 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldalán szereplő szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. (1 pont)
Ha az első tényező 0, akkor $\log_2 = 3$ (1 pont)
Innen $x_1 = 2^3 = 8$ (1 pont)
Ha a második tényező 0, akkor $\log_2 x^2 = -6$ (1 pont)
Innen $x^2 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$ (1 pont)
ahonnan a pozitív tartományba csak az $x_2 = \frac{1}{8}$ (1 pont)
Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $x_2 = 2l\pi$; $x_3 = \pi + 2m\pi$; $x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ (4 pont)

Összesen: 17 pont

7) Döntse el az alábbi két állítás mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!(2 pont)

a) **Az $x \mapsto \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény periódusa 2π.**

b) **Az $x \mapsto \sin(2x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény periódusa 2π.**

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)

Összesen: 2 pont

8) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sin x = 0$ egyenletet, ha $-2\pi \le x \le 2\pi$ (3 pont)

Megoldás:

A megoldások: $-2\pi; \pi; 0; \pi; 2\pi$. (3 pont)

9) Döntse el az alábbi négy állításról, hogy melyik igaz, illetve hamis!

A: Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik hegyesszög szinusza $\frac{1}{2}$ **(1 pont)**

B: Ha egy háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{1}{2}$, akkor a háromszög derékszögű. **(1 pont)**

C: A derékszögű háromszögnek van olyan szöge, amelynek nincs tangense. **(1 pont)**

D: A derékszögű háromszögek bármelyik szögének értelmezzük a koszinuszát. **(1 pont)**

Megoldás:

A: **igaz** (1 pont)
B: **hamis** (1 pont)
C: **igaz** (1 pont)
D: **igaz** (1 pont)
Összesen: 4 pont

10) Melyik szám nagyobb?

$$\boldsymbol{A = \lg\frac{1}{10}} \textbf{ vagy } \boldsymbol{B = \cos 8\pi}$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A nagyobb szám betűjele: **B** $(= \cos 8\pi)$ (2 pont)

11) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}}$ **(6 pont)**

b) $\boldsymbol{\sin^2 x = 1 + 2\cos x}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet: $x \le 5$. (1 pont)
és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke: $|x| \le \sqrt{35,5}$ (1 pont)
Négyzetre emelve: $x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 71$. (1 pont)
Rendezve: $x^2 + 10x - 96 = 0$ (1 pont)
amelynek valós gyökei a –16 és a 6. (1 pont)
Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek Az egyenlet egyetlen megoldása a **–16**, hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

b) A baloldalon a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést elvégezve kapjuk:
$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x$ (1 pont)
$\cos^2 x + 2\cos x = 0$ (1 pont)
$\cos x(\cos x + 2) = 0$ (1 pont)

Ha $\cos x = 0$, akkor $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$, ahol $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$. (2 pont)

A $\cos x + 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása (mert $\cos x = -2$ nem lehetséges). (1 pont)
Összesen: 12 pont

12) Határozza meg a radiánban megadott $\alpha = \frac{\pi}{4}$ szög nagyságát fokban! (2 pont)

***Megoldás*:**

$\alpha = 45^\circ$ (2 pont)

13)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

Megoldás:

a) Ha $x < 3$, akkor ($3 - x > 0$, ezért) $x + 2 \geq 0$, vagyis $x \geq -2$. (2 pont)
A 3-nál kisebb számok halmazán tehát a $[-2;3[$ intervallum minden eleme megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
Ha $x > 3$, akkor ($3 - x < 0$, ezért) $x + 2 \leq 0$, vagyis $x \leq -2$. (2 pont)
A 3-nál nagyobb számok halmazában nincs ilyen elem, tehát a 3-nál nagyobb számok között nincs megoldása az egyenlőtlenségnek. (1 pont)
A megoldáshalmaz: $[-2;3[$. (1 pont)

b) $5 \cdot 3^x = 20$ (1 pont)
$3^x = 4$ (1 pont)
$x = \log_3 4$ (1 pont)
$x \approx 1{,}2619$ (1 pont)

c) (A megadott egyenlet cos x-ben másodfokú,) így a megoldóképlet felhasználásával (1 pont)
$\cos x = 0{,}5$ vagy $\cos x = -2$. (2 pont)
Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum). (1 pont)
A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

14) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség!

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ (2 pont)

Megoldás:

$\alpha_1 = 60°$ (1 pont)

$\alpha_2 = 300°$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

15) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség! (2 pont)

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Megoldás:

A számológépbe beírva 1 megoldást kapunk

$\alpha_1 = 45^\circ$ (1 pont)

Viszont van egy másik megoldás is

$180^\circ - \alpha_1 = \alpha_2 \quad \alpha_2 = 135^\circ$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

16) Oldja meg a $[-\pi;\pi]$ zárt intervallumon a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletet! (2 pont)

***Megoldás*:**

$x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ (2 pont)

17)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$ **(6 pont)**

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

III) A $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

Megoldás:

a) (A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos\alpha$ (1 pont)

Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, (1 pont)

azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = 60^\circ$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{\pi}{3}$, vagy $x = \frac{5\pi}{3}$. (2 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{2\pi}{3}$, vagy $x = \frac{4\pi}{3}$. (2 pont)

c)

I) **igaz**
II) **hamis**
III) **hamis** (2 pont)

Összesen: 12 pont

18) Adja meg a következő egyenlet $[0;2\pi]$ intervallumba eső megoldásának pontos értékét!

$$\sin x = -1$$ **(2 pont)**

Megoldás:

$x = \frac{3}{2}\pi$ (2 pont)

19) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1+\cos x$ függvény értékkészletét! **(2 pont)**

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[0;2]$ (2 pont)

20) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 1+\sin x$ függvény értékkészletét! **(2 pont)**

Megoldás:

Felírjuk a $\sin x$ függvény értékkészletét.
$-1 \le \sin x \le 1$
Ha az így kapott egyenlőtlenség minden oldalához hozzáadunk egyet, megkapjuk az $1+\sin x$ függvény értékkészletét.
$0 \le 1+\sin x \le 2$ (2 pont)
Tehát a megoldás $[0;2]$.

Összesen: 2 pont

21) Oldja meg a $\sin x = 1$ egyenletet a valós számok halmazán! **(2 pont)**

Megoldás:

$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

22) Mely x-ekhez rendel a $[0;2\pi]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto \cos x$ függvény $\frac{1}{2}$-et? **(2 pont)**

Megoldás:

$x_1 = \frac{\pi}{3}$ és $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

23) Oldja meg az alábbi egyenletet a $[0;2\pi]$ intervallumon! **(2 pont)**

$$\cos x = 0,5$$

Megoldás:

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

Valószínűségszámítás
Megoldások

1) Egy rendezvényen 150 tombolajegyet adtak el. Ági 21-et vásárolt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Ági nyer, ha egy nyereményt sorsolnak ki? (A jegyek nyerési esélye egyenlő.) (2 pont)

Megoldás:

$\frac{21}{150} = 14\% = \mathbf{0,14}$ (2 pont)

2) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.
Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.

a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)

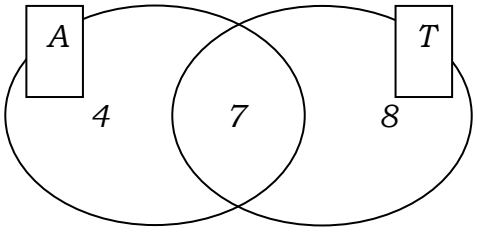
Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

b) A feladat szövege alapján töltse ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)

c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

Megoldás:

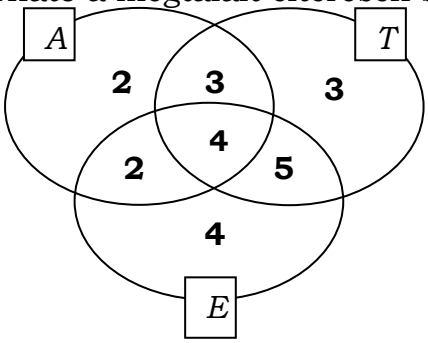


a) (2 pont)

Legalább az egyikük által észrevett eltérések száma: $4+7+8=19$ (1 pont)

Egyikük sem vett észre $23-19=\mathbf{4}$ eltérést. (1 pont)

(Halmazábra nélkül is felírható a megtalált eltérések száma.)



b) (7 pont)

c) **Van olyan eltérés, amit Enikő nem talált meg**.
VAGY: **Enikő nem minden eltérést talált meg**.
VAGY: **Enikő nem találta meg az összes eltérést**. (2 pont)

d) A kedvező esetek száma: 14. (1 pont)
Az összes esetek száma: 23. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{14}{23} \approx \mathbf{0,61}$ vagy 61 %. (2 pont)

Összesen: 17 pont

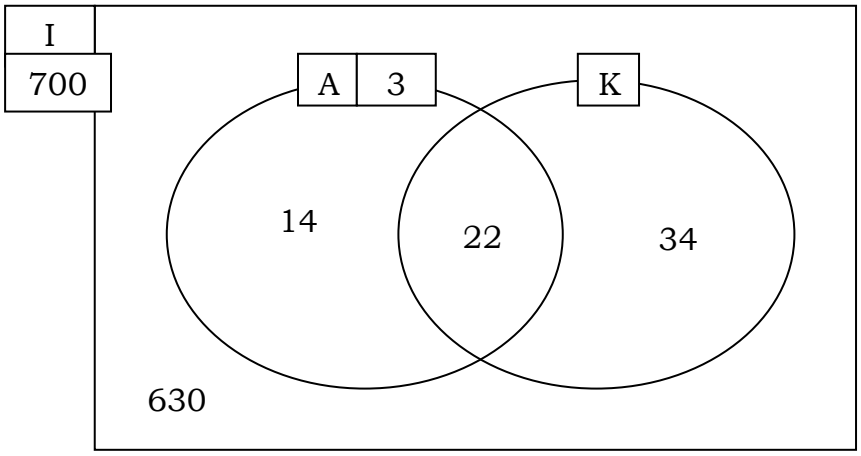
3) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai szakosztály közül legalább az egyikben. Az atlétika szakosztályban 36 tanuló sportol rendszeresen, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda szakosztály munkájában is részt vesz.

a) Készítsen halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak feltüntetésével! (4 pont)

b) Hányan sportolnak a kosárlabda szakosztályban? (4 pont)

c) Egy másik iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is? (4 pont)

Megoldás:



a) (4 pont)

b) 36 atlétából 22 kosarazik is, tehát 14-en csak atletizálnak. (1 pont)
70 tanuló sportol összesen, tehát 34 fő csak kosarazik. (2 pont)
$22+34=$ **56 tanuló kosarazik**. (1 pont)

c) A klasszikus modell alkalmazható, 50 kosaras közül választunk. (1 pont)
17 fő atletizál is. (Ezek a kedvező esetek.) (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{17}{50} = \mathbf{0,34}$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

4) Egy öttagú társaság egymás után lép be egy ajtón. Mekkora a valószínűsége, hogy Anna, a társaság egyik tagja, elsőnek lép be az ajtón? (2 pont)

Megoldás:

5 ember léphet be az ajtón elsőnek (összes eset). Ha Anna lép be elsőnek, az 1 féle képpen lehetséges (kedvező eset).

Anna $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ valószínűséggel lép be elsőnek. (2 pont)

5) Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.

a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak? (4 pont)

b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás? (4 pont)

c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet? (3 pont)

d) Kis Anna a döntő egyik résztvevője. Ha feltesszük, hogy a résztvevők egyenlő eséllyel versenyeznek, mekkora a valószínűsége, hogy Kis Anna eléri a három, dobogós hely egyikét, illetve hogy az öt rangsorolt személy egyike lesz? (6 pont)

Megoldás:

a) $\binom{20}{5}$-féle (3 pont)

15504 jutalmazási sorrend lehetséges. (1 pont)

b) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$, (3 pont)

azaz 1860480 jutalmazási sorrend lehetséges. (1 pont)

c) $\mathbf{5! = 120}$-féle kiosztás lehetséges. (3 pont)

d) Bármelyik helyezés elérésének a versenyen $\frac{1}{20}$ a valószínűsége, (1 pont)

a három, dobogós hely valamelyikének elérése $\frac{3}{20}$ valószínűségű, (2 pont)

mert ezek egymást kizáró események. (1 pont)

Az öt rangsorolt esemény egyikének elérése $\frac{5}{20}\left(=\mathbf{\frac{1}{4}}\right)$ valószínűségű. (2 pont)

Összesen: 17 pont

6) Egy televíziós játékban 5 kérdést tehet fel a játékvezető. A játék során a versenyző, ha az első kérdésre jól válaszol, 40 000 forintot nyer. Minden további kérdés esetén döntenie kell, hogy a játékban addig megszerzett pénzének 50, 75 vagy 100 százalékát teszi-e fel. Ha jól válaszol, feltett pénzének kétszeresét kapja vissza, ha hibázik, abba kell hagynia a játékot, és a fel nem tett pénzét viheti haza.

a) Mennyi pénzt visz haza az a játékos, aki mind az öt feltett kérdésre jól válaszol, s bátran kockáztatva mindig a legnagyobb tétet teszi meg? (4 pont)

b) Az a játékos, aki mindig helyesen válaszol, de óvatos, és a négy utolsó fordulóban pénzének csak 50%-át teszi fel, hány forintot visz haza? (4 pont)

c) A vetélkedő során az egyik versenyző az első négy kérdésre jól válaszolt. A második kérdésnél a pénzének 100 %-át, a 3., 4. és 5. kérdés esetén pénzének 75 %-át tette fel. Az 5. kérdésre sajnos rosszul válaszolt. Hány forintot vihetett haza ez a játékos? (5 pont)

d) Egy versenyző mind az 5 fordulóban jól válaszol, és közben minden fordulóban azonos eséllyel teszi meg a játékban megengedett lehetőségek valamelyikét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elnyerhető maximális pénzt viheti haza? (4 pont)

Megoldás:

a) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig megduplázódik, így a végén $40000 \cdot 2^4 = \mathbf{640000}$ forint a nyeremény. (4 pont)

b) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy fordulóban a pénze mindig másfélszereződik, így a végén $40000 \cdot 1{,}5^4 = \mathbf{202500}$ forint a nyeremény. (4 pont)

c) Az első nyereménye 40 000 forint, a további négy forduló végére $40000 \cdot 2^1 \cdot 1{,}75^2 \cdot 0{,}25 = \mathbf{61250}$ forint a nyeremény. (5 pont)

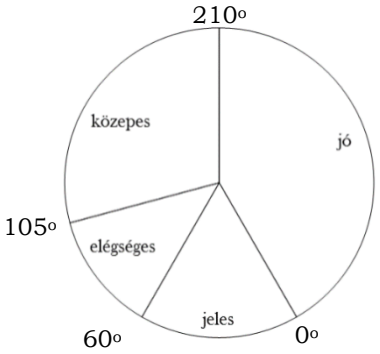
d) Az összes esetek száma a 4 utolsó fordulóban $3^4 = 81$. (2 pont)
A kedvező esetek száma 1. (1 pont)
A keresett valószínűség (a klasszikus modell szerint): $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{81}} \approx \mathbf{0{,}012}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

7) A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.

a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották? (3 pont)

b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:
Adja meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket! Válaszát foglalja táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltesse oszlop-diagramon is! (6 pont)



c) Az összes megírt dolgozatból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy jeles vagy jó dolgozatot veszünk a kezünkbe? (3 pont)

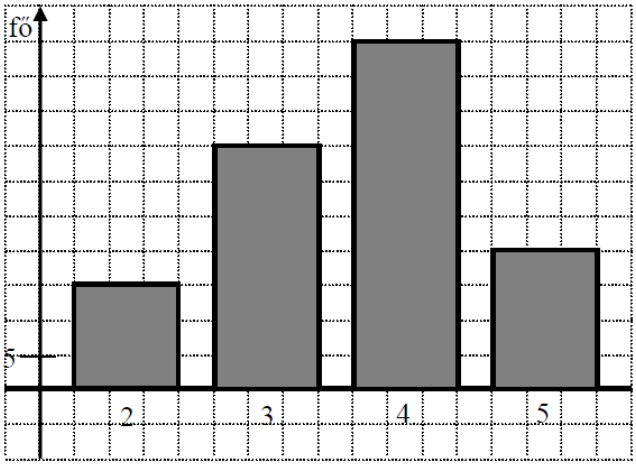
Megoldás:

a) Az összes képezhető kódok száma 5!. (2 pont)
120 tanuló írt dolgozatot. (1 pont)

b)

jegyek	2	3	4	5
fok	45°	105°	150°	60°
fő	**15**	**35**	**50**	**20**

(4 pont)



(2 pont)

c) A 4-es és az 5-ös dolgozatok száma összesen: 70. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{70}{120} = \frac{7}{12} \approx 0,583$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

8) Egy kétforintos érmét kétszer egymás után feldobunk, és feljegyezzük az eredményt. Háromféle esemény következhet be:
***A* esemény: két fejet dobunk.**
***B* esemény: az egyik dobás fej, a másik írás.**
***C* esemény: két írást dobunk.**
Mekkora a *B* esemény bekövetkezésének valószínűsége? (2 pont)

Megoldás:

B esemény valószínűsége: $\frac{1}{2}$ (2 pont)

9) A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

Megoldás:

Összesen 16 db hattal osztható szám van a megadott tartományban, közülük 4 db osztható 8-cal. (2 pont)

A valószínűség $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

10) Egy dobozban húsz golyó van, aminek 45 százaléka kék, a többi piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha találomra egy golyót kihúzunk, akkor az piros lesz? (3 pont)

Megoldás:

A kék golyók száma: 9. (1 pont)

A piros golyók száma: 11. (1 pont)

$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset}} = \frac{11}{20} = 0,55$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Egy tanulmányi verseny döntőjében 8 tanuló vett részt. Három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladat maximálisan elérhető pontszáma 40, a másodiké 50, a harmadiké 60. A nyolc versenyző feladatonkénti eredményeit tartalmazza az alábbi táblázat:

Versenyző sorszáma	I.	II.	III.	Összpontszám	Százalékos teljesítmény
1.	28	16	40		
2.	31	35	44		
3.	32	28	56		
4.	40	42	49		
5.	35	48	52		
6.	12	30	28		
7.	29	32	45		
8.	40	48	41		

a) Töltse ki a táblázat hiányzó adatait! A százalékos teljesítményt egészre kerekítve adja meg!
Melyik sorszámú versenyző nyerte meg a versenyt, ki lett a második, és ki a harmadik helyezett? (5 pont)

b) A nyolc versenyző dolgozata közül véletlenszerűen kiveszünk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 75 %-osnál jobb teljesítményű dolgozat került a kezünkbe? (2 pont)

c) Egy tanuló betegség miatt nem tudott megjelenni a döntőn. Másnap megkapta, és megoldotta a feladatokat. Eredményét később összehasonlította a nyolc döntős versenyző eredményével. Észrevette, hogy az első feladatot a versenyzők I. feladatra kapott pontszámainak a mediánjára teljesítette (egészre kerekítve), a második feladatot pedig a nyolc versenyző II. feladata pontszámainak a számtani közepére (szintén egészre kerekítve). A III. feladatot 90 %-ra teljesítette.
Mennyi lett ennek a tanulónak az összpontszáma? Ezzel hányadik helyen végzett volna? (5 pont)

Megoldás:

a)

Versenyző sorszáma	I.	II.	III.	Összpontszám	Százalékos teljesítmény
1.	28	16	40	**84**	**56**
2.	31	35	44	**110**	**73**
3.	32	28	56	**116**	**77**
4.	40	42	49	**131**	**87**
5.	35	48	52	**135**	**90**
6.	12	30	28	**70**	**47**
7.	29	32	45	**106**	**71**
8.	40	48	41	**129**	**86**

(2+2 pont)

1. helyezett: 5. sorszámú versenyző;
2. helyezett: 4. sorszámú versenyző;
3. helyezett: 8. sorszámú versenyző. (1 pont)

b) Mivel a 8 dolgozat között 4 darab dolgozat eredménye volt 75% felett, a keresett valószínűség: $\frac{4}{8} = 0{,}5\ (50\,\%)$. (2 pont)

c) Az I. feladat pontszámainak mediánja: 31,5 (ami kerekítve 32), (1 pont)
a II. pontszámainak számtani közepe: $\frac{279}{8} = 34,875$ (ami kerekítve 35) (1 pont)
III. feladat a 60 pont 90%-a: 54 pont. (1 pont)
A megfelelő kerekítéseket elvégezve, összesítve $32+35+54=121$pont, (1 pont)
ami a **4. helyezést** jelenthette volna. (1 pont)

Összesen: 12 pont

12) Egy gimnáziumban 50 diák tanulja emelt szinten a biológiát. Közülük 30-an tizenegyedikesek és 20-an tizenkettedikesek. Egy felmérés alkalmával a tanulóktól azt kérdezték, hogy hetente átlagosan hány órát töltenek a biológia házi feladatok megoldásával. A táblázat a válaszok összesített eloszlását mutatja.

A biológia házi feladatok megoldásával hetente eltöltött órák száma*	**0-2**	**2-4**	**4-6**	**6-8**	**8-10**
Tanulók száma	**3**	**11**	**17**	**15**	**4**

*** A tartományokhoz az alsó határ hozzátartozik, a felső nem.**

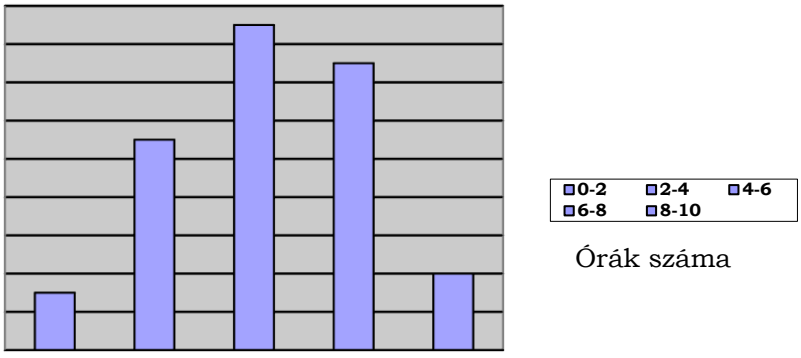
a) Ábrázolja oszlopdiagramon a táblázat adatait! (3 pont)
b) Átlagosan hány órát tölt a biológia házi feladatok megoldásával hetente ez az 50 tanuló? Az egyes időintervallumok esetében a középértékekkel (1, 3, 5, 7 és 9 órával) számoljon! (3 pont)

Egy újságíró két tanulóval szeretne interjút készíteni. Ezért a biológiát emelt szinten tanuló 50 diák névsorából véletlenszerűen kiválaszt két nevet.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik kiválasztott tanuló tizenegyedikes, a másik pedig tizenkettedikes? (6 pont)
d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét kiválasztott tanuló legalább 4 órát foglalkozik a biológia házi feladatok elkészítésével hetente? (5 pont)

Megoldás:

a)



(3 pont)

b) A középértékekkel számított átlag: $\frac{3\cdot 1+11\cdot 3+17\cdot 5+15\cdot 7+4\cdot 9}{50}=\frac{262}{50}$ (2 pont)

$=5,24$ **A tanulók tehát átlagosan 5,24 órát ($\approx$ 5 óra 14 perc) töltenek a biológia házi feladatok megoldásával hetente.** (1 pont)

c) 50 tanuló közül $\binom{50}{2}=\frac{50\cdot 49}{2}=1225$–féleképpen lehet két tanulót kiválasztani. (2 pont)

A két évfolyamból 30, illetve 20-féleképpen lehet egy-egy tanulót kiválasztani, így a kedvező esetek száma: $30\cdot 20=600$. (2 pont)

A kérdéses valószínűség: $\boldsymbol{p=\frac{600}{1225}=\frac{24}{49}}$ (2 pont)

d) Hetente legalább 4 órát 36 tanuló tölt a biológia házi feladatok megoldásával. (1 pont)

Közülük két tanulót $\binom{36}{2}=\frac{35\cdot 36}{2}=630$–féleképpen lehet kiválasztani. (2 pont)

Így a keresett valószínűség: $\boldsymbol{p=\frac{630}{1225}=\frac{18}{35}}$ (2 pont)

Összesen: 17 pont

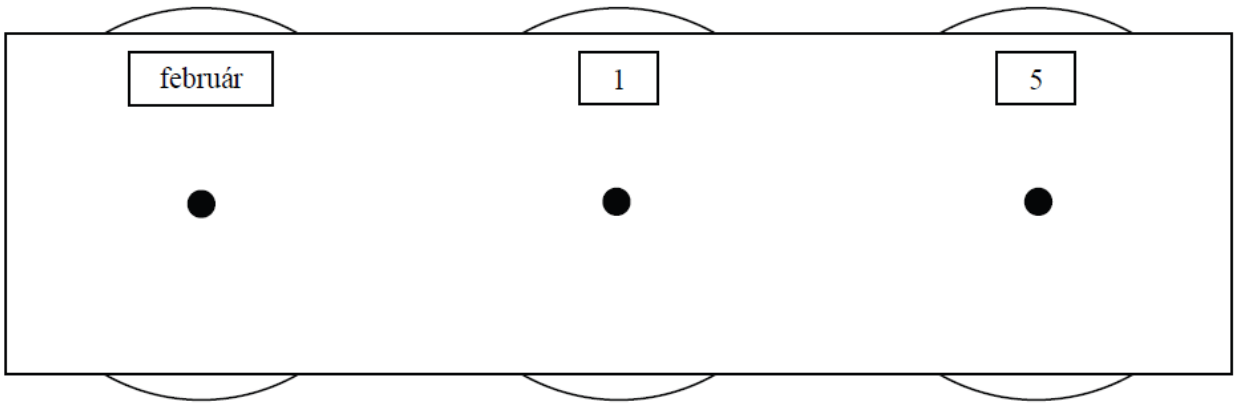
13) Az iskola rajztermében minden rajzasztalhoz két széket tettek, de így a legnagyobb létszámú osztályból nyolc tanulónak nem jutott ülőhely. Minden rajzasztalhoz betettek egy további széket, és így hét üres hely maradt, amikor ebből az osztályból mindenki leült.

a) Hány rajzasztal van a teremben? Hányan járnak az iskola legnagyobb létszámú osztályába? (6 pont)

A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3; a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3, ...8, 9 számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat".

b) Összesen hány „dátum" forgatható ki? (3 pont)

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen megforgatva olyan dátumot kapunk, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév. (3 pont)



Megoldás:

a) A teremben x rajzasztal van, és az osztály létszáma y. (1 pont)
$2x + 8 = y$ (1 pont)
$3x - 7 = y$ (1 pont)
$x = 15$ és $y = 38$ (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)
15 asztal van a teremben, és a kérdéses osztálylétszám 38 fő. (1 pont)

b) A lehetséges „dátumok” száma: $12 \cdot 4 \cdot 10$, (2 pont)
tehát **480 „dátum” forgatható ki.** (1 pont)

c) Valóságos dátumból nem szökőévben 365 van, (1 pont)
minden lehetséges „dátum” egyenlő valószínűséggel forgatható ki*, ezért valóságos dátumot $\frac{\mathbf{365}}{\mathbf{480}}\mathbf{(= 0,7604)}$ valószínűséggel kapunk. (2 pont)

Összesen: 12 pont

14) Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3 pont)

b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3 pont)

Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon minden nap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.

c) Hány nap alatt készült el a 2 méter hosszúra tervezett sál? (11 pont)

Megoldás:

a) A lehetséges sorrendek száma: 5! (2 pont)
Az unokák 120-féle sorrendben kaphatják meg a levelet. (1 pont)

b) Az 5. hétre az 5 unoka bármelyike egyenlő valószínűséggel kerül. (2 pont)
A keresett valószínűség tehát: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ (1 pont)

c) Az egyes napokon kötött darabok hosszúságai mértani sorozatot alkotnak. (1 pont)
A mértani sorozatban $a_1 = 8$, $q = 1,2$ (2 pont)
A sál teljes hossza a mértani sorozat első n elemének összegeként adódik. (1 pont)

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (1 pont)

$200 = 8 \cdot \frac{1,2^n - 1}{0,2}$ (1 pont)

$5 + 1 = 1,2^n$ (1 pont)

$n = \frac{\lg 6}{\lg 1,2}$ (2 pont)

$n \approx 9{,}83$ (1 pont)

A sál a tizedik napon készül el. (1 pont)

Összesen: 17 pont

15) Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A, a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl. ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez).

a) Töltse ki az első forduló táblázatának hiányzó adatait! (4 pont)

Első forduló eredményei	**1. kérdés**	**2. kérdés**	**3. kérdés**	**4. kérdés**
Anikó válasza	**helyes**	**hibás**	**helyes**	
Jó válaszok száma	**7**	**10**		**8**
Anikó elért pontszáma			**5**	**0**

b) Hány százalékkal növekedett volna Anikó összpontszáma az első fordulóban, ha a második kérdésre is jól válaszolt volna? (A többi játékos válaszát változatlannak képzeljük.) (3 pont)

c) Ha Anikó valamelyik másik fordulóban mind a négy kérdésre találomra válaszol, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden válasza helyes? (3 pont)

d) Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre kapott összpontszáma a lehető legtöbb legyen? (7 pont)

Megoldás:

a)

Első forduló eredményei	1. kérdés	2. kérdés	3. kérdés	4. kérdés
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	**hibás**
Jó válaszok száma	7	10	**15**	8
Anikó elért pontszáma	**13**	**0**	5	0

(4 pont)

b) A 2. kérdés oszlopa így módosul: helyes, 11, 9; Anikó tehát 9 pontot kapott. (1 pont)

Anikó elért pontszáma ezzel 27 lesz. Ez a régi pontszám 150 százaléka, (1 pont)

tehát a **pontszám 50%-kal emelkedett volna.** (1 pont)

c) Anikó összesen $3^4 = 81$ módon válaszolhat a négy kérdésre. (2 pont)

Egyetlen esetben lesz minden válasza helyes, ezért a keresett valószínűség: $\frac{1}{81}$ (1 pont)

d) Ha x jó válasz születik a vizsgált kérdésre, akkor a jól válaszolók $20-x$ pontot kapnak személyenként. (1 pont)
Az elért összpontszám: $x(20-x)$. (2 pont)

Az $x \mapsto 20x - x^2$ függvény maximumát keressük a 20-nál kisebb pozitív egészek körében. A maximum hely (akár grafikusan, akár teljes négyzetté való kiegészítéssel, akár a számtani-mértani közép összefüggésre való hivatkozással, akár az esetek végigszámolásával) $x = 10$. (3 pont)
Tíz játékos helyes válasza esetén lesz a játékosok összpontszáma a lehető legtöbb. (1 pont)

Összesen: 17 pont

16) Péter egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számra gondolt. Ezen kívül azt is megmondta Pálnak, hogy a gondolt szám 20-szal osztható. Mekkora valószínűséggel találja ki Pál elsőre a gondolt számot, ha jól tudja a matematikát? (2 pont)

Megoldás:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$ (2 pont)

17) Egy szerencsejáték a következőképpen zajlik:
A játékos befizet 7 forintot, ezután a játékvezető feldob egy szabályos dobókockát. A dobás eredményének ismeretében a játékos abbahagyhatja a játékot; ez esetben annyi Ft-ot kap, amennyi a dobott szám volt.
Dönthet azonban úgy is, hogy nem kéri a dobott számnak megfelelő pénzt, hanem újabb 7 forintért még egy dobást kér. A játékvezető ekkor újra feldobja a kockát. A két dobás eredményének ismeretében annyi forintot fizet ki a játékosnak, amennyi az első és a második dobás eredményének szorzata. Ezzel a játék véget ér.
Zsófi úgy dönt, hogy ha 3-nál kisebb az első dobás eredménye, akkor abbahagyja, különben pedig folytatja a játékot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Zsófi tovább játszik? (4 pont)

b) Zsófi játékának megkezdése előtt számítsuk ki, mekkora valószínűséggel fizet majd neki a játékvezető pontosan 12 forintot? (6 pont)

Barnabás úgy dönt, hogy mindenképpen két dobást kér majd. Áttekinti a két dobás utáni lehetséges egyenlegeket: a neki kifizetett és az általa befizetett pénz különbségét.

c) Írja be a táblázat üres mezőibe a két dobás utáni egyenlegeket! (4 pont)

		második dobás eredménye					
		1	2	3	4	5	6
első dobás eredménye	1	-13					
	2						
	3						
	4						10
	5						
	6						

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Barnabás egy (két dobásból álló) játszmában nyer? (3 pont)

Megoldás:

a) A kedvező esetek száma 4. (Zsófi akkor folytatja a játékot, ha a dobott szám 3, 4, 5 vagy 6.) (2 pont)
Az összes eset száma 6. (1 pont)
A valószínűség: $\frac{4}{6}\left(=\frac{2}{3}\right)$ (1 pont)

b) Összesen 36 (egyenlően valószínű) lehetőség van. (1 pont)
Egy játékos 12 forintot kap, ha a következő dobáspárok lépnek fel: $(2;6)$, $(3;4)$, $(4;3)$, $(6;2)$. (2 pont)
Az első eset nem lehet, mert akkor Zsófi nem játszik tovább. (1 pont)
Tehát a kedvező esetek száma 3. (1 pont)
A 12 forint kifizetésének valószínűsége: $\frac{3}{36}\left(=\frac{1}{12}\right)$ (1 pont)

c)

		második dobás eredménye					
		1	2	3	4	5	6
első dobás eredménye	1	-13	**-12**	**-11**	**-10**	**-9**	**-8**
	2	**-12**	**-10**	**-8**	**-6**	**-4**	**-2**
	3	**-11**	**-8**	**-5**	**-2**	**1**	**4**
	4	**-10**	**-6**	**-2**	**2**	**6**	10
	5	**-9**	**-4**	**1**	**6**	**11**	**16**
	6	**-8**	**-2**	**4**	**10**	**16**	**22**

(4 pont)

d) Barnabás akkor nyer, ha egyenlege pozitív. (1 pont)
13 esetben pozitív az eredmény. (1 pont)
Barnabás $\frac{13}{36}$ valószínűséggel nyer. (1 pont)

Összesen: 17 pont

18) Az autókereskedés parkolójában 1–25-ig számozott hely van. Minden beérkező autó véletlenszerűen kap parkolóhelyszámot.

a) Az üres parkolóba elsőként beparkoló autó vezetőjének szerencseszáma a 7. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott parkolóhelyszámnak van hetes számjegye, vagy a szám hétnek többszöröse? (4 pont)

Május 10-én az üres parkolóba 25 kocsi érkezik: 12 ezüstszínű ötajtós, 4 piros négyajtós, 2 piros háromajtós és 7 zöld háromajtós.

b) Az üres parkolóba már beálltak a négy és ötajtós autók. Hányféleképpen állhatnak be az üresen maradt helyekre a háromajtósak? (Az azonos színű autókat nem különböztetjük meg egymástól.) (5 pont)

A május 10-re előjegyzett 25 vevő az autó színére is megfogalmazta előzetesen a kívánságait. Négyen zöld kocsit rendeltek, háromnak a piros szín kivételével mindegyik megfelel, öten akarnak piros vagy ezüst kocsit, tízen zöldet vagy pirosat. Három vevőnek mindegy, milyen színű kocsit vesz.

c) Színek szempontjából kielégíthető-e a május 10-re előjegyzett 25 vevő igénye az aznap reggel érkezett autókkal? (8 pont)

Megoldás:

a) A 25 parkolóhely közül 4 „szerencsés” van:
a 7-es; a 17-es; a 14-es és a 21-es. (2 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{4}{25}(=0{,}16)$ (2 pont)

b) 9 betöltendő hely marad. (1 pont)

A 2 piros autó $\binom{9}{2}$-féleképpen állhat be, ezzel a zöld autók helye is eldőlt. (3 pont)

A lehetséges elhelyezkedések értéke **36**. (1 pont)

c) Nézzük a zöld színt választókat! 4-en zöld kocsit rendeltek, és ezen kívül 10-en zöldet vagy pirosat. Mivel 6 db piros kocsi van, a zöldet vagy pirosat választó 10 vevő közül legalább 4-nek zöld kocsit kellene adni. (4 pont)
Zöld kocsiból viszont csak 7 db érkezik aznap, így a zöld kocsit választó vevők igényeit **nem lehet kielégíteni**, akárhogy is osztjuk a többi autót. (4 pont)

Összesen: 17 pont

19) Egy vetélkedőn részt vevő versenyzők érkezéskor sorszámot húznak egy urnából. Az urnában 50 egyforma gömb van. Minden egyes gömbben egy-egy szám van, ezek különböző egész számok 1-től 50-ig.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az elsőnek érkező versenyző héttel osztható sorszámot húz? (3 pont)

A vetélkedő győztesei között jutalomként könyvutalványt szerettek volna szétosztani a szervezők. A javaslat szerint Anna, Bea, Csaba és Dani kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően $1:2:3:4$. Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalom ötödét szánták, önként lemond az utalványról. A zsűri úgy döntött, hogy a neki szánt 16000 forintos utalványt is szétosztják a másik három versenyző között úgy, hogy az ő jutalmaik közötti arány ne változzon.

b) Összesen hány forint értékű könyvutalványt akartak a szervezők szétosztani a versenyzők között, és ki mondott le a könyvutalványról? (6 pont)

c) Hány forint értékben kapott könyvutalványt a jutalmat kapott három versenyző külön-külön? (3 pont)

Megoldás:

a) Mivel 1-50-ig 7 darab 7-tel osztható szám van, (1 pont)

az első versenyző $\frac{7}{50}$ valószínűséggel húz 7-tel osztható számot. (2 pont)

b) Ha a jutalom ötödrésze 16000 forint, akkor a teljes jutalmat **80000 forint**ra tervezték. (2 pont)

Az arányok szerint 1 egység a teljes jutalom 10-ed része, (1 pont)

egy egység 8000 forintot ér. (1 pont)

Bea kapott volna 16000 forintot, így ő mondott le a jutalomról. (2 pont)

c) Mivel $1:3:4$ arányban osztották szét a könyvutalványokat, (1 pont)
Anna 10000, Csaba 30000, Dani pedig 40000 forint értékben kapott könyvutalványt. (2 pont)

Összesen: 12 pont

20) Egy zsákban nyolc fehér golyó van. Hány fekete golyót kell a zsákba tenni, -hogy véletlenszerűen kiválasztva egy golyót-, fehér golyó kiválasztásának 0,4 legyen a valószínűsége, ha bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel választjuk? (2 pont)

Megoldás:

A fekete golyók száma: **12**. (2 pont)

21) Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával egyszerre dob. Feljegyzi azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett kétjegyű szám
a) négyzetszám; (3 pont)
b) számjegyei megegyeznek; (3 pont)
c) számjegyeinek összege legfeljebb 9? (6 pont)

Megoldás:

a) A dobható négyzetszámok: 16, 25, 36, 64. (1 pont)
Összesen 36 különböző kétjegyű számot kaphat. (1 pont)
A keresett valószínűség $P = \frac{1}{9}\left(\approx 0{,}111\right)$ (1 pont)

b) Az egyes helyiértéken 6-féle, ettől függetlenül a tízes helyiértéken is 6-féle számot kaphat. (1 pont)
A számjegyek 6 esetben egyeznek meg, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)
A valószínűség $\frac{1}{6}$ (1 pont)

c) A számjegyek összege legfeljebb 9:
11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63 számok esetében. (4 pont)
A kedvező esetek száma: 30. (1 pont)
A valószínűség: $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ (1 pont)
A valószínűség kiszámítható a komplementer esemény valószínűségének meghatározásával is.

Összesen: 12 pont

22) Az alábbi kilenc szám közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám nem negatív?
–3,5; –5; 6; 8,4; 0; –2,5; 4; 12; –11. (2 pont)

Megoldás:

$P = \frac{5}{9}\left(\approx 0{,}56;\ 56\%\right)$ (2 pont)

23) A héten az ötös lottón a következő számokat húzták ki: 10, 21, 22, 53 és 87. Kata elújságolta Sárának, hogy a héten egy két találatos szelvénye volt. Sára nem ismeri Kata szelvényét, és arra tippel, hogy Kata a 10-est és az 53-ast találta el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Sára tippje helyes? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Sárának összesen $\binom{5}{2}$, azaz 10 féle tippje lehet (és ezek mindegyike ugyanakkora valószínűségű). (1 pont)

Ezek közül a $\{10;53\}$ pár a helyes. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{1}{10}\left(=0{,}1=10\%\right)$ (1 pont)

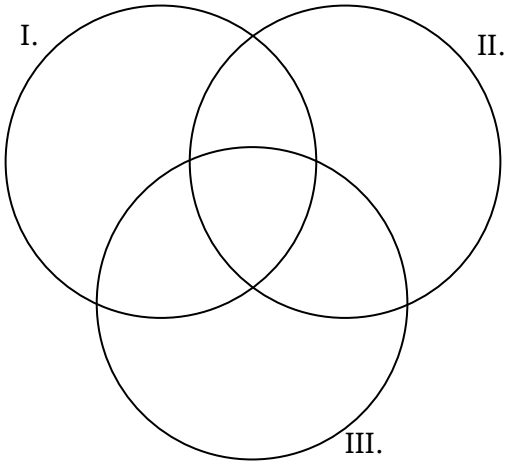
Összesen: 3 pont

24) Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg:

I. Diákok Hangja
II. Iskolaélet
III. Miénk a suli!

Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében.

A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a suli! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5 %-a olvasta.



a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt? (2 pont)

b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát! (6 pont)

c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt? (2 pont)

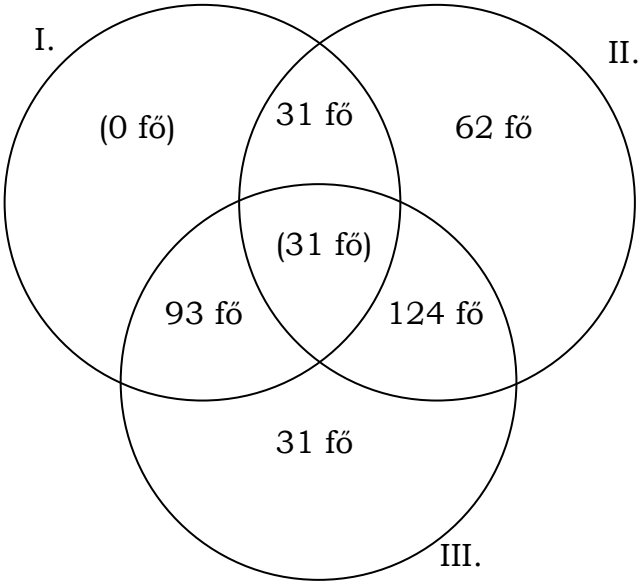
Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélet című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az Iskolaéletet? (7 pont)

Megoldás:

a) **31 tanuló** olvasta mindhárom kiadványt. (2 pont)

b)



(6 pont)

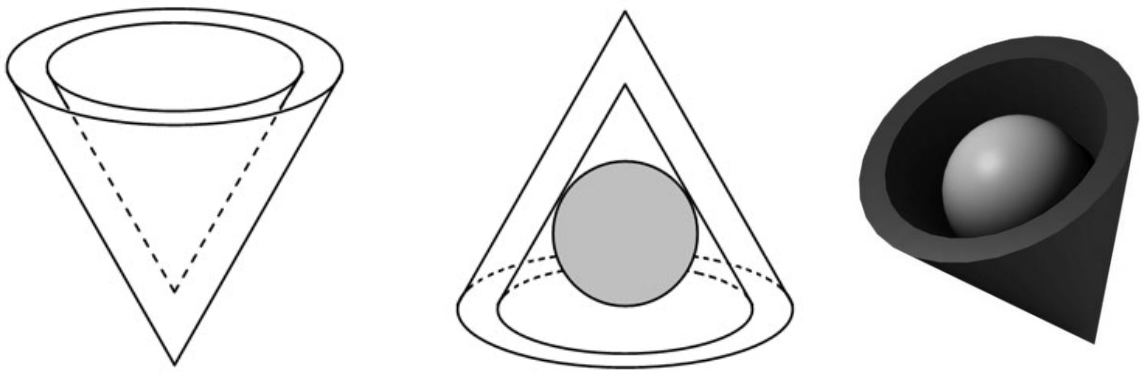
c) (372 fő, tehát) a tanulók **60%**-a olvasta legalább az egyik kiadványt. (2 pont)

d) 84 fő látogatta, 42 fő nem látogatta a rendezvényeket. (1 pont)
Közülük 28 fő, illetve 21 fő olvasta az Iskolaéletet. (1 pont)
A két megkérdezett diák $\binom{126}{2}$–féleképpen választható ki (összes eset). (1 pont)
A rendezvényt látogatók közül $\binom{28}{1}$-féle olyan diák, a nem látogatók közül $\binom{21}{1}$-féle olyan diák választható, aki olvasta az Iskolaéletet. (1 pont)
A kedvező esetek száma tehát $28 \cdot 21$. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{28 \cdot 21}{\binom{126}{2}} \approx$ (1 pont)

$\approx \mathbf{0,075}(=\mathbf{7,5}\%)$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

25) Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. A desszert csokoládéból készült váza olyan, mint egy tölcsér. (Lásd ábra.)
A külső és belső kúp hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{6}{5}$ A kisebb kúp adatai: alapkörének sugara 1 cm, magassága 2,5 cm hosszú.



a) Hány cm³ csokoládét tartalmaz egy ilyen csokoládéváz? A választ tizedre kerekítve adja meg! (5 pont)

Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek, ezután egy csokoládéból készült vékony körlemezzel lezárják a kúpot.

b) Hány cm a sugara a lehető legnagyobb méretű ilyen marcipángömbnek? A választ tizedre kerekítve adja meg! (7 pont)

A marcipángömböket gyártó gép működése nem volt hibátlan. A mintavétellel végzett minőség-ellenőrzés kiderítette, hogy a legyártott gömbök 10%-ában a marcipángömb mérete nem felel meg az előírtnak.

c) A már legyártott nagy mennyiségű gömb közül 10-et kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között pontosan 4-nek a mérete nem felel meg az előírásnak? (A kérdezett valószínűség kiszámításához használhatja a binomiális eloszlás képletét.) (5 pont)

Megoldás:

a) Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyezik meg. (1 pont)

$V_{\text{külső}} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot V_{\text{belső}}$ (1 pont)

$V_{\text{belső}} = \frac{1^2 \cdot \pi \cdot 2{,}5}{3} \left(\approx 2{,}62 \text{ cm}^3\right)$ (1 pont)

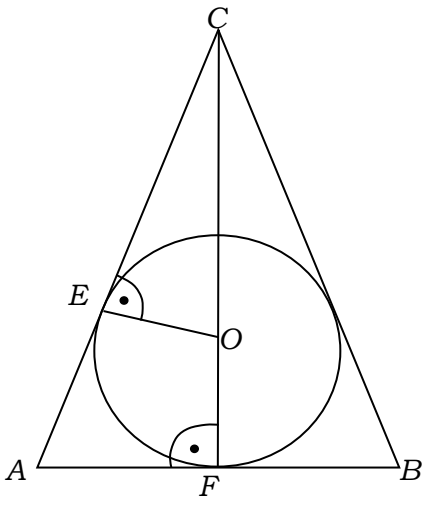
$V_{\text{külső}} = \left(\frac{6}{5}\right)^3 \cdot V_{\text{belső}} \left(\approx 4{,}52 \text{ cm}^3\right)$ (1 pont)

$V_{\text{külső}} - V_{\text{belső}} \approx 1{,}9 \text{ cm}^3$ (1 pont)

Egy csokoládéváz kb. **1,9 cm³** csokoládét tartalmaz.

b) A legnagyobb sugarú gömb a belső kúp beírt gömbje. (1 pont)

A kúp és a beírt gömbjének tengelymetszete egy egyenlő szárú háromszög (amelynek alapja 2 cm, magassága 2,5 cm hosszú), illetve annak a beírt köre. (1 pont)



Az ábra jelöléseit használva: *AFC* háromszög hasonló az *OEC* háromszöghöz, ezért

$\frac{AF}{AC} = \frac{OE}{OC}$ (1 pont)

(Alkalmazva Pitagorasz tételét az AFC háromszögre, adódik:) $AC = \sqrt{7{,}25} \left(\approx 2{,}7 \text{ cm}\right)$ (1 pont)

A beírt kör sugarát R-rel jelölve: $\frac{1}{\sqrt{7{,}25}} = \frac{R}{2{,}5 - R}$ (1 pont)

$25 - R = \sqrt{7{,}25} \cdot R$ (1 pont)

$3{,}7R \approx 2{,}5$, ebből $R \approx 0{,}68$ cm

Tehát a lehető legnagyobb marcipángömb sugara kb. **0,7 cm**. (1 pont)

c) Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott gömb nem az előírt méretű 0,1. (1 pont)

Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott az előírásnak megfelelő méretű 0,9. (1 pont)

A keresett valószínűséget az $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ képlettel számolhatjuk ki, (1 pont)

ahol $n=10,\ k=4,\ p=0{,}1$. (1 pont)

A keresett valószínűség: $\binom{10}{4}0{,}1^4\cdot 0{,}9^6 = 210\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^6 \approx \mathbf{0{,}011}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

26) Egy kockajátékban egy menet abból áll, hogy szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után. Egy dobás 1 pontot ér, ha négyest vagy ötöst dobunk, egyébként a dobásért nem jár pont. A menetet úgy pontozzák, hogy a két dobásért járó pontszámot összeadják.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kapjuk? (5 pont)

b) Minek nagyobb a valószínűsége,

- **annak, hogy egy menetben szerzünk pontot, vagy**
- **annak, hogy egy menetben nem szerzünk pontot? (7 pont)**

Megoldás:

a) (A kettős dobások minden kimenetele egyenlően valószínű, tehát alkalmazható a klasszikus modell.) Összesen $6^2=36$ féle kettős dobás történhet. (2 pont)

Az első dobás 2-féle, a második 4-féle lehet, (1 pont)

tehát $2\cdot 4=8$ „jó” kettős dobás van, (1 pont)

így $\mathbf{\frac{8}{36}\left(=\frac{2}{9}=0{,}22...\right)}$ annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kaptuk. (1 pont)

Mivel a két dobás független esemény, ezért a valószínűség kiszámítható az események valószínűségének szorzatával is.

b) Pontosan 1 pontot akkor szerezhetünk, ha az első dobás jó (pontot érő), a második nem pontot érő, vagy fordítva, (2 pont)

ez összesen $2\cdot 2\cdot 4=16$ eset. (1 pont)

2 pontot szerezhetünk $2\cdot 2=4$ esetben. (1 pont)

Így annak a valószínűsége, hogy egy menetben szerzünk pontot: $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$ (1 pont)

Annak, hogy nem szerzünk pontot, $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ a valószínűsége, (1 pont)

tehát **az első eseménynek nagyobb** a valószínűsége. (1 pont)

Összesen: 12 pont

27) Egy piros és egy sárga szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege pontosan 4 lesz? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Két kockával 3-féleképpen lehet a dobott számok összege 4: $(1;3),(2;2),(3;1)$ (1 pont)

Két kockával összesen $6^2=36$-félét dobhatunk. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség: $\mathbf{\frac{3}{36}(\approx 0{,}083)}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

28) András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papír cetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnevük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut? (5 pont)

b) Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve! A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg! (A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!) (6 pont)

	A húzó neve				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A cédulák megfelelő sorrendjei					**E**
					E
					E
					E
					E
					E

c) Az ajándékok átadása után mind az öten moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett? (6 pont)

Megoldás:

a) Az 5 név bármelyike ugyanakkora valószínűséggel kerülhet az első helyre, (3 pont)

tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{5} = 0{,}2$. (2 pont)

A feladat megoldható a kedvező/összes formulával is.

b)

	A húzó neve				
	A	B	C	D	E
A cédulák megfelelő sorrendjei	**B**	**A**	**D**	**C**	E
	B	**C**	**D**	**A**	E
	B	**D**	**A**	**C**	E
	C	**A**	**D**	**B**	E
	C	**D**	**A**	**B**	E
	C	**D**	**B**	**A**	E
	D	**A**	**B**	**C**	E
	D	**C**	**A**	**B**	E
	D	**C**	**B**	**A**	E

(6 pont)

c) Azt a két helyet, ahol a fiúk ülhetnek (nem egymás mellett), 6-féleképpen választhatjuk ki, (1 pont)

mert $\binom{5}{2} - 4 = 6$. (1 pont)

A két kiválasztott helyen a fiúk 2-féleképpen helyezkedhetnek el. (1 pont)

A lányok minden egyes esetben $3! = 6$ különböző módon ülhetnek le egymáshoz képest. (1 pont)

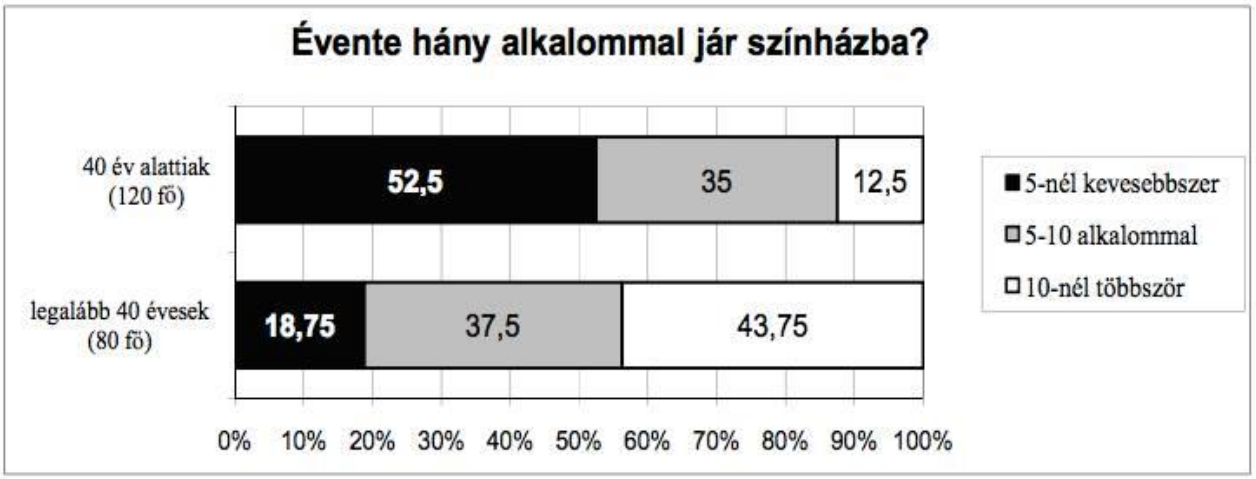
Összesen tehát $6 \cdot 2 \cdot 6 =$ (1 pont)

$= \mathbf{72}$ különböző módon ülhetnek le. (1 pont)

Komplementer halmazzal is számolhatunk.

Összesen: 17 pont

29) Egy felmérés során két korcsoportban összesen 200 embert kérdeztek meg arról, hogy évente hány alkalommal járnak színházba. Közülük 120-an 40 évesnél fiatalabbak, 80 válaszadó pedig 40 éves vagy annál idősebb volt. Az eredményeket (százalékos megoszlásban) az alábbi diagram szemlélteti.



a) Hány legalább 40 éves ember adta azt a választ, hogy 5-nél kevesebbszer volt színházban? (3 pont)

b) A megkérdezettek hány százaléka jár évente legalább 5, de legfeljebb 10 alkalommal színházba? (4 pont)

c) A 200 ember közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük legfeljebb az egyik fiatalabb 40 évesnél?

Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) A legalább 40 éveseknek a 18,75%-a adta az idézett választ. (1 pont)

80-nak a 18,75 %-a: $80 \cdot 0{,}1875$. (1 pont)

Tehát **15** legalább 40 éves ember adta az „5-nél kevesebbszer” választ. (1 pont)

b) A 40 év alattiak közül $120 \cdot 0{,}35 = 42$, (1 pont)

a legalább 40 évesek közül $80 \cdot 0{,}375 = 30$, (1 pont)

azaz összesen 72 olyan ember van, aki évente 5−10 alkalommal jár színházba. (1 pont)

Ez a szám a megkérdezettek **36 %**-a. (1 pont)

c) Az összes lehetséges kiválasztás: $\binom{200}{2}\left(=19900\right)$. (1 pont)

Ezek közül mindkét véletlenszerűen kiválasztott legalább 40 éves: $\binom{80}{2}\left(=3160\right)$ esetben, (1 pont)

különböző korosztályú: $80\cdot120\left(=9600\right)$ esetben. (1 pont)

A kérdezett esemény valószínűsége: $\dfrac{\binom{80}{2}+80\cdot120}{\binom{200}{2}}\left(=\dfrac{12760}{19900}\right)$. (1 pont)

Tehát **0,641** a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy 40 évnél fiatalabb van a kiválasztottak között. (1 pont)

A feladat megoldható a komplementer esemény valószínűségének kiszámításával is.

Összesen: 12 pont

30) Tekintsük a következő halmazokat:

$A=\{$**a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok**$\}$

$B=\{$**a 300-nál nem nagyobb, 3-al osztható pozitív egész számok**$\}$

$C=\{$**a 400-nál nem nagyobb, 4-el osztható pozitív egész számok**$\}$

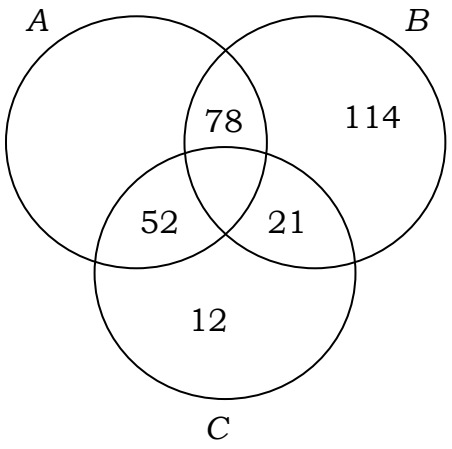
a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába! (8 pont)

	***A* halmaz**	***B* halmaz**	***C* halmaz**
114	*nem eleme*	*eleme*	*nem eleme*
52			
78			
124			
216			

b) Határozza meg az $A\cap B\cap C$ halmaz elemszámát! (3 pont)

c) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az *A* halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a *B*, sem a *C* halmaznak! (6 pont)

Megoldás:



a) (8 pont)

	***A* halmaz**	***B* halmaz**	***C* halmaz**
52	eleme	nem eleme	eleme
78	eleme	eleme	nem eleme
124	nem eleme	nem eleme	eleme
216	nem eleme	eleme	eleme

b) A három halmaz közös részében azok a pozitív egész számok vannak, melyek 100-nál nem nagyobbak és 3-mal és 4-gyel is (tehát 12-vel) oszthatók. (1 pont)
Ezek a számok:

$A \cap B \cap C = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96\}$ (1 pont)

Összesen **8 darab** ilyen szám van. (1 pont)

c) Az *A* halmaz elemeinek száma: $|A| = 100$ (1 pont)

Ezek közül hárommal osztható (vagyis B-nek is eleme) 33 darab. (1 pont)
Néggyel osztható (vagyis *C*-nek is eleme) 25 darab. (1 pont)
Tizenkettővel osztható (vagyis mindhárom halmaznak eleme) 8 darab. (1 pont)
Így az *A* halmaz azon elemeinek a száma, melyek nem elemei sem a *B*, sem a *C* halmaznak: $100 - 33 - 25 + 8 = 50$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség: $\boldsymbol{P = \frac{50}{100} = 0,5}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

31) Adja meg annak valószínűségét, hogy a 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14 számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám prím! (2 pont)

Megoldás:

A kérdezett valószínűség $\frac{3}{8}\left(=0,375\right)$. (2 pont)

32) Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

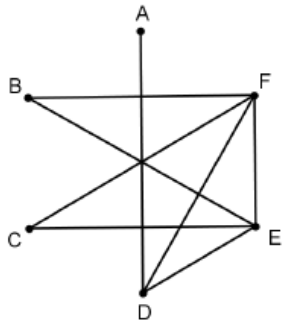
a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját! (4 pont)

b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!) (6 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket! (7 pont)

Megoldás:

a) Az egyik lehetséges megoldás (a résztvevőket nevük kezdőbetűjével jelölve): (4 pont)

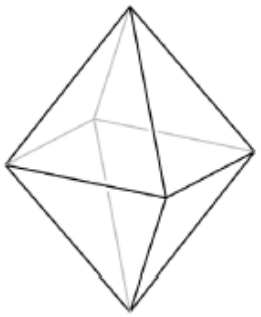


b) Ha Andi egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta volna, akkor például Feri eddigi mérkőzéseit Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszotta volna. (3 pont)
Ekkor azonban Enikőnek már nem lehet meg a négy mérkőzése, hiszen legfeljebb Csabával, Danival és Ferivel játszhatott volna. (2 pont)
Tehát igazoltuk, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését nem játszhatta Barnabással. (1 pont)

c) A játékosok kiválasztása helyett a lejátszott – illetve nem lejátszott – mérkőzéseiket vizsgáljuk. (2 pont)
Összesen $\left(\frac{6\cdot 5}{2}\right)=15$ mérkőzés szükséges (összes eset száma). (2 pont)
Eddig 8 mérkőzés zajlott le, tehát 7 mérkőzést kell még lejátszani (kedvező esetek száma). (2 pont)
A keresett valószínűség $\mathbf{\frac{7}{15}\left(\approx 0{,}47\right)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

33) Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm-esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.



a) Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm^2-ben) és a térfogatát (cm^3-ben)! Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A test lapjait 1-től 8-ig megszámozzuk, így egy „dobó-oktaédert" kapunk, amely minden oldallapjára egyforma valószínűséggel esik. Egy ilyen test esetében is van egy felső lap, az ezen lévő számot tekintjük a dobás kimenetelének. (Az ábrán látható „dobó-oktaéderrel" 8-ast dobtunk.)



b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezzel a „dobó-oktaéderrel" egymás után négyszer dobva, legalább három esetben 5-nél nagyobb számot dobunk! (8 pont)

Megoldás:

a) Az oldallap-háromszögekben a 2 cm-es oldalhoz tartozó magasság hossza (a Pitagorasz-tételt alkalmazva) $\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}\,(\approx 2{,}83)$(cm). (1 pont)

Egy oldallap területe $\frac{2\cdot\sqrt{8}}{2}\,(\approx 2{,}83)$(cm^2). (1 pont)

A test felszíne: $A\approx 22{,}6\,\text{cm}^2$. (1 pont)

A testet alkotó gúlák magassága megegyezik annak az egyenlő szárú háromszögnek a magasságával, amelynek szára a gúlák oldalélével, alapja a gúla alapjának átlójával egyezik meg. (1 pont)

A gúla m magasságára (a Pitagorasz-tételt alkalmazva): $m^2=3^2-\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2$ (1 pont)

$m=\sqrt{7}\,(\approx 2{,}65)$(cm). (1 pont)

A gúla térfogata: $V=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{7}\,(\approx 3{,}53)$(cm^3). (1 pont)

A test térfogata ennek kétszerese, azaz megközelítőleg $\mathbf{7{,}1\,cm^3}$. (2 pont)

b) $P(\text{egy adott dobás 5-nél nagyobb})=\frac{3}{8}$ (2 pont)

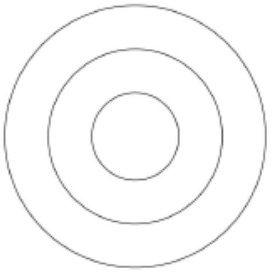
$P(\text{mind a négy dobás 5-nél nagyobb})=\left(\frac{3}{8}\right)^4\ (\approx 0{,}0198)$ (1 pont)

$P(\text{három dobás 5-nél nagyobb, egy nem})=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3\cdot\frac{5}{8}\,(\approx 0{,}1318)$ (2 pont)

A kérdéses valószínűség ezek összege, azaz $\approx \mathbf{0{,}152}$. (3 pont)

Összesen: 17 pont

34) Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható. A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is.



a) Hányféle háromszínű kitűzőt készíthet a kisiparos? (3 pont)

b) Hányféle kétszínű kitűző készíthető? (5 pont)

A kisiparos elkészíti az összes lehetséges különböző (egy-, két- és háromszínű) kitűzőt egy-egy példányban, és véletlenszerűen kiválaszt közülük egyet.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan kitűzőt választ, amelyen az egyik mező kék, egy másik sárga, a harmadik pedig zöld színű?

(4 pont)

Megoldás:

a) Ha három színt akarunk felhasználni, akkor a kitűző mezői különböző színűek lesznek. (1 pont)
Az egyik (például a legbelső) mezőt 5-féle, a mellette levőt 4-féle, a harmadikat 3-féle színnel színezhetjük ki. (1 pont)
Így $\mathbf{5\cdot 4\cdot 3=60}$-féle háromszínű kitűzőt készíthetünk. (1 pont)

b) Az ötből két színt $\binom{5}{2}=10$-féleképpen választhatunk ki. (2 pont)
A három mező közül a két egyszínűt háromféleképpen lehet kiválasztani, és mindegyik esethez kétféle színezés tartozik, ez összesen 6 lehetőség. (2 pont)
A kétszínű kitűzők száma így $\mathbf{10\cdot 6=60}$. (1 pont)

c) A kitűző minden mezőjét ötféleképpen színezhetjük ki, így összesen $5\cdot 5\cdot 5=125$-féle színezés lehetséges. (1 pont)
A megadott három szín $3\cdot 2\cdot 1=6$ kitűzőn szerepel. (1 pont)
A kérdéses valószínűség tehát $p=\dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}=\mathbf{\dfrac{6}{125}\left(=0{,}048\right)}$.
(2 pont)

Összesen: 12 pont

35) Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat.

Életkor	17	18	19	21	22	23	24	25	26	31
Gyakoriság	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1

a) Számítsa ki a csapat átlagéletkorát! (2 pont)

Jelölje *A* azt az eseményt, hogy a csapatból 7 játékost véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztottak között legfeljebb egy olyan van, aki 20 évnél fiatalabb.

b) Számítsa ki az *A* esemény valószínűségét! (8 pont)

A világbajnokság egyik mérkőzésén a magyar kezdőcsapat 6 mezőnyjátékosáról a következőket tudjuk:

- **a legidősebb és a legfiatalabb játékos életkorának különbsége 12 év,**
- **a játékosok életkorának egyetlen módusza 22 év,**
- **a hat játékos életkorának mediánja 23 év,**
- **a hat játékos életkorának átlaga 24 év.**

c) Adja meg a kezdőcsapat hat mezőnyjátékosának életkorát! (7 pont)

Megoldás:

a) Az életkorok átlaga: $\dfrac{17\cdot 2+18+19+\ldots+25+26+31}{13}=\mathbf{\dfrac{289}{13}\left(\approx 22{,}23\text{ év}\right)}$
(2 pont)

b) (A 13 játékosból 9 olyan van, aki 20 évnél idősebb, így) azoknak az eseteknek a száma, amikor nincs a kiválasztott 7 játékos között 20 évnél fiatalabb: $\binom{9}{7}$.
(1 pont)
Azoknak az eseteknek a száma, amikor egy játékos 20 évnél fiatalabb (és 6 játékos 20 évnél idősebb): $\binom{4}{1}\cdot\binom{9}{6}$. (2 pont)
Az *A* esemény bekövetkezése szempontjából kedvező esetek számát a fenti két

szám összege adja: $\binom{9}{7}+4\cdot\binom{9}{6}=36+336=372$. (2 pont)

Az összes esetszám: $\binom{13}{7}$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség: $P(A)=\dfrac{\binom{9}{7}+4\cdot\binom{9}{6}}{\binom{13}{7}}=\mathbf{\dfrac{372}{1716}\left(\approx 0{,}2168\right)}$ (2 pont)

c) (A legidősebb és legfiatalabb játékos életkorának különbsége csak egyféleképpen lehet 12 év, ha) a legidősebb játékos $\left(a_6=\right)\mathbf{31}$, (1 pont)

a legfiatalabb pedig $\left(a_1=\right)\mathbf{19}$ éves. (1 pont)

A móduszból következik, hogy a játékosok közül ketten $\left(a_2\right.$ és $\left.a_3\right)$ **22** évesek. (1 pont)

Mivel hat játékos van, ezért a medián a_3 és a_4 számtani közepe, azaz az egyik játékos $\left(a_4=\right)\mathbf{24}$ éves (és ilyen korú játékos valóban van a csapatban). (2 pont)

Az átlagból következik, hogy $\dfrac{118+a_5}{6}=24$ (1 pont)

vagyis ez a játékos $\left(a_5=\right)\mathbf{26}$ éves (és ilyen korú játékos valóban van a csapatban). (1 pont)

Összesen: 17 pont

36) Egy dobozban 50 darab golyó van, közülük 10 darab piros színű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kihúzva pirosat húzunk? (Az egyes golyók húzásának ugyanakkora a valószínűsége.) **(2 pont)**

Megoldás:

$\mathbf{\frac{10}{50}}$ vagy $\mathbf{\frac{1}{5}}$ vagy $\mathbf{0{,}2}$ vagy $\mathbf{20}\%$ (2 pont)

37) Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a baloldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.

a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre? (2 pont)

b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek? (3 pont)

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna és Béla jegye egymás mellé szól, ha a fenti négy jegyet véletlenszerűen osztjuk ki közöttük? (4 pont)

A színház 1200 személyes. A szombati előadásra az összes jegy elkelt. Az eladott jegyek 40%-a 800 Ft-os, 25%-a 1000 Ft-os, 20%-a 1200 Ft-os, 15%-a 1500 Ft-os jegy volt.

d) Ábrázolja kördiagramon az eladott jegyek jegyárak szerinti százalékos megoszlását! (3 pont)

e) Számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe kerül egy színházjegy! (5 pont)

Megoldás:

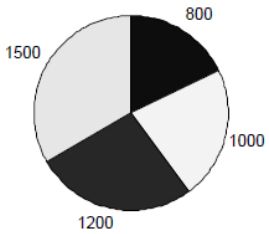
a) $\mathbf{4! = 24.}$ (2 pont)

b) Anna és Béla egymás mellett ülnek, ezért egy „elemnek” tekinthetjük őket, azaz 3 elemet kell permutálnunk: 3!. (2 pont)
Anna és Béla bármelyik fenti sorrendben helyet cserélhetnek egymással, ezért azon esetek száma, amikor Anna és Béla egymás mellett ülnek: $\mathbf{3! \cdot 2 = 12}$ (1 pont)

c) $\dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \dfrac{2 \cdot 3!}{4!}$ (3 pont)

A kérdezett valószínűség: $\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}$ vagy $\mathbf{0,5}$ vagy $\mathbf{50\%}$. (1 pont)

d) A megadott százalékértékeknek megfelelő szögek:
800Ft, 40%: 144°,
1000 Ft, 25%: 90°,
1200 Ft, 20%: 72°,
1500 Ft, 15%: 54°. (1 pont)
Helyes diagram (2 pont)



e) Kiszámolható, hogy a különböző árú jegyekből hány darab fogyott:
480 db – 800 Ft-os jegy;
300 db – 1000 Ft-os jegy;
240 db – 1200 Ft-os jegy;
180 db – 1500 Ft-os jegy. (2 pont)

$\dfrac{480 \cdot 800 + 300 \cdot 1000 + 240 \cdot 1200 + 180 \cdot 1500}{1200} = \mathbf{1035}$ (2 pont)

Az átlagár tehát 1035 Ft. (1 pont)

Összesen: 17 pont

38) Egy teherautóval több zöldségboltba almát szállítottak. Az egyik üzletbe 60 kg jonatánt, 135 kg starkingot, 150 kg idaredet és 195 kg golden almát vittek. A jonatán és az idared alma kilóját egyaránt 120 Ft-ért, a starking és a golden kilóját 85 Ft-ért árulta a zöldséges.

a) Hány százalékkal volt drágább a jonatán alma kilója a goldenéhez képest? (2 pont)

b) Mennyi bevételhez jutott a zöldséges, ha a teljes mennyiséget eladta? (2 pont)

c) A zöldségeshez kiszállított árukészlet alapján számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe került nála 1 kg alma! (3 pont)

d) Ábrázolja kördiagramon a zöldségeshez érkezett alma mennyiségének fajták szerinti megoszlását! (6 pont)

A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.

e) A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz? (4 pont)

Megoldás:

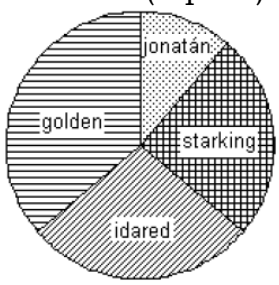
a) $\dfrac{120}{85} \approx 1,41$ (1 pont)

Kb. **41%-kal drágább** a jonatán alma (1 pont)

b) $60 \cdot 120 + 150 \cdot 120 + 195 \cdot 85 + 135 \cdot 85 = 53250$ (1 pont)
Tehát **53250 Forint bevétel**hez jutott a zöldséges. (1 pont)

c) Az összes alma mennyisége 540 kg. (1 pont)
Átlagos almaár: $\frac{53250}{540} \approx 98,6$ (1 pont)
Tehát átlagosan **98,6 Forintba került** egy alma. (1 pont)

d) Az egyes almafajták mennyiségéhez tartozó középponti szögek:
60kg: $\frac{60 \cdot 360°}{540} = \mathbf{40°}$
135 kg: **90°**
150 kg: **100°**
195 kg: **130°** (2 pont)
Kördiagram: (4 pont)

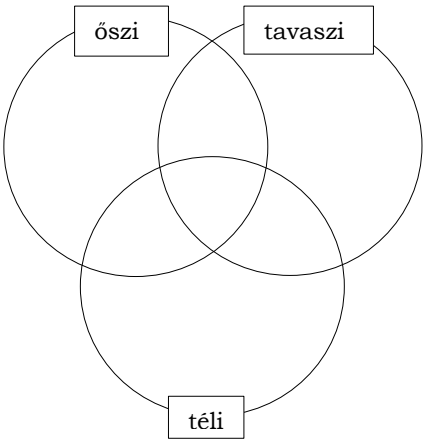


e) A kiborult jonatán és idared almák darabszámának aránya: 1,24:1 (2 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{1,25}{2,25} = \frac{5}{9} \approx \mathbf{0,56}$ (2 pont)

Összesen: 17 pont

39) Egy zeneiskola minden tanulója szerepelt a tanév során szervezett három hangverseny, az őszi, a téli, a tavaszi koncert valamelyikén. 20-an voltak, akik az őszi és a téli koncerten is, 23-an, akik a télin és a tavaszin is, és 18-an, akik az őszi és a tavaszi hangversenyen is szerepeltek. 10 olyan növendék volt, aki mindhárom hangversenyen fellépett.

a) Írja be a halmazábrába a szövegben szereplő adatokat a megfelelő helyre!



(4 pont)

A zeneiskolába 188 tanuló jár. Azok közül, akik csak egy hangversenyen léptek fel, kétszer annyian szerepeltek tavasszal, mint télen, de csak negyedannyian ősszel, mint tavasszal.

b) Számítsa ki, hogy hány olyan tanuló volt, aki csak télen szerepelt!

(8 pont)

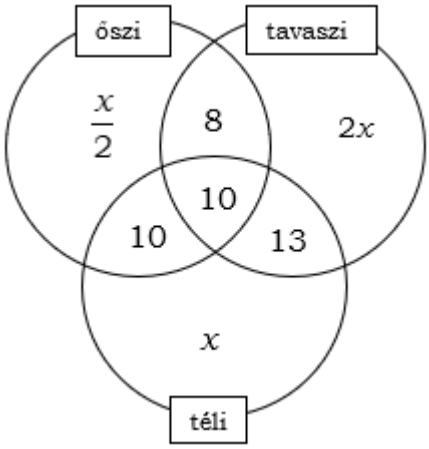
c) 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5-5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba?

(5 pont)

Megoldás:

a) A **8; 10; 10; 13** számokat kell beírni a metszetekbe. (4 pont)

b) Csak télen szerepelt: x tanuló (1 pont)
Csak tavasszal szerepelt: $2x$ tanuló (1 pont)
Csak ősszel szerepelt: $\frac{x}{2}$ tanuló (2 pont)
Az egyenlet: $x+\frac{x}{2}+2x+10+10+13+8=188$ (2 pont)
Ebből $x=42$ (1 pont)
Tehát **42** olyan tanuló van, aki csak télen szerepelt. (1 pont)



c) Az A osztályból 5 tanulót $\binom{32}{5}$-féleképpen választhatnak ki. (1 pont)
A B osztályból 5 tanulót $\binom{28}{5}$-féleképpen választhatnak ki. (1 pont)
A kedvező esetek száma: $\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}$. (1 pont)
Az összes esetek száma: $\binom{60}{10}$. (1 pont)
A keresett valószínűség tehát: $\frac{\binom{32}{5}\cdot\binom{28}{5}}{\binom{60}{10}}\approx$**0,26**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

40) Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja! (3 pont)

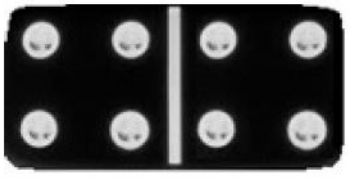
Megoldás:

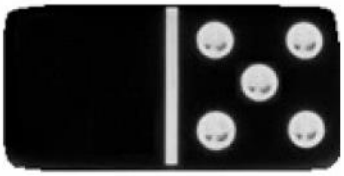
A szabályos dobókockán szereplő számok mindegyike osztója a 60-nak, (2 pont)
így a kérdezett esemény (a biztos esemény, melynek) **valószínűsége 1**. (1 pont)
Összesen: 3 pont

41)

a) Egy memóriajáték 30 olyan egyforma méretű lapból áll, melyek egyik oldalán egy-egy egész szám áll az 1, 2, 3, ... 14, 15 számok közül. Mindegyik szám pontosan két lapon szerepel. A lapok másik oldala (a hátoldala) teljesen azonos mintázatú. A 30 lapot összekeverjük. A játék kezdetén a lapokat az asztalra helyezzük egymás mellé, hátoldalukkal felfelé fordítva, így a számok nem látszanak. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játék kezdetén két lapot véletlenszerűen kiválasztva a lapokon álló számok megegyeznek! (5 pont)

b) Egy dominókészlet azonos méretű kövekből áll. Minden dominókő egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken elhelyezett pöttyök száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egyforma kő nem lehet egy készletben. Az ábrán két kő látható: a 4-4-es és a 0-5-ös (vagy 5-0-ás). Hány kőből áll egy dominókészlet? (6 pont)





c) A „Ki nevet a végén?" nevű társasjátékban egy játékos akkor indulhat el a pályán, amikor egy szabályos dobókockával 6-ost dob. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy valaki pontosan a harmadik dobására indulhat el a pályán! (6 pont)

Megoldás:

a) Két lapot kiválasztunk a 30-ból, ezt $\binom{30}{2}=\frac{30\cdot 29}{2}=435$-féleképpen lehet megtenni, mely az összes lehetséges esetet jelenti. (2 pont)
A kedvező esetek száma (amikor a két lapon szereplő számok megegyeznek) 15. (2 pont)
A keresett valószínűség tehát: $\frac{15}{435}=\frac{1}{29}\approx \mathbf{0,0345}$. (1 pont)

b) Összesen 7 olyan kő van, amelyen a két részben azonos a pöttyök száma. (2 pont)
A kő két részén (a két részt megkülönböztetve) különböző számú pöttyöt $7\cdot 6=42$-féleképpen lehetne elhelyezni, (2 pont)
de így minden ilyen követ kétszer számolnánk, ezért ezek száma 21. (1 pont)
Összesen **28 kő** van a teljes készletben. (1 pont)

c) Aki pontosan a harmadik dobására kezdi el a játékot, az az első két dobásánál öt-ötfélét dobhatott, (1 pont)
a harmadikra viszont csak egyfélét (hatost). (1 pont)
Így a kedvező esetek száma $5\cdot 5\cdot 1$ (1 pont)
Az összes eset száma: 6^3. (1 pont)
A kérdéses valószínűség tehát: $\frac{25}{216}\approx \mathbf{0,1157}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

42) Egy kalapban 3 piros, 4 kék és 5 zöld golyó van. Találomra kihúzunk a kalapból egy golyót. Adja meg annak valószínűségét, hogy a kihúzott golyó nem piros! (2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{P=\frac{9}{12}=0,75}$ (2 pont)

43) András és Péter „számkártyázik" egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott

lapot. (Például ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.



a) Hány kártya van Péter előtt az első mérkőzés után, ha András az 1, 2, 3, 4, 5, 6, Péter pedig a 2, 4, 5, 3, 1, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait? (2 pont)

A második mérkőzés során Péter az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait, és így összesen két lapot vitt el.

b) Adjon meg egy lehetséges sorrendet, amelyben András kijátszhatta lapjait! (3 pont)

A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőt küldi csatába).

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg! (6 pont)

A negyedik mérkőzés előtt mindketten úgy döntöttek, hogy az egész mérkőzés során véletlenszerűen játsszák majd ki a lapjaikat. Az első három csata után Andrásnál a 3, 4, 6 számkártyák maradtak, Péternél pedig az 1, 5, 6 számkártyák.

d) Adja meg annak a valószínűségét, hogy András az utolsó három csatából pontosan kettőt nyer meg! (6 pont)

Megoldás:

a) Péter megnyert három csatát (kettőt elvesztett), egy csata pedig döntetlenre végződött, (1 pont)
így Péter előtt összesen **hét kártya van** az első mérkőzés után. (1 pont)

b) Péter úgy vihetett el két lapot, ha egy csatát nyert és ötöt elveszített, vagy két csatában döntetlent ért el, és négyet elveszített. (1 pont)
András lapjainak (egyetlen lehetséges) sorrendje:
2, 3, 4, 5, 6, 1. (2 pont)

c) Péter az első két lapot $6 \cdot 5 = 30$-féleképpen tudja letenni, ez az összes esetek száma (1 pont)
Ezek közül a következő esetekben viszi el András első két lapját: (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 5), (4; 6), (5; 4), (5; 6), (6; 4), (6; 5). (3 pont)
Kedvező esetek száma 9. (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{9}{30} = 0,3$. (1 pont)

d) Az összes lehetséges csata száma ezekkel a lapokkal $3! \cdot 3! =$ (1 pont)
$= 36$ (1 pont)
András akkor nyer pontosan kettőt, ha valamilyen sorrendben a 3-1, 6-5, 4-6 csaták, (1 pont)
vagy a 4-1, 6-5, 3-6 csaták zajlanak le. (1 pont)
Ezek $2 \cdot 3! = 12$-féleképpen valósulhatnak meg, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{36}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

44) Az első 100 pozitív egész szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott szám osztható 5-tel! (2 pont)

Megoldás:

A kérdéses valószínűség: $\frac{20}{100} = \mathbf{0,2}$. (2 pont)

45) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)

b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)

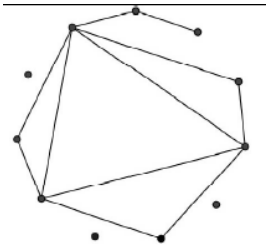
Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapítottuk meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.

c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)

Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

Megoldás:



a) Több lehetőség is van, például: (3 pont)

b) Annyi kézfogás történt, ahány éle van a gráfnak, (1 pont)
összesen **11**. (1 pont)

c) A vizsgázó által megadott számok egyetlen módusza 2, (1 pont)
mediánja 3, (1 pont)
átlaga 4, (1 pont)
terjedelme 5. (1 pont)
Egy lehetséges megoldás például 2; 2; 2; 2; 2; 3; 6; 6; 6; 6; 7. (1 pont)

d) Annak a valószínűsége, hogy a játékos nem lő be egy tizenegyest $(1-0,9)=0,1$. (1 pont)
Összesen három lehetőséget kell figyelembe venni. (1 pont)
Pontosan egyszer talál be, és kétszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{1}\cdot 0,9\cdot 0,1^2 (=0,027)$. (1 pont)
Pontosan kétszer talál be, és egyszer nem. Ennek valószínűsége: $\binom{3}{2}\cdot 0,9^2\cdot 0,1 (=0,243)$. (1 pont)
Annak a valószínűsége, hogy mindháromszor betalál: $0,9^3 (=0,729)$. (1 pont)
A keresett valószínűség ezek összege, (1 pont)
azaz **0,999**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

46) Két különböző színű szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok szorzata prímszám lesz! Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

Az összes eset száma 36. (1 pont)
Akkor lesz prímszám a sorozat, ha az egyik kockával 1-et és a másikkal 2-t, 3-t vagy 5-öt dobunk. (1 pont)
Ezt összesen $2\cdot 3=6$-féleképpen tehetjük meg (ez a kedvező esetek száma). (1 pont)
A keresett valószínűség: $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{36}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

47) Egy webáruházba való belépés előzetes regisztrációhoz kötött, melynek során a regisztráló életkorát is meg kell adnia. Az adatok alapján a 25560 regisztráló közül 28 évesnél fiatalabb 7810 fő, 55 évesnél idősebb 4615 fő, a többiek 28 és 55 év közöttiek.

a) Készítsen a létszámadatok alapján kördiagramot, kiszámítva a három körcikkhez tartozó középponti szögeket is! (5 pont)

A webáruház üzemeltetői a vásárlói szokásokat szeretnék elemezni, ezért a regisztráltak közül véletlenszerűen kiválasztanak két személyt.

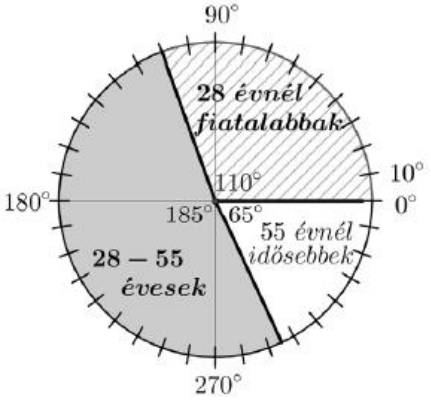
b) Adja meg annak a valószínűségét, hogy az egyik kiválasztott személy 28 évesnél fiatalabb, a másik 55 évesnél idősebb! (4 pont)

A regisztráltak egy része vásárol is a webáruházban. A vásárlók között a 28 év alattiak éppen kétszer annyian vannak, mint az 55 évesnél idősebbek. A 28 év alattiak az elmúlt időszakban összesen 19 325 700 Ft, az 55 év felettiek 17 543 550 Ft értékben vásároltak. Az 55 év felettiek átlagosan 2410 Ft-al költöttek többet, mint a 28 év alattiak.

c) Számítsa ki, hány 55 év feletti vásárlója volt a webáruháznak, és adja meg, hogy ezek a vásárlók átlagosan mennyit költöttek! (8 pont)

Megoldás:

a) A 28 évesnél fiatalabbakat ábrázoló körcikk középponti szöge
$\frac{7810}{25560}\cdot 360°=110°$. (1 pont)
Az 55 évesnél idősebbeket ábrázoló körcikk középponti szöge $\frac{4615}{25560}\cdot 360°=65°$. (1 pont)
A 28 és 55 év közöttieket ábrázoló körcikk középponti szöge $360°-(110°+65°)=185°$. (1 pont)



Az egyes körcikkek megjelenítése a megfelelő méretben, (1 pont)
egyértelmű jelmagyarázattal: (1 pont)

b) A 28 év alattiak közül egyet 7810-féleképpen, az 55 évesnél idősebbek közül egyet 4615-féleképpen tudunk kiválasztani, így a kedvező esetek száma $7810\cdot 4615\,(=36043150)$. (1 pont)
Az összes esetek száma: $\binom{25560}{5}\,(=326644020)$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{7810 \cdot 4615}{\binom{25560}{2}} \approx$ (1 pont)

$\approx$ **0,11**. (1 pont)

c) Az 55 év feletti vásárlók számát jelölje x, ekkor a 28 év alattiak száma $2x$. Az 55 év felettiek átlagosan $\frac{17543550}{x}$, (1 pont)

a 28 év alattiak átlagosan $\frac{19325700}{2x}$ Ft-ot költöttek. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható: $\frac{17543550}{x} - 2410 = \frac{19325700}{2x}$. (1 pont)

Ebből $2410x = 7880700$, (1 pont)

azaz $x = 3270$. (1 pont)

$\frac{17543550}{3270} = 5365$ (1 pont)

A webáruháznak **3270** olyan vásárlója volt, aki 55 évnél idősebb, és ők átlagosan **5365** Ft-ot költöttek. (1 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

48) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiatesszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

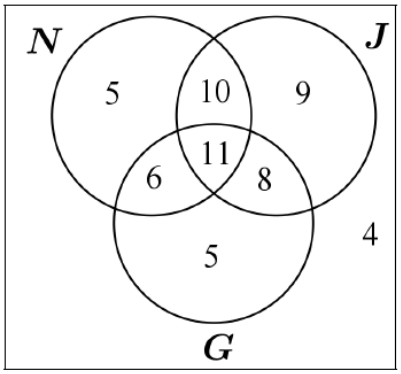
c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

Megoldás:

a) Az öt lehetőség közül kettőt kiválasztani $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen lehet (összes esetek száma). (2 pont)

Ezek közül egy esetben kapunk jó megoldást, így a kérdéses valószínűség **0,1**. (1 pont)

b) A pontosan két diák által jól megoldott feladatok száma:
Nóri-Judit: $21-11=10$,
Nóri-Gergő: $17-11=6$ (1 pont)
Judit-Gergő: $19-11=8$
A feladatok között $32-11-10-6=5$ olyan volt, amelyet csak Nóri, és $38-11-10-8=9$ olyan, amelyet csak Judit oldott meg helyesen. (1 pont)
Azon kérdések száma, amelyre a három tanuló közül legalább egyikük helyes választ adott: $58-4=54$. (1 pont)



$32+38-21=49$ olyan kérdés volt, amelyre Nóri vagy Judit helyes választ adott, (1 pont)
így $54-49=5$ olyan feladat volt, amelyet csak Gergő oldott meg helyesen. (1 pont)
A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma: $5+6+8+11=30$. (1 pont)
Így a kérdéses valószínűség $\frac{30}{58}\approx$ (1 pont)
$\approx \mathbf{0,517}$. (1 pont)

c) A három megtanulandó biológiai tételt $\binom{28}{3}$, (1 pont)
a kémia tételeket $\binom{30}{3}$-féleképpen lehet kiválasztani. (1 pont)
A kiválasztott tételeket tárgyanként $3!(=6)$-féleképpen lehet sorba rendezni. (1 pont)
Az első tétel kétféle tárgyból választható, de a tárgyak sorrendje az első tétel kiválasztása után már adott. (1 pont)
A különböző sorrendek száma: $2\cdot\binom{28}{3}\cdot 3!\cdot\binom{30}{3}\cdot 3!$. (1 pont)
Vagyis Nóri összesen **957640320**-féleképpen állíthatja össze a tételek sorrendjét. (1 pont)

Összesen: 17 pont

49) Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy néggyel osztható számot választunk? Válaszát indokolja! (3 pont)

***Megoldás*:**

Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számokból 25 db van, ez az összes eset száma. (1 pont)
Ezek közül 12 db osztható néggyel, ez a kedvező esetek száma. (1 pont)
Így a kérdéses valószínűség $P=\frac{12}{25}=\mathbf{0,48}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

50) Egy műanyag terméket gyártó üzemben szabályos hatoldalú csonkagúla alakú, felül nyitott virágtartó dobozokat készítenek egy kertészet számára (lásd az ábrát). A csonkagúla alaplapja 13 cm oldalú szabályos hatszög, fedőlapja 7 cm oldalú szabályos hatszög, az oldalélei 8 cm hosszúak.



a) Egy műanyagöntő gép 1 kg alapanyagból (a virágtartó doboz falának megfelelő anyagvastagság mellett) $0,93\,\text{m}^2$ felületet képes készíteni. Számítsa ki, hány virágtartó doboz készíthető 1 kg alapanyagból! (11 pont)

A kertészetben a sok virághagymának csak egy része hajt ki: 0,91 annak a valószínűsége, hogy egy elültetett virághagyma kihajt.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy 10 darab elültetett virághagyma közül legalább 8 kihajt! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

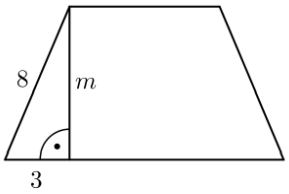
***Megoldás*:**

a) A virágtartó doboz talpának felszíne megegyezik a csonkagúla 7 cm-es oldalhosszúságú fedőlapjának területével. Ez egy szabályos hatszög, melynek területe egyenlő 6 db 7 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög területével. (1 pont)

$$t_1 = 6 \cdot \frac{7^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} \approx 127,3\,\text{cm}^2$$ (2 pont)

A virágtartó oldalának felületét a csonkagúla oldallapjait alkotó húrtrapézok területével számítjuk ki.

A magasság az $3^2 + m^2 = 8^2$ összefüggésből adódóan $m \approx 7,42\,\text{cm}$. (3 pont)



A trapéz területe ekkor: $t_2 = \frac{7+13}{2} \cdot 7,42 = 74,2\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Így a teljes felület $A = 127,3 + 6 \cdot 74,2 = 572,5\,\text{cm}^2$. (1 pont)

Mivel a gép 1 kg anyagból $9300\,\text{cm}^2$ felületet képes elkészíteni, ezért 1 kg anyagból $\frac{9300}{572,5} \approx 16,24$. (2 pont)

Vagyis **16** virágtartó doboz készíthető. (1 pont)

b) Ha legalább 8 virághagyma kihajt, akkor 8, 9 vagy 10 hajt ki. (1 pont)

I. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 8 kihajt és 2 nem a binomiális tétellel számítható ki: $p_1 = \binom{10}{8} \cdot 0,91^8 \cdot 0,09^2 \approx 0,1714$ (1 pont)

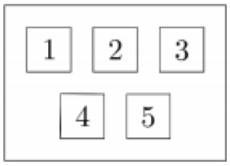
II. Annak a valószínűsége, hogy pontosan 9 kihajt és 1 nem: $p_2 = \binom{10}{9} \cdot 0,91^9 \cdot 0,09 \approx 0,3851$ (1 pont)

III. Végül annak a valószínűsége, hogy mind a 10 kihajt: $p_3 = 0,91^{10} \approx 0,3894$ (1 pont)

A keresett valószínűség a három eset valószínűségének összege, vagyis $P = p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{0,946}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

51) Az osztály lottót szervez, melyben az $1;2;3;4;5$ számok közül húznak ki hármat. Tamás a $2;3;5$ számokat jelöli be a szelvényen. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Tamásnak telitalálata lesz! Számítását részletezze! (4 pont)



***Megoldás*:**

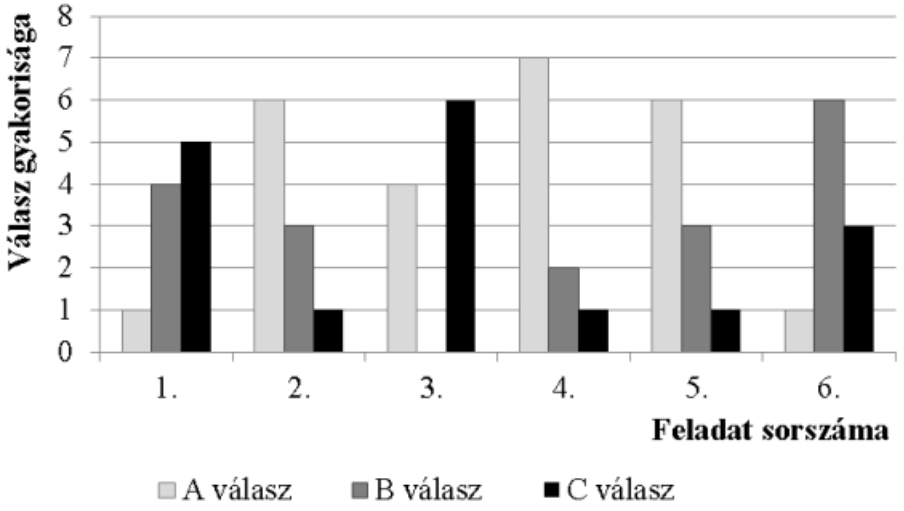
Az összes lehetséges húzás száma $\binom{5}{3} = 10$, amely az összes esetek száma. (2 pont)

A kedvező esetek száma pedig 1, hiszen egyféleképpen tudjuk kiválasztani a nyertes szelvényt. (1 pont)

Így a keresett valószínűség $P = \frac{1}{10} = \mathbf{0,1}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

52) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott választok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)

b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)

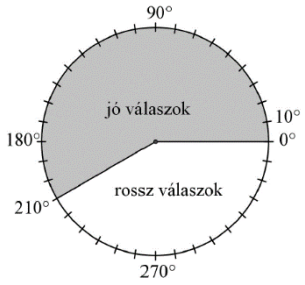
Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.

d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben?

(5 pont)

***Megoldás*:**

a) A jó válaszok száma 35, a rossz válaszok száma 25. (1 pont)

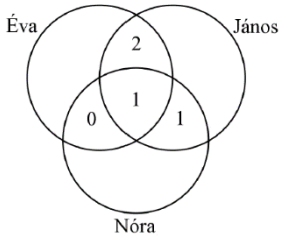


A 10 diák összesen 60 választ adott, ezért 1 válasz 6°-nak felel meg a kördiagramon. (1 pont)

Így a jó válaszok számát egy 210°-os körcikk, a rossz válaszok számát pedig egy 150°-os körcikk szemlélteti. (2 pont)

b) Az ábráról leolvasva, ha az állítás igaz lenne, akkor tanulók összesen $5+6+6+7+6+6=36$ pontot szereztek volna, viszont azt tudjuk, hogy 35 jó válasz volt, ezért az állítás **hamis**. (3 pont)

c) A megválaszolt kérdések számát egy Venn-diagramon ábrázoljuk. (2 pont)



Azért a két feladatért, amit csak egyedül oldottak meg 2 pont jár, így összesen $3\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 1+2=\mathbf{11}$ pontot szereztek. (3 pont)

d) Az összes eset száma $3^6=729$, ennyiféleképpen lehet kitölteni a tesztet. (1 pont)

A kedvező esetek számát megkaphatjuk úgy, hogy az összes eset számából levonjuk a kedvezőtlen esetek számát. (1 pont)

Hogy egy válasz se legyen helyes $2^6=64$-féleképpen lehetséges, így a kedvező esetek száma $729-64=665$. (2 pont)

A keresett valószínűség pedig $P=\dfrac{665}{729}=\mathbf{0,91}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

53) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle $6\,\text{cm}$, oldaléle $5\,\text{cm}$ hosszúságú. Egy szaküzletben $11\,\text{cm}$ oldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy $11\,\text{cm}$ oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

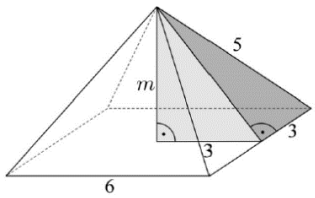
b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot" használ. Mindegyik fajta „varázskanóc" fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

***Megoldás*:**

a) A gúla oldallap magasságának kiszámításához Pitagorasz-tételt írunk fel: $\sqrt{5^2-3^2}=4$, majd a gúla magasságához újra alkalmazzuk: $m=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}\approx 2{,}65\,\text{cm}$. (3 pont)



Ezután kiszámoljuk a gúla térfogatát.

$V_{gúla}=\frac{6^2\cdot\sqrt{7}}{3}=12\sqrt{7}\approx 31{,}75\,\text{cm}^3$ (1 pont)

Egy kocka alakú tömb térfogata $V_{kocka}=11^3=1331\,\text{cm}^3$, így egy kockából $\frac{1331}{31{,}75}\approx 41{,}9$, azaz **41** gyertya önthető ki. (3 pont)

b) Az alaplapot kétféleképpen lehet kiszínezni. (1 pont)
Az oldallapok lehetnek ugyanolyan színűek, mindegyik kék, vagy mindegyik zöld, ez összesen két eset. (1 pont)
Lehet három oldallap zöld és egy kék, vagy három oldallap kék és egy zöld, ez is összesen két eset. (1 pont)
Olyan festésből, amikor két oldallap zöld és két oldallap kék, szintén kétféle lehet, attól függően, hogy az ugyanolyan színű lapok szomszédosak vagy szemköztiek. (1 pont)
Az oldallapokat tehát hatféleképpen lehet kiszínezni, így összesen $2\cdot 6=$ **12** különböző színezés készíthető. (2 pont)

c) Az első gyertya bármilyen színű lánggal éghet. (1 pont)
Annak, hogy a második gyertya más színű lánggal ég, $\frac{4}{5}$ a valószínűsége. (1 pont)
Annak, hogy a harmadik gyertya más színű lánggal ég, mint az első kettő, $\frac{2}{4}$ a valószínűsége. (1 pont)
Ekkor a kérdéses valószínűség $P=1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{5}=$ **0,4**. (2 pont)

Összesen: 17 pont

54) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Egy szabályos dobókockával egyszer dobva $\frac{2}{6}$ annak a valószínűsége, hogy négyzetszámot dobunk.

B: Két szabályos pénzérmét feldobva $\frac{1}{3}$ annak a valószínűsége, hogy mindkettővel írást dobunk.

C: Az egyjegyű pozitív egész számok közül egyet véletlenszerűen választva $\frac{4}{9}$ annak a valószínűsége, hogy páros számot választunk.

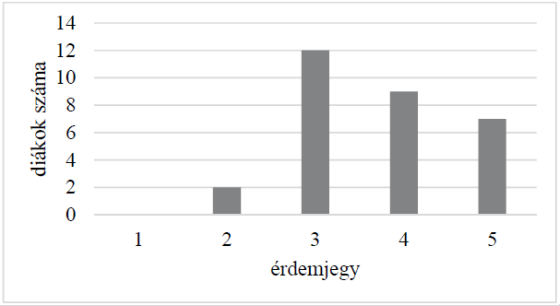
(2 pont)

***Megoldás*:**

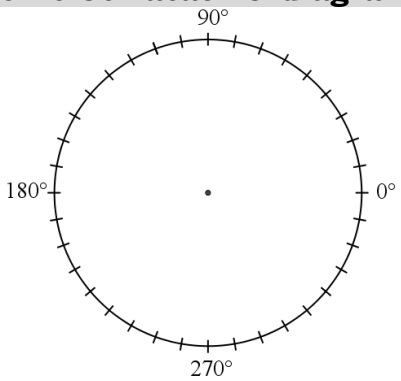
A: **igaz**
B: **hamis**
C: **igaz**

Összesen: 2 pont

55) Egy 30 fős osztály matematikaérettségi vizsgájának érdemjegyei olvashatók le az alábbi diagramról.



a) Adja meg az osztály matematikaérettségi érdemjegyeinek átlagát, mediánját és móduszát! (4 pont)
b) Ábrázolja az érdemjegyek eloszlását kördiagramon! (4 pont)



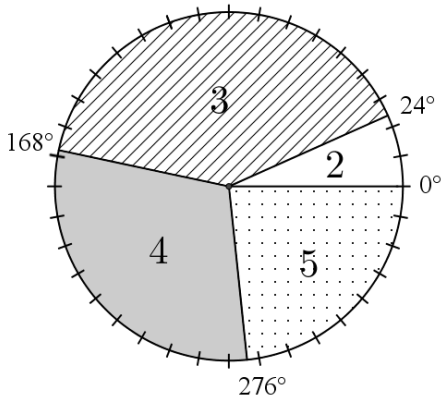
Az osztály tanulóinak matematikaérettségi dolgozatai közül az érettségi elnök véletlenszerűen kiválaszt és megvizsgál kettőt.
c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy mindkét kiválasztott dolgozat érdemjegye hármas! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

Megoldás:

a) A jegyek átlaga $\frac{2\cdot 2+12\cdot 3+9\cdot 4+7\cdot 5}{30}=\mathbf{3,7}$. (2 pont)

A jegyek mediánja **4**. (1 pont)
A jegyek módusza **3**. (1 pont)

b) 1 főnek 12°-os középponti szög felel meg az ábrán. Az egyes osztályzatokhoz tartozó középponti szögek: 2-es 24°; 3-as: 144°; 4-es: 108°, 5-ös: 84°. (2 pont)
Ábrázolás... (2 pont)



c) A kedvező esetek száma $\binom{12}{2}(=66)$. (1 pont)

Az összes eset száma $\binom{30}{2}(=435)$. (1 pont)

A kérdéses valószínűség ezek hányadosa: $\frac{66}{435}$, (1 pont)

ami a kért kerekítéssel **0,152**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

56) Egy kockával kétszer egymás után dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a két dobott szám összege 7 lesz! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

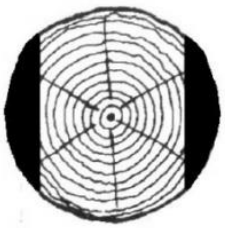
Összesen $6 \cdot 6 = 36$ féleképpen dobhatunk. (1 pont)

Hat olyan dobáspár van, amelyben 7 az összeg: $(1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1)$ (2 pont)

A keresett valószínűség $\left(\frac{6}{36} =\right) \mathbf{\frac{1}{6}}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

57) A Hód Kft. Faárutelephelyén rönkfából (henger alakú fatörzsekből) a következő módon készítenek gerendát. A keresztfűrészgép először két oldalt levág egy-egy – az ábra sötéttel jelölt – részt, majd a fa 90°-kal történő elfordítása után egy hasonló vágással végül egy négyzetes hasáb alakú gerendát készít. A gépet úgy állítják be, hogy a kapott hasáb alaplapja a lehető legnagyobb legyen. Most egy forgáshenger alakú, 60 cm átmérőjű, 5 méter hosszú rönkfát fűrészel így a gép.



a) Igaz-e, hogy a kapott négyzetes hasáb alakú fagerenda térfogata kisebb 1 köbméternél? (6 pont)

A Hód Kft. Deszkaárut is gyárt, ehhez a faanyagot 30000 Ft/m^3-es beszerzési áron vásárolja meg a termelőtől. A gyártás közben a megvásárolt fa kb. 40%-ából hulladékfa lesz. A késztermék 1 köbméterét 90000 forintért adja el a cég, de az eladási ár 35%-át a költségekre kell fordítania (feldolgozás, telephely fenntartása stb.).

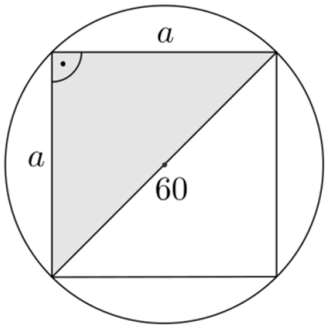
b) Mennyi haszna keletkezik a Hód Kft.-nek 1 köbméter deszkaáru eladásakor? (5 pont)

A fakitermelő cég telephelyéről hat teherautó indul el egymás után. Négy teherautó fenyőfát, kettő pedig tölgyfát szállít.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a két, tölgyfát szállító teherautó közvetlenül egymás után gördül ki a telephelyről, ha az autók indulási sorrendje véletlenszerű! (6 pont)

Megoldás:

a) A farönk tekinthető egy 60 cm átmérőjű, 5 méter magasságú körhengernek. A fűrészelés után kapott hasáb alaplapja egy négyzet, melynek átlója a henger alapkörének átmérője. (1 pont)



Az alapkörbe írható négyzet oldalát a-val jelölve (Pitagorasz-tétel szerint):

$a^2 + a^2 = 60^2$, ahonnan $a^2 = 1800$. (2 pont)

A négyzetes oszlop térfogata $1800 \cdot 500 = 900000\,\text{cm}^3$ (1 pont)

Mivel $1\,\text{m}^3 = 1000000\,\text{cm}^3$, így **az állítás igaz, a hasáb térfogata 1 köbméternél valóban kevesebb**. (2 pont)

b) $1\,\text{m}^3$ deszkaáru előállításához $1 : 0{,}6 = \frac{10}{6}$ m^3 rönkfa szükséges, (2 pont)

melynek ára 50000 Ft (1 pont)

$1\,\text{m}^3$ deszkaárú eladási árának 35%-a 31500 Ft (1 pont)

A Hód Kft. Haszna egy köbméter deszkaáru eladásakor:

$90000 - 31500 - 50000 =$ **8500 Ft** (1 pont)

c) A hat teherautó összesen $6! = (720)$-féle sorrendben indulhat el. (1 pont)

A két, tölgyfát szállító teherautót tekintsük egy járműnek. (1 pont)

Az öt „jármű” lehetséges sorrendjeinek a száma $5! = (120)$ (1 pont)

A két tölgyfát szállító teherautó minden egyes sorrendben kétféleképpen helyezkedhet el közvetlenül egymás mögött (1 pont)

így a kedvező esetek száma $2 \cdot 5! = (240)$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{\mathbf{240}}{\mathbf{720}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

58) Egy 20 fős társaság tagjait az április havi szabadidős tevékenységeikről kérdezték. Mindenki három eldöntendő kérdésre válaszolt (igennel vagy nemmel).

I. Volt-e moziban?

II. Olvasott-e szépirodalmi könyvet?

III. Volt-e koncerten?

A válaszokból kiderült, hogy tizenketten voltak moziban, kilencen olvastak szépirodalmi könyvet, és négy fő járt koncerten. Öten voltak, akik moziban jártak és szépirodalmi könyvet is olvastak, négyen pedig moziban és koncerten is jártak. Hárman mindhárom kérdésre igennel válaszoltak.

a) Hány olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt? (6 pont)

A társaság 20 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.

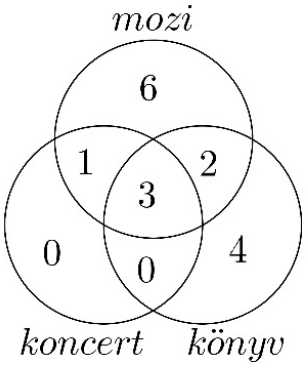
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legalább egyikük volt moziban április folyamán! (5 pont)

Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2.

c) Adja meg ezt a kilenc számot! (6 pont)

Megoldás:

a) Azok száma, akik jártak moziban, és olvastak szépirodalmi könyvet, de koncerten nem voltak: $(5-3=)2$. (1 pont)



Azok száma, akik voltak moziban és koncerten, de nem olvastak szépirodalmi könyvet: $(4-3=)1$. (1 pont)

A társaságban nem volt olyan személy, aki nem volt moziban, de olvasott szépirodalmi könyvet, és koncerten is volt. (1 pont)

Azok száma, akik csak moziban voltak: $12-(2+3+1)=6$

Hasonlóképpen azok száma, akik csak szépirodalmi könyvet olvastak (moziban és koncerten nem voltak): 4, illetve azok száma, akik csak koncerten voltak (moziban nem és könyvet sem olvastak): 0. (2 pont)

$20-(3+2+1+6+4)=$ **4 olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt.** (1 pont)

b) Összesen $\binom{20}{2}(=190)$-féleképpen választhatunk ki két embert. (1 pont)

A komplementer módszert használva az összes lehetséges esetből kivonjuk, azoknak az eseteknek a számát, amikor egyik kiválasztott személy sem volt moziban. (1 pont)

Két olyan embert, aki nem járt moziban, $\binom{8}{2}(=28)$-féleképpen választhatunk ki. (1 pont)

A kedvező esetek száma $190-28=162$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{162}{190}\approx 0{,}853$ (1 pont)

c) Az adatok terjedelme 2, továbbá az adatok között szerepel az 1 és a 2, ezért a válaszok az 1, 2 és 3 számok közül kerülnek ki. (1 pont)

A számok egyetlen módusza az 1, ezért legalább négy 1-es válasz volt. (1 pont)

A nagyság szerint sorba rendezett válaszok közül az ötödik 2 (így pontosan négy 1-es válasz volt). (1 pont)

A válaszok összege (az átlag alapján) 16. (1 pont)

A számok között szerepel legalább egy 3-as, így a hiányzó három szám (melyek 2-esek vagy 3-asok) összege 7. Ez a három szám 2, 2, 3. (1 pont)

A kilenc szám: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. (1 pont)

Összesen: 17 pont

59) Anna, Bence, Cili, Dénes véletlenszerűen leülnek egymás mellé egy padra. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy sem két fiú, sem két lány nem ül egymás mellé! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

Négyen $4! = 24$-féle sorrendben ülhetnek le a padra (összes eset száma). (1 pont)

Az egyik szélső helyre négy személy közül, a mellette lévő helyre (az ellenkező neműek közül) két személy közül választhatunk. (Ezután a többi helyen ülők személye már meghatározott).

A kedvező esetek száma $4 \cdot 2 = 8$. (2 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{8}{24} = \mathbf{\frac{1}{3}}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont