Abszolútértékes és gyökös kifejezések

1) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}} < 0$$ (2 pont)

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$, ahol x valós szám és $x>-1$ (6 pont)

b) $2\cos^2 x = 4-5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl (11 pont)

3) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 20$ (6 pont)

b) $25^{\sqrt{x}} < 5\cdot 5^{\sqrt[3]{x}}$ (6 pont)

4) Válassza ki az A halmaz elemei közül azokat a számokat, amelyek megoldásai az $\sqrt{x^2} = -x$ egyenletnek! $A=\{-1;0;1;2;3\}$ (2 pont)

5) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$|x-2|=7$$ (2 pont)

6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5-x=\sqrt{2x^2-71}$ (6 pont)

b) $\sin^2 x = 1+2\cos x$ (6 pont)

7) Adja meg azt az x valós számot, melyre a következő egyenlőség teljesül!

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}=2$$ (2 pont)

8)

a) Melyik $(x;y)$ valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left.\begin{aligned}2x-6y&=4\\3x+5y&=20\end{aligned}\right\}$$ (6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x+2}=x$$ (6 pont)

9) Mely x valós számokra igaz, hogy $|x|=7$? (2 pont)

10) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x-4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x)=6$? (2 pont)

11)

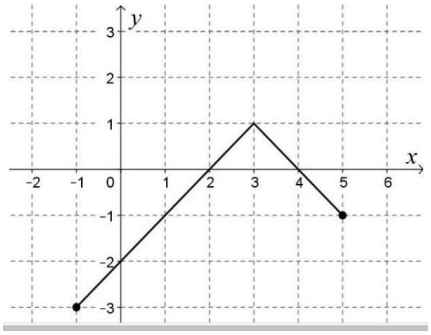
a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x+4=\sqrt{4x+21}$$ (6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számot jelöl!

$$\left.\begin{aligned}3x+y&=16\\5x-2y&=45\end{aligned}\right\}$$ (6 pont)

12) Az ábrán a $[-1;5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.
Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



A: $x \mapsto |x-3|+1$

B: $x \mapsto -|x+3|+1$

C: $x \mapsto -|x-3|+1$

D: $x \mapsto -|x+3|-1$

13) Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait a valós számok halmazán!
$|x^2-8|=8$ (3 pont)

14)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!
$|x-3|=3x-1$ (7 pont)

Az $f:\mathrm{R}\mapsto\mathbb{R};f(x)=a\cdot x+b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x=4$ helyen a függvényérték 6.

b) Adja meg a és b értékét! (6 pont)

15) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

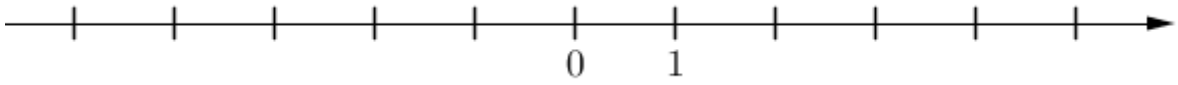
A: $\sqrt{(-5)^2}=5$

B: Minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2}=x$.

C: $2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$

16) Az x-nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! (2 pont)

17) Ábrázolja az alábbi számegyenesen az $|x|<3$ egyenlőtlenség valós megoldásait! (2 pont)



Egyenletek, egyenlőtlenségek

1)

a) Oldja meg a $7+x<-2\cdot(x-2)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

(2 pont)

b) Oldja meg az $x^2+x-6\le 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

(4 pont)

c) Legyen az A halmaz a $7+x<-2\cdot(x-2)$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza, B pedig az $x^2+x-6\le 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza. Adja meg az $A\cup B$, $A\cap B$ és $B\setminus A$ halmazokat!

(6 pont)

2) Az $a=2$ és $b=-1$ esetén számítsa ki C értékét, ha $\frac{1}{C}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$! (2 pont)

3) Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x\cdot y&=600\\ (x-10)\cdot(y+5)&=600\end{aligned}\right\}$$

(12 pont)

4) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet: $-2x^2+13x+24=0$!

(2 pont)

5)

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$(x+2)^2-90=5\cdot(0{,}5x-17)$$

(5 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán $\frac{3-x}{7x}<2$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

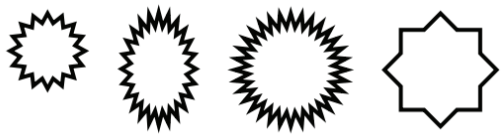
6) Ha az eredetileg $I_0\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugár x mm $(x\ge 0)$ mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x)=I_0\cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}}\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0=800\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15%-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!) (6 pont)

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel?



(8 pont)

7) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$x^2 - 25 = 0$ (2 pont)

8) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a) $x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$ (5 pont)

b) $-3x^2 - 1 \le -4$ (7 pont)

Mindkét esetben ábrázolja a megoldáshalmazt számegyenesen!

9) Mekkora az $x^2 - 6{,}5x - 3{,}50$ egyenlet valós gyökeinek összege, illetve szorzata? Válaszát indokolja! (3 pont)

10) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$ (5 pont)

b) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2} = 1$, ahol $x \neq 0$ és $x \neq -2$ (7 pont)

11)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \ge 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi; \pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

12) Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá: $f(x) = 5x + 5{,}25$ és $g(x) = x^2 + 2x + 3{,}5$

a) Számítsa ki az alábbi táblázatok hiányzó értékeit! (3 pont)

x	3	x	
$f(x)$		$g(x)$	2,5

b) Adja meg a g függvény értékkészletét! (3 pont)

c) Oldja meg az $5x + 5{,}25 > x^2 + 2x + 3{,}5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (6 pont)

13) Mely x valós számokra igaz, hogy $x^2 = 9$? (2 pont)

14)

a) Melyik $(x; y)$ valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left.\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ 3x + 5y &= 20 \end{aligned}\right\}$$ (6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$\sqrt{x+2} = x$ (6 pont)

15) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{5} = 4$ (5 pont)

b) $\lg(x-1) + \lg 4 = 2$ (7 pont)

16)

a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$x+4=\sqrt{4x+21}$ (6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számot jelöl!

$$\left.\begin{aligned}3x+y&=16\\5x-2y&=45\end{aligned}\right\}$$ (6 pont)

17) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$(x-3)^2+2x=14$

Válaszát indokolja! (3 pont)

18) Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.

a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt? (10 pont)

b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Annának, illetve Zsuzsinak az osztozkodás után? (7 pont)

19) 2001-ben a havi villanyszámla egy háztartás esetében három részből állt. az alapdíj 240 Ft, ez független a fogyasztástól, a nappali áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 19,8 Ft, az éjszakai áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 10,2 Ft. A számla teljes értékének 12 %-át kell még általános forgalmi adóként (ÁFA) kifizetnie a fogyasztónak.

a) Mennyit fizetett forintra kerekítve egy család abban a hónapban, amikor a nappali fogyasztása 39 kWh, az éjszakai fogyasztása 24 kWh volt? (3 pont)

b) Adjon képletet a befizetendő számla F összegére, ha a nappali fogyasztás x kWh, és az éjszakai fogyasztás pedig y kWh! (3 pont)

c) Mennyi volt a család fogyasztása a nappali, illetve és az éjszakai áramból abban a hónapban, amikor 5456 Ft-ot fizettek, és tudjuk, hogy a nappali fogyasztásuk kétszer akkora volt, mint az éjszakai? (8 pont)

d) Mekkora volt a nappali és az éjszakai fogyasztás aránya abban a hónapban, amikor a kétféle fogyasztásért (alapdíj és ÁFA nélkül) ugyanannyit kellett fizetni? (3 pont)

20) Egy farmernadrág árát 20 %-kal felemelték, majd amikor nem volt elég nagy a forgalom, az utóbbi árat 25 %-kal csökkentették. Most 3600 Ft-ért lehet a farmert megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszát számítással indokolja! (4 pont)

21) Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítésekor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.

a) Hány sor van a fenyők parcellájában? Hány fenyőfa van egy sorban? (10 pont)

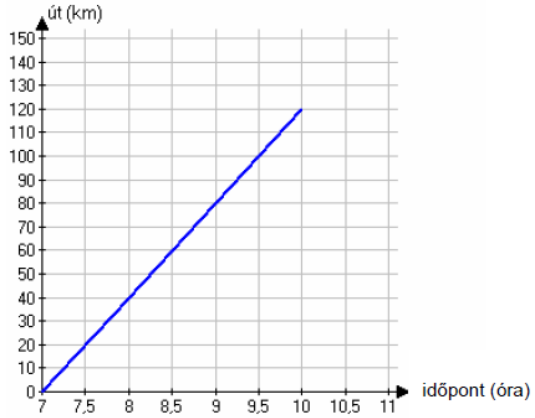
b) Hány platánfát telepítettek? (2 pont)

22) Bea édesapja két és félszer olyan idős most, mint Bea. 5 év múlva az édesapa 50 éves lesz. Hány éves most Bea? Válaszát indokolja! (3 pont)

23) Ha fél kilogramm narancs 75 Ft-ba kerül, akkor hány kilogramm narancsot kapunk 300 Ft-ért? (2 pont)

24) Egy vállalat 250 000 Ft-ért vásárol egy számítógépet. A gép egy év alatt 10%-ot veszít az értékéből. Mennyi lesz a gép értéke 1 év elteltével? Írja le a számítás menetét! (3 pont)

25) Budapestről reggel 7 órakor egy tehervonat indul Debrecenbe, amely megállás nélkül egyenletes sebességgel halad. A koordinátarendszerben a tehervonat által megtett utat ábrázoltuk az idő függvényében.



a) Mekkora utat tett meg a tehervonat az első órában? (2 pont)
b) Számítsa ki, hogy hány óra alatt tesz meg a tehervonat 108 kilométert? (2 pont)

Budapestről reggel 7 óra 30 perckor egy gyorsvonat is indul ugyanazon az útvonalon Debrecenbe, amely megállás nélkül 70 km/h állandó nagyságú sebességgel halad.

c) Rajzolja be a fenti koordinátarendszerbe a gyorsvonat út-idő grafikonját a 7 óra 30 perc és 9 óra 30 perc közötti időszakban! (2 pont)
d) Számítsa ki, hogy mikor és mekkora út megtétele után éri utol a gyorsvonat a tehervonatot! (11 pont)

26) Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $\lg p_m = 0{,}8 \cdot \lg p_v + 0{,}301$ összefüggés áll fenn.

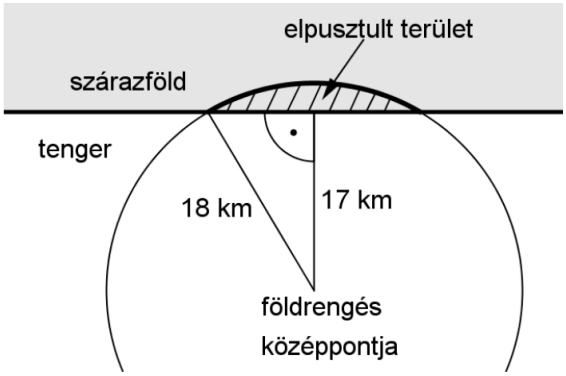
A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

a) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén? (4 pont)
b) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat? (6 pont)
c) Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást? (7 pont)

A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

27) Egy szám $\frac{5}{6}$ részének a 20%-a 31. Melyik ez a szám? Válaszát indokolja! (3 pont)

28) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

29) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 5x + y &= 3 \\ x + y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Válaszát indokolja! (4 pont)

30) Az $x^2 + bx - 10 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 49. Számítsa ki b értékét! Számítását részletezze! (3 pont)

31) Oldja meg az $x^2 - 4x - 21 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán! (2 pont)

32) Az x -nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! (2 pont)

33) Oldja meg az alábbi egyenletet a nemnegatív valós számok halmazán!

$\sqrt{x} = 4^3$ (2 pont)

34)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$7-2\cdot(x+5)=\frac{x+6}{4}+\frac{x+2}{2}$$ (5 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$x^2-x-2\le 0$$ (5 pont)

35)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$(2x-3)^2=x^2$$ (5 pont)

b) Hány olyan (pozitív) háromjegyű páratlan szám van a tízes számrendszerben, amelynek minden számjegye különböző? (5 pont)

36) Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény: $f: x\mapsto (x-1)^2-4$.

a) Számítsa ki az f függvény $x=-5$ helyen felvett helyettesítési értékét! (2 pont)

b) Ábrázolja az f függvényt, és adja meg szélsőértékének helyét és értékét! (5 pont)

c) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $(x-1)^2-4=x-1$. (5 pont)

Egyszerűsítések, átalakítások

1) Egyszerűsítse a következő törtet! (x valós szám, $x \neq 0$) (2 pont)

$$\frac{x^2 - 3x}{x}$$

2) A d és az e tetszőleges valós számot jelöl. Adja meg annak az egyenlőségnek a betűjelét, amelyik biztosan igaz (azonosság)! (2 pont)

a) $d^2 + e^2 = (d+e)^2$

b) $d^2 + 2de + e^2 = (d+e)^2$

c) $d^2 + de + e^2 = (d+e)^2$

3) Írja fel az $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$ kifejezést (ahol x és y nem 0) úgy, hogy ne szerepeljen benne negatív kitevő! (2 pont)

4) Döntse el mindegyik egyenlőségről, hogy igaz, vagy hamis minden valós szám esetén!

a) $b^3 + b^7 = b^{10}$ (1 pont)

b) $\left(b^3\right)^7 = b^{21}$ (1 pont)

c) $b^4 b^5 = b^{20}$ (1 pont)

5) Jelölje meg annak a kifejezésnek a betűjelét, amelyik az $ax^2 + dx + e = 0$ egyenlet diszkriminánsa!

a) $d^2 - ae$

b) $d^2 - 4ae$

c) $\sqrt{d^2 - 4ae}$ (2 pont)

6) Az a és b valós számokról tudjuk, hogy $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = 20$. Mekkora $a + b$ értéke? (2 pont)

7) Válassza ki azokat az egyenlőségeket, amelyek nem igazak minden valós számra! (2 pont)

a) $\sqrt{(x-2)^4} = (x-2)^2$

b) $\sqrt{(x-2)^2} = (x-2)$

c) $\sqrt{(x-2)^2} = 2 - x$

8) Egyszerűsítse a következő törtet! (a; b valós szám, $a \cdot b \neq 0$)!

$$\frac{a^2 b - 2ab}{ab}$$ (2 pont)

9) Egyszerűsítse az $\frac{x+8}{x^2 + 8x}$ algebrai törtet! Tudjuk, hogy $x \notin \{-8; 0\}$. (2 pont)

10) Egyszerűsítse a következő törtet, ahol $b \neq 6$!

$$\frac{b^2-36}{b-6}$$

(2 pont)

11) Ha $a \neq 1$, akkor az alábbi egyenletek közül melyik azonosság?

a) $\frac{a^2-a}{a-1}=a-1$

b) $\frac{a^2-a}{a-1}=a$

c) $\frac{a^2-a}{a-1}=a+1$

d) $\frac{a^2-a}{a-1}=0$

(2 pont)

12) Egyszerűsítse az alábbi törtet, ahol $x \neq \pm 3$!

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$$

(3 pont)

13) Végezze el a következő műveleteket, és vonja össze az egynemű kifejezéseket! A számítás menetét részletezze!

$$(x-3)^2+(x-4)(x+4)-2x^2+7x$$

(3 pont)

14) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Minden valós szám abszolút értéke pozitív.

B: $16^{\frac{1}{4}}=2$

C: Ha egy szám osztható 6-tal és 9-cel, akkor biztosan osztható 54-gyel is.

(2 pont)

15) Egyszerűsítse az $\frac{a^3+a^2}{a+1}$ törtet, ha $a \neq -1$! (2 pont)

Értelmezési tartomány, értékkészlet

1) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség? (2 pont)

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}} < 0$$

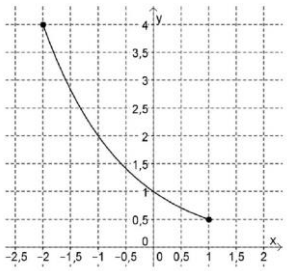
2) Melyek azok az x valós számok, amelyekre nem értelmezhető az $\frac{1}{x^2-9}$ tört? Válaszát indokolja! (2 pont)

3) A valós számok halmazának mely legbővebb részhalmazán értelmezhető az $\frac{1}{|x|-2}$ kifejezés? (2 pont)

4) Mely valós számokra értelmezhető az alábbi kifejezés?

$$\sqrt{\frac{1}{2x+7}}$$ (2 pont)

5) Az ábrán az $f:[-2;1] \Rightarrow \mathbb{R};\ f(x)=a^x$ függvény grafikonja látható. (3 pont)



a) Adja meg az f függvény értékkészletét!

b) Határozza meg az a szám értékét!

6)

a) Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2(3-x)$ kifejezés? (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\log_2(3-x)=0$$ (2 pont)

7) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1+\cos x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

8) Határozza meg a $]-2;2[$ (nyílt) intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2-1$ függvény értékkészletét! (3 pont)

Exponenciális és logaritmusos feladatok

1) Oldja meg az alábbi egyenleteket!
   a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$, ahol x valós szám és $x>-1$ (6 pont)
   b) $2\cos^2 x=4-5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl (11 pont)

2) Mekkora x értéke, ha $\lg x=\lg 3+\lg 25$? (2 pont)

3) Oldja meg a következő egyenleteket:
   a) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$ (6 pont)
   b) $\sin^2 x=2\sin x+3$ (6 pont)

4) Adott a következő egyenletrendszer:
   (1) $2\lg(y+1)=\lg(x+11)$
   (2) $y=2x$
   a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)
   b) Milyen x, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)
   c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)
   d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

5) Oldja meg a pozitív valós számok halmazán a $\log_{16} x=-\frac{1}{2}$ egyenletet! Jelölje a megadott számegyenesen az egyenlet megoldását! (3 pont)

6) Melyik a nagyobb: $A=\frac{\sin 7\pi}{2}$ vagy $B=\log_2\frac{1}{4}$? (Írja a megfelelő relációs jelet a válaszmezőbe! Válaszát indokolja!) (2 pont)

7) Adja meg a $\lg x^2=2\lg x$ egyenlet megoldáshalmazát! (2 pont)

8)
   a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?
   $5^{x-2}<5^{13-2x}$ (4 pont)
   b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
   $9^{\sqrt{x}}<3^{x-3}$ (8 pont)

9) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!
   a) $\lg(x+15)^2-\lg(3x+5)=\lg 20$ (6 pont)
   b) $25^{\sqrt{x}}<5\cdot 5^{3\sqrt{x}}$ (6 pont)

10) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!
   a) $(\log_2 x-3)\cdot\left(\log_2 x^2+6\right)=0$ (7 pont)
   b) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$ (10 pont)

11) Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét! (2 pont)

12) Mennyi az $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ kifejezés értéke, ha $x=-1$? (2 pont)

13) Az a, b és c tetszőleges pozitív valós számokat jelölnek. Tudjuk, hogy $\lg x = 3\lg a - \lg b + \frac{1}{2}\lg c$

Válassza ki, hogy melyik kifejezés adja meg helyesen x értékét! (3 pont)

A: $x = \frac{3a}{b} + \frac{1}{2}c$

B: $x = a^3 - b + \sqrt{c}$

C: $x = \frac{a^3}{b \cdot \sqrt{c}}$

D: $x = \frac{a^3 \cdot c^{-1}}{b}$

E: $x = a^3 - b\sqrt{c}$

F: $x = \frac{a^3 \cdot \sqrt{c}}{b}$

G: $x = \frac{a^3 \cdot \frac{1}{c}}{b}$

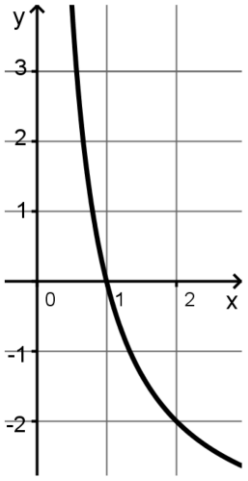
14) A b, c és d pozitív számokat jelölnek. Tudjuk, hogy $\lg b = \frac{\lg c - \lg d}{3}$.

Fejezze ki az egyenlőségből b-t úgy, hogy abban c és d logaritmusa ne szerepeljen! (2 pont)

15) Melyik szám nagyobb?

$A = \lg\frac{1}{10}$, vagy $B = \cos 8\pi$ (2 pont)

16) István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x\,(x > 0)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).



Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.

c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. (2 pont)

17) Adja meg azokat az x valós számokat, melyekre teljesül: $\log_2 x^2 = 4$. Válaszát indokolja! (3 pont)

18) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$ (5 pont)

b) $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2}$, ahol $x \neq 0$ és $x \neq 2$ (7 pont)

19)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

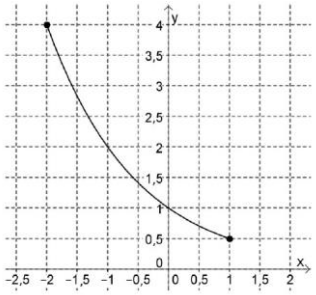
20) Melyik az az x természetes szám, amelyre $\log_3 81 = x$? (2 pont)

21) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{5}=4$ (5 pont)

b) $\lg(x-1)+\lg 4=2$ (7 pont)

22) Az ábrán az $f:[-2;1]\Rightarrow\mathbb{R};\ f(x)=a^x$ függvény grafikonja látható. (3 pont)

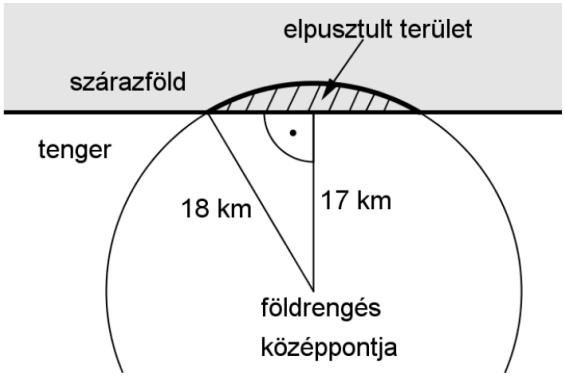


a) Adja meg az *f* függvény értékkészletét!

b) Határozza meg az *a* szám értékét!

23) Adja meg az *x* értékét, ha $\log_2(x+1)=5$! (2 pont)

24) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M=-4{,}42+\frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben *E* a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), *M* pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1{,}344\cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

25)

a) Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2(3-x)$ kifejezés? (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$\log_2(3-x)=0$ (2 pont)

26) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előrejelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? (5 pont)

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

27) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2} = x$.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

28) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0{,}854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)
(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

29) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

$2^x = 10$ (2 pont)

30) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)

1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg: $f(x) = 51 \cdot 1{,}667^x$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

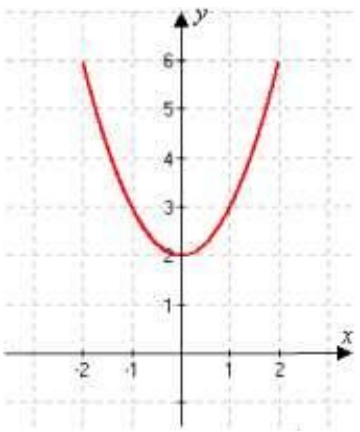
d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózatból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

31) Adja meg azt az x valós számot, amelyre $\log_2 x = -3$. (2 pont)

32) Adja meg x értékét, ha $5^x = \left(5^2 \cdot 5 \cdot 5^4\right)^3$. (2 pont)

Függvények

1) Az ábrán egy $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)

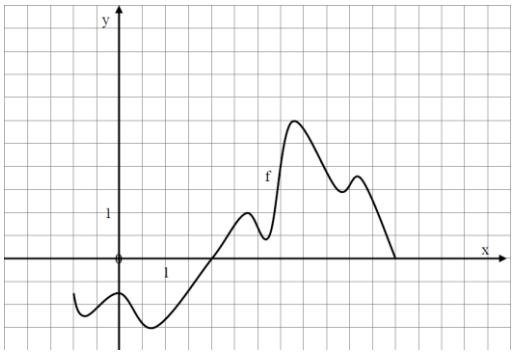


a) $x \mapsto x^2 - 2$
b) $x \mapsto x^2 + 2$
c) $x \mapsto (x+2)^2$

2) Határozza meg az 1. feladatban megadott, $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény értékkészletét! (3 pont)

3) Ábrázolja az $f(x) = 0,5x - 4$ függvényt a $[-2;10]$ intervallumon! (2 pont)

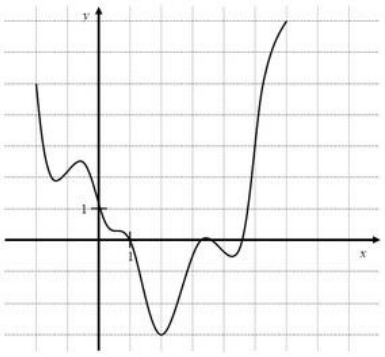
4) A $[-1;6]$-on értelmezett $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát a grafikonjával adtuk meg. Határozza meg az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldását! Adja meg $f(x)$ legnagyobb értékét! (3 pont)



5) Az f és g függvényeket a valós számok halmazán értelmezzük a következő képletek szerint: $f(x) = (x+1)^2 - 2$; $g(x) = -x - 1$

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az f függvényt! (Az ábrán szerepeljen a grafikonnak legalább a $-3,5 \le x \le 1$ intervallumhoz tartozó része.) (4 pont)
b) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben a g függvényt! (2 pont)
c) Oldja meg az $(x+1)^2 - 2 \le -x - 1$ egyenlőtlenséget! (6 pont)

6) Az f függvényt a $[-2;6]$ intervallumon a grafikonjával értelmeztük. Mekkora f legkisebb, illetve legnagyobb értéke? Milyen x értékekhez tartoznak ezek a szélsőértékek? (4 pont)



7) Adott a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2\lg(y+1) &= \lg(x+11) \\ y &= 2x \end{aligned}\right\}$$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)

b) Milyen *x*, illetve *y* valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)

d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

8) Adja meg az $5x-3y=2$ egyenletű egyenes és az *y* tengely metszéspontjának koordinátáit! (2 pont)

9)

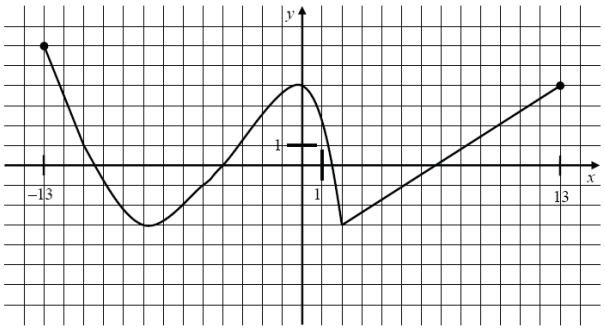
a) Ábrázolja a $[-2;4]$-on értelmezett, $x \to (x-1,5)^2+0,75$ hozzárendeléssel megadott függvényt! (2 pont)

b) Állapítsa meg a fenti függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

c) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2-3x+3}=1-2x$ egyenletet! (8 pont)

10) A valós számok halmazán értelmezett $x \to -(x-1)^2+4$ függvénynek minimuma vagy maximuma van? Adja meg a szélsőérték helyét és értékét! (3 pont)

11) Adjon meg egy olyan zárt intervallumot, ahol a grafikonjával megadott alábbi függvény csökkenő! (2 pont)



12) Adott az $f: \mathbb{R}^- \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{-x}$ függvény. Határozza meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték 4. (2 pont)

13) Adja meg a $[-2;3]$ intervallumon értelmezett $f(x)=x^2+1$ függvény értékkészletét! (3 pont)

14) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett az $x \mapsto x^2-5x$ másodfokú függvény zérushelyeit! Számítsa ki a függvény helyettesítési értékét az 1,2 helyen! (3 pont)

15) Mennyi az $f(x)=-|x|+10$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legnagyobb értéke, és hol veszi fel ezt az értéket? (2 pont)

16)

a) Fogalmazza meg, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ f(x)=|x+2|-1$ függvény grafikonja milyen transzformációkkal származtatható az $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ f_0(x)=|x|$ függvény grafikonjából! Ábrázolja az f függvényt a $[-6;6]$ intervallumon! (5 pont)

b) Írja fel az $A(-4;1)$ és $B(5;4)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét! Mely pontokban metszi az *AB* egyenes az *f* függvény grafikonját? (Válaszát számítással indokolja!) (7 pont)

17) Adja meg a $3x+2y=18$ egyenletű egyenes és az *y* tengely metszéspontjának koordinátáit! (2 pont)

18) A valós számok halmazán értelmezett *f* másodfokú függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját a $v(2;-4,5)$ vektorral eltoltuk.

a) Adja meg az *f* függvény hozzárendelési utasítását képlettel! (3 pont)

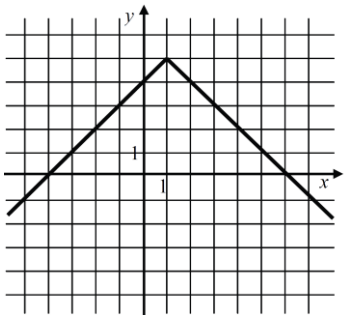
b) Határozza meg *f* zérushelyeit! (4 pont)

c) Ábrázolja *f* grafikonját a [–2; 6] intervallumon! (4 pont)

Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

d) $\frac{1}{2}x^2\le 2x+\frac{5}{2}$ (6 pont)

19) A valós számok halmazán értelmezett $x\mapsto|x|$ függvényt transzformáltuk. Az alábbi ábra az így kapott *f* függvény grafikonjának egy részletét mutatja. Adja meg *f* hozzárendelési utasítását képlettel! (3 pont)



20) Legyen *f* a valós számok halmazán értelmezett függvény, $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Mennyi az *f* függvény helyettesítési értéke, ha $x=\frac{\pi}{3}$? Írja le a számolás menetét! (3 pont)

21) Az $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto 3+\log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

A: $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto 3\log_2 x$

B: $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto\log_2(8x)$

C: $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto\log_2(3x)$

D: $\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}, x\mapsto\log_2(x^3)$ (2 pont)

22)

a) Rajzolja meg derékszögű koordinátarendszerben a $]-1;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto -|x-2|+3$ hozzárendelésű függvény grafikonját! (4 pont)

b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét, és adja meg az összes zérushelyét! (3 pont)

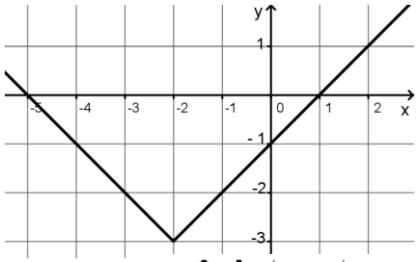
c) Döntse el, hogy a $P(3,2;1,58)$ pont rajta van-e a függvény grafikonján! Válaszát számítással indokolja! (2 pont)

d) Töltse ki az alábbi táblázatot, és adja meg a függvényértékek (a hét szám) mediánját! (3 pont)

23) Milyen valós számokat jelöl az *a*, ha tudjuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő? (2 pont)

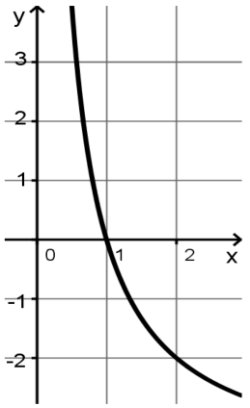
24) Adja meg képlettel egy olyan, a valós számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési utasítását, amelynek (abszolút) maximuma van! A megadott függvénynek állapítsa meg a maximumhelyét is! (3 pont)

25) A következő két függvény mindegyikét a valós számok halmazán értelmezzük: $f(x)=3\sin x$; $g(x)=\sin 3x$.
Adja meg mindkét függvény értékkészletét! (2 pont)



26) Az ábrán a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x+a|+b$ függvény grafikonjának egy részlete látható. Adja meg *a* és *b* értékét! (2 pont)

27) István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x \,(x>0)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).
Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!



a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.

c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. (2 pont)

28) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=(x+2)^2+4$ függvény. Adja meg az *f* függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

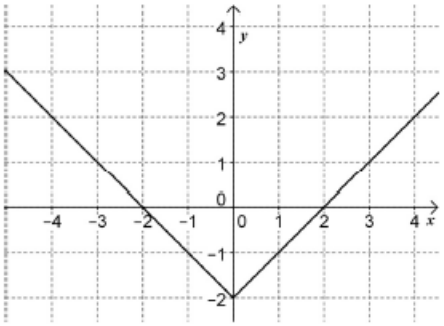
29) Az alább felsorolt, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk. A három függvény közül kettőnek a grafikonja megegyezik, a harmadik eltér tőlük. Melyik függvény grafikonja tér el a másik két függvény grafikonjától? (2 pont)

a) $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$

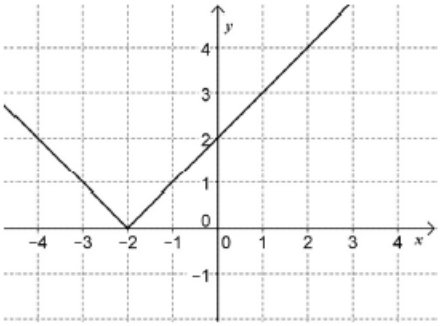
b) $x \mapsto \sin x$

c) $x \mapsto \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

30) Az alábbi hozzárendelési utasítással megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények közül kettőnek egy-egy részletét ábrázoltuk. Adja meg a grafikonokhoz tartozó hozzárendelési utasítások betűjelét! (2 pont)



1)



2)

A) $x \mapsto |x+2|$ B) $x \mapsto |x-2|$ C) $x \mapsto |x|-2$ D) $x \mapsto |x|+2$

31) Adja meg az $x \to x^2+10x+21\ (x \in \mathbb{R})$ másodfokú függvény minimumhelyét és minimumának értékét! Válaszát indokolja! (4 pont)

32) Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá: $f(x)=5x+5{,}25$ és $g(x)=x^2+2x+3{,}5$

a) Számítsa ki az alábbi táblázatok hiányzó értékeit! (3 pont)

x	3	x	
$f(x)$		$g(x)$	2,5

b) Adja meg a g függvény értékkészletét! (3 pont)

c) Oldja meg az $5x+5{,}25 > x^2+2x+3{,}5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (6 pont)

33) Adja meg az alábbi hozzárendelési szabályokkal megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét!

$f(x)=2\sin x$

$g(x)=\cos 2x$ (2 pont)

34) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm^2-ben mért számértéke. (1 pont)

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

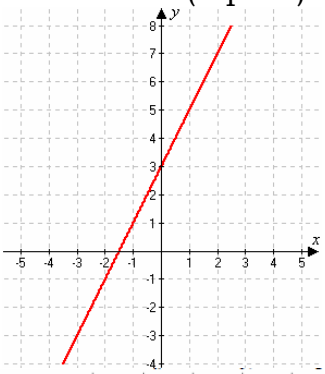
35)

a) Rajzolja fel a $[-3;3]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto |x|-1$ függvény grafikonját! (2 pont)

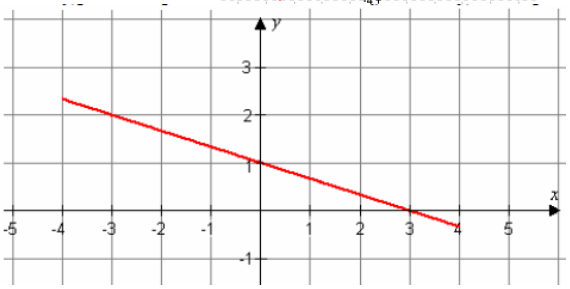
b) Mennyi a legkisebb függvényérték? (1 pont)

36) Melyik az ábrán látható egyenes egyenlete az alábbiak közül? (2 pont)

A: $y = 2x + 3$
B: $y = -2x + 3$
C: $y = 2x - 1,5$
D: $y = 2x - 3$



37) Az ábrán egy $[-4;4]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki, hogy melyik formula adja meg helyesen a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



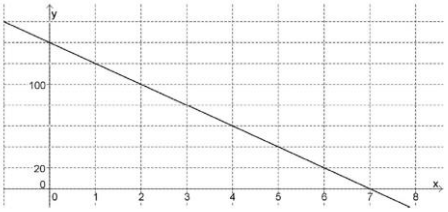
a) $x \mapsto \frac{1}{3}x + 1$

b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 1$

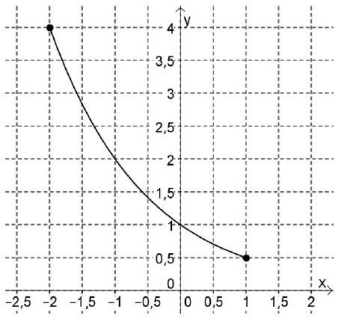
c) $x \mapsto -3x + 1$

d) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 3$

38) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x - 4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x) = 6$? (2 pont)



39) Az ábrán az $x \mapsto m \cdot x + b$ lineáris függvény grafikonjának egy részlete látható. Határozza meg m és b értékét! (3 pont)



40) Az ábrán az $f : [-2;1] \Rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$ függvény grafikonja látható. (3 pont)

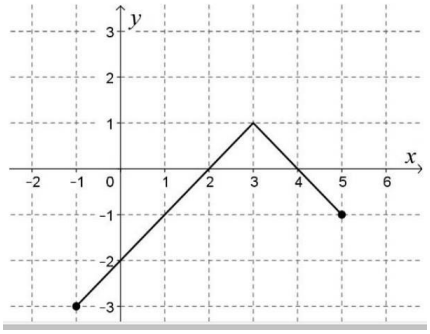
a) Adja meg az f függvény értékkészletét!
b) Határozza meg az a szám értékét!

41) Válassza ki az f függvény hozzárendelési szabályát az A, B, C, D lehetőségek közül úgy, hogy az megfeleljen az alábbi értéktáblázatnak! (2 pont)

x	-2	0	2
$f(x)$	-4	0	-4

A: $f(x) = 2x$ B: $f(x) = x^2$ C: $f(x) = -2x$ D: $f(x) = -x^2$

42) Az ábrán a $[-1;5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)



A: $x \mapsto |x - 3| + 1$

B: $x \mapsto -|x + 3| + 1$

C: $x \mapsto -|x - 3| + 1$

D: $x \mapsto -|x + 3| - 1$

43)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$ (6 pont)

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

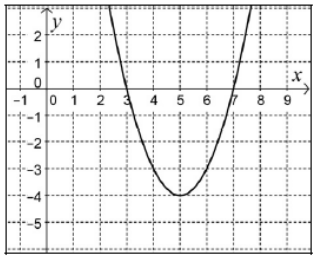
I) Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

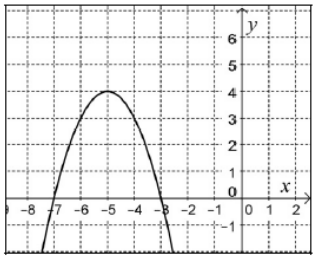
III) A $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

44) Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto -(x-5)^2 + 4$ függvény.

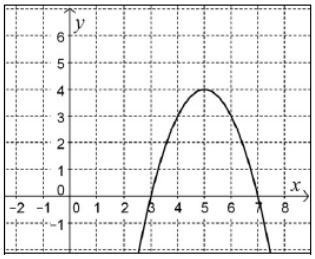
Melyik ábrán látható e függvény grafikonjának egy részlete? (2 pont)



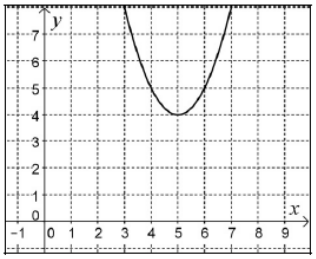
A



B



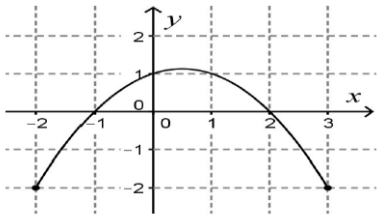
C



D

45) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1 + \cos x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

46) Az ábrán látható függvény értelmezési tartománya a $[-2;3]$ intervallum, két zérushelye a -1 és 2. Az értelmezési tartományának mely részhalmazán vesz fel a függvény pozitív értéket? (2 pont)



47) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto (x-2)^2$ függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

48)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$|x-3| = 3x-1$$ (7 pont)

Az $f : \mathrm{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x = 4$ helyen a függvényérték 6.

b) Adja meg a és b értékét! (6 pont)

49) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 1 + \sin x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

50) Az alábbi függvények a pozitív számok halmazán értelmezettek:

$f(x) = -5x$

$g(x) = 5\sqrt{x}$

$h(x) = \frac{5}{x}$

$i(x) = 5 - x$

Adja meg annak a függvénynek a betűjelét, amelyik fordított arányosságot ír le! (2 pont)

51) Ábrázolja a $[-3;6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto |x-2|-3$ függvényt! (4 pont)

52)

a) Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit! (3 pont)

b) Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely -3-hoz -1-et és 3-hoz 7-et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax + b$ alakban adja meg!) (5 pont)

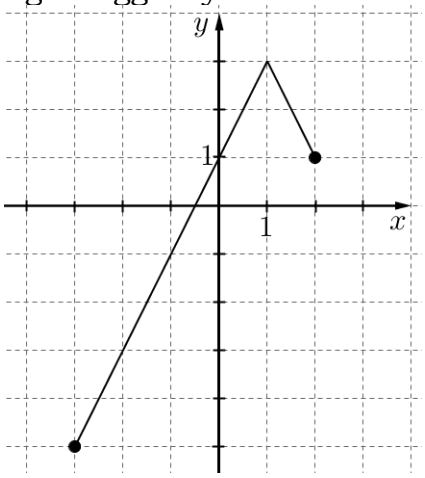
c) Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz! (9 pont)

53) Az alábbi hozzárendelési utasítások közül adja meg annak a betűjelét, amely a 0-hoz 4-et, a 2-höz pedig 0-t rendel!

A: $x \mapsto 2x+4$ B: $x \mapsto 2x-4$ C: $x \mapsto -2x+4$ D: $x \mapsto -2x-4$

(2 pont)

54) Az alábbi ábrán a $[-3;2]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto -2|x-1|+3$ függvény grafikonja látható. Adja meg a függvény értékkészletét! (2 pont)



55) Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény: $f: x \mapsto (x-1)^2 - 4$.

a) Számítsa ki az f függvény $x = -5$ helyen felvett helyettesítési értékét! (2 pont)

b) Ábrázolja az f függvényt, és adja meg szélsőértékének helyét és értékét! (5 pont)

c) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $(x-1)^2 - 4 = x - 1$. (5 pont)

Halmazok

1) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.
Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.
a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)
Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.
b) A feladat szövege alapján töltse ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)
c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)
d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

2) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai szakosztály közül legalább az egyikben. Az atlétika szakosztályban 36 tanuló sportol rendszeresen, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda szakosztály munkájában is részt vesz.
a) Készítsen halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak feltüntetésével! (4 pont)
b) Hányan sportolnak a kosárlabda szakosztályban? (4 pont)
c) Egy másik iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is? (4 pont)

3) Az A és a B halmazokról a következőket tudjuk: $A \cap B = \{1;2\}$, $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$, $A \setminus B = \{5;7\}$. Adja meg az A és a B halmaz elemeit! (4 pont)

4) Egy 10 tagú csoportban mindenki beszéli az angol és a német nyelv valamelyikét. Hatan beszélnek közülük németül, nyolcan angolul. Hányan beszélik mindkét nyelvet? Válaszát indokolja számítással, vagy szemléltesse Venn-diagrammal! (3 pont)

5) Sorolja fel a H halmaz elemeit, ha $H = \{\text{kétjegyű négyzetszámok}\}$ (2 pont)

6) Egy iskola teljes tanulói létszáma 518 fő. Ők alkotják az A halmazt. Az iskola 12. C osztályának 27 tanulója alkotja a B halmazt. Mennyi az $A \cap B$ halmaz számossága? (2 pont)

7) Az A halmaz elemei a háromnál nagyobb egyjegyű számok, a B halmaz elemei pedig a húsznál kisebb pozitív páratlan számok. Sorolja fel az $A \cap B$ halmaz elemeit! (2 pont)

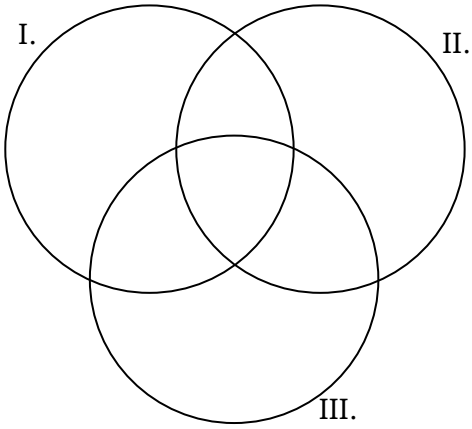
8) Egy fordítóiroda angol és német fordítást vállal. Az irodában 50 fordító dolgozik, akiknek 70%-a angol nyelven, 50%-a német nyelven fordít. Hány fordító dolgozik mindkét nyelven? Válaszát indokolja! (4 pont)

9) Sorolja fel az $A = \{1;10;100\}$ halmaz összes kételemű részhalmazát! (2 pont)

10) Az A és a B halmazok a számegyenes intervallumai: $A=[-1,5;12]$, $B=[3;20]$.
Adja meg az $A\cup B$ és a $B\cap A$ halmazokat! (4 pont)

11) Legyen az A halmaz a 10-nél kisebb pozitív prímszámok halmaza, B pedig a hattal osztható, harmincnál nem nagyobb pozitív egészek halmaza.
Sorolja fel az A, a B és az $A\cup B$ halmazok elemeit! (3 pont)

12) Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg:
I. Diákok Hangja
II. Iskolaélet
III. Miénk a suli!
Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében.
A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a suli! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5%-a olvasta.



a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt? (2 pont)
b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát! (6 pont)
c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt? (2 pont)

Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélet című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az Iskolaéletet? (7 pont)

13) Adott az A és B halmaz: $A\{a;b;c;d\}$, $B\{a;b;d;e;f\}$. Adja meg elemeik felsorolásával az $A\cap B$ és $A\cup B$ halmazokat! (2 pont)

14) Az A halmaz az 5-re végződő kétjegyű pozitív egészek halmaza, a B halmaz pedig a kilenccel osztható kétjegyű pozitív egészek halmaza.
Adja meg elemeik felsorolásával az alábbi halmazokat:
A; B; $A\cap B$; $A\setminus B$; (4 pont)

15) Jelölje $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát és $\varnothing$ az üres halmazt! Adja meg az alábbi halmazműveletek eredményét!
a) $\mathbb{N}\cap\mathbb{Z}$
b) $\mathbb{Z}\cup\varnothing$
c) $\varnothing\setminus\mathbb{N}$ (3 pont)

16) Tekintsük a következő halmazokat:

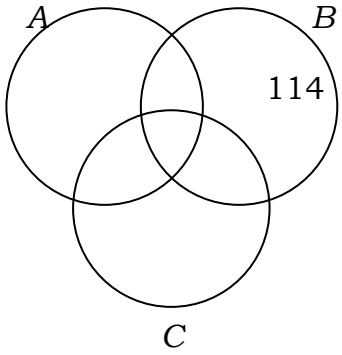
$A = \{\text{a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok}\}$

$B = \{\text{a 300-nál nem nagyobb, 3-al osztható pozitív egész számok}\}$

$A = \{\text{a 400-nál nem nagyobb, 4-el osztható pozitív egész számok}\}$

a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába! (8 pont)

	A halmaz	*B* halmaz	*C* halmaz
114	*nem eleme*	*eleme*	*nem eleme*
52			
78			
124			
216			



b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát! (3 pont)

c) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az *A* halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a *B*, sem a *C* halmaznak! (6 pont)

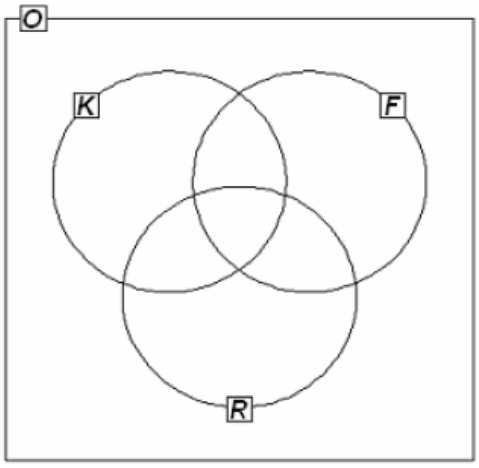
17) Az *A* és *B* halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ és $B \setminus A = \{1;2;4;7\}$.

Elemeinek felsorolásával adja meg az A halmazt! (2 pont)

18) Az *A* és *B* halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6\}$, $A \setminus B = \{1;4\}$ és $A \cap B = \{2;5\}$. Sorolja fel az *A* és a *B* halmaz elemeit! (2 pont)

19) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.

a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat! (4 pont)

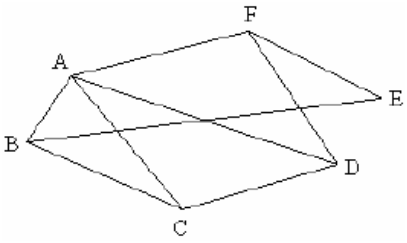


1. ábra

b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!
A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére. (2 pont)

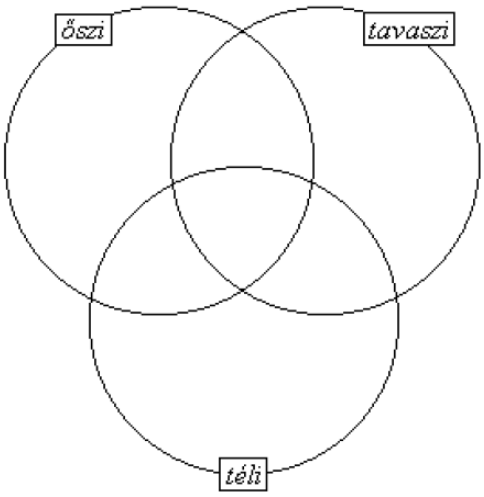
c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)

d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



2. ábra

20) Egy zeneiskola minden tanulója szerepelt a tanév során szervezett három hangverseny, az őszi, a téli, a tavaszi koncert valamelyikén. 20-an voltak, akik az őszi és a téli koncerten is, 23-an, akik a télin és a tavaszin is, és 18-an, akik az őszi és a tavaszi hangversenyen is szerepeltek. 10 olyan növendék volt, aki mindhárom hangversenyen fellépett.



a) Írja be a halmazábrába a szövegben szereplő adatokat a megfelelő helyre! (4 pont)

A zeneiskolába 188 tanuló jár. Azok közül, akik csak egy hangversenyen léptek fel, kétszer annyian szerepeltek tavasszal, mint télen, de csak negyedannyian ősszel, mint tavasszal.

b) Számítsa ki, hogy hány olyan tanuló volt, aki csak télen szerepelt! (8 pont)

c) 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5-5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba? (5 pont)

21) Az A halmaz elemei a (-5)-nél nagyobb, de 2-nél kisebb egész számok. B a pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az $A \setminus B$ halmazt! (2 pont)

22) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)

b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	3
1	94
2	89
3	14

Jóska felmérése alapján töltse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.
Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!
A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
D) Nem minden háztartásban van televízió. (2 pont)

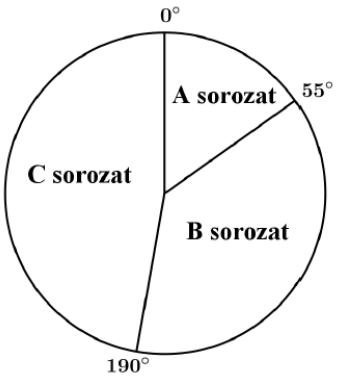
23) Legyen A halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza.
Elemeinek felsorolásával adja meg az A, a B, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (4 pont)

24) Egy osztályban 25-en tanulnak angolul, 17-en tanulnak németül. E két nyelv közül legalább az egyiket mindenki tanulja. Hányan tanulják mindkét nyelvet, ha az osztály létszáma 30? (2 pont)

25) Egy közvélemény-kutató intézet azt a feladatot kapta, hogy két alkalommal – fél év különbséggel – mérje fel a TV-ben látható három filmsorozat nézettségi adatait. Az ábrán látható kérdőíven a válaszoló vagy azt jelölhette be, hogy az A, B, és C sorozatok közül melyiket nézi (akár többet is meg lehetett jelölni), vagy azt, hogy egyiket sem nézi. Az első felméréskor kapott 600 kérdőív jelöléseit összesítve megállapították, hogy az A sorozat összesen 90 jelölést kapott, a B sorozat összesen 290-et, a C sorozat pedig összesen 230-at. Érdekes módon olyan válaszadó nem volt, aki pontosan két sorozatot nézett volna, viszont 55-en mindhárom sorozatot bejelölték.

a) A válaszolók hány százaléka nézte az A sorozatot? (2 pont)

b) Hány válaszoló nem nézte egyik sorozatot sem? (5 pont)



A második felmérés során kiválogatták azokat a kérdőíveket, amelyeken valamelyik sorozat meg volt jelölve. Ezeken a három sorozat nézettségére összesen 576 jelölés érkezett. Az adatok feldolgozói minden jelölést megszámoltak, és a végeredményről az itt látható kördiagramot készítették.

c) Számítsa ki, hogy az egyes sorozatok nézettségére hány jelölés érkezett! (5 pont)

26) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés

volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

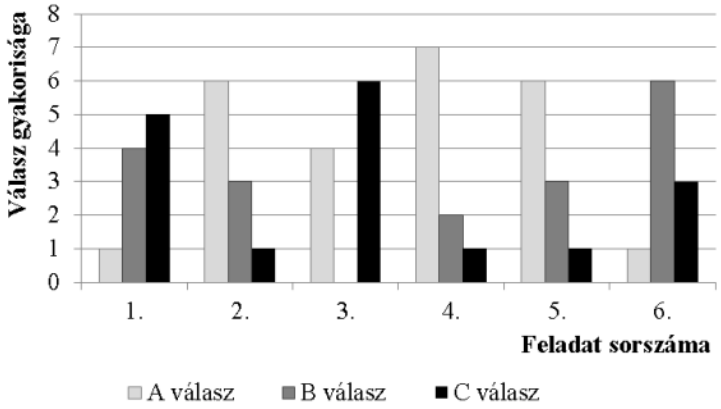
Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

27) Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldását részletezze! (3 pont)

28) Tekintsük a következő két halmazt: $G = \{1;2;3;4;6;12\}$ és $H = \{1;2;4;8;16\}$. Elemeik felsorolásával adja meg a $G \cap H$ és a $H \setminus G$ halmazokat! (2 pont)

29) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott választok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)

b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)

Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.

d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben? (5 pont)

30) Az A halmaz elemei a 12 pozitív osztói. A B elemei a 15-nél kisebb (pozitív) prímszámok. Adja meg elemei felsorolásával az A, a B és az $A \setminus B$ halmazt! (3 pont)

31) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.

a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására? (7 pont)

A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4 \cdot H - R + F$ képlettel történik, ahol H a helyes válaszok, R a rossz feladatok, F pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.

b) Hány helyes választ adott Vera? (5 pont)

Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.

c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem? (5 pont)

32) Egy 20 fős társaság tagjait az április havi szabadidős tevékenységeikről kérdezték. Mindenki három eldöntendő kérdésre válaszolt (igennel vagy nemmel).

I. Volt-e moziban?
II. Olvasott-e szépirodalmi könyvet?
III. Volt-e koncerten?

A válaszokból kiderült, hogy tizenketten voltak moziban, kilencen olvastak szépirodalmi könyvet, és négy fő járt koncerten. Öten voltak, akik moziban jártak és szépirodalmi könyvet is olvastak, négyen pedig moziban és koncerten is jártak. Hárman mindhárom kérdésre igennel válaszoltak.

a) Hány olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt? (6 pont)

A társaság 20 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legalább egyikük volt moziban április folyamán! (5 pont)

Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2.

c) Adja meg ezt a kilenc számot! (6 pont)

33) Egy 27 fős osztályban mindenki tesz érettségi vizsgát angolból vagy németből. 23 diák vizsgázik angolból, 12 diák pedig németből. Hány olyan diák van az osztályban, aki angolból és németből is tesz érettségi vizsgát? (2 pont)

Kombinatorika

1) A szóbeli érettségi vizsgán az osztály 22 tanulója közül az első csoportba öten kerülnek.
   a) Hányféleképpen lehet a 22 tanulóból véletlenszerűen kiválasztani az első csoportba tartozókat? (2 pont)

   Először mindenki történelemből felel.
   b) Hányféle sorrendben felelhet történelemből az 5 kiválasztott diák? (2 pont)

2) Egy iskolának mind az öt érettségiző osztálya 1-1 táncot mutat be a szalagavató bálon. Az A osztály palotást táncol, ezzel indul a műsor. A többi tánc sorrendjét sorsolással döntik el. Hányféle sorrend alakulhat ki? Válaszát indokolja! (3 pont)

3) Hány különböző háromjegyű pozitív szám képezhető a 0, 6, 7 számjegyek felhasználásával? (2 pont)

4) Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.
   a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak? (4 pont)
   b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás? (4 pont)
   c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet? (3 pont)
   d) Kis Anna a döntő egyik résztvevője. Ha feltesszük, hogy a résztvevők egyenlő eséllyel versenyeznek, mekkora a valószínűsége, hogy Kis Anna eléri a három dobogós hely egyikét, illetve hogy az öt rangsorolt személy egyike lesz? (6 pont)

5) Egy négytagú társaság e-mail kapcsolatban van egymással. Bármelyikük egy-egy társának legfeljebb egy levelet ír hetente. Válassza ki a felsorolt lehetőségek közül, hogy maximum hány levelet írhatott összesen egymásnak a társaság 4 tagja 1 hét alatt? Válaszát indokolja!
   a) $4 \cdot 4 = 16$
   b) $4 \cdot 3 = 12$
   c) $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (3 pont)

6) Egy televíziós játékban 5 kérdést tehet fel a játékvezető. A játék során a versenyző, ha az első kérdésre jól válaszol, 40 000 forintot nyer. Minden további kérdés esetén döntenie kell, hogy a játékban addig megszerzett pénzének 50, 75 vagy 100 százalékát teszi-e fel. Ha jól válaszol, feltett pénzének kétszeresét kapja vissza, ha hibázik, abba kell hagynia a játékot, és a fel nem tett pénzét viheti haza.
   a) Mennyi pénzt visz haza az a játékos, aki mind az öt feltett kérdésre jól válaszol, s bátran kockáztatva mindig a legnagyobb tétet teszi meg?(4 pont)
   b) Az a játékos, aki mindig helyesen válaszol, de óvatos, és a négy utolsó fordulóban pénzének csak 50%-át teszi fel, hány forintot visz haza?(4 pont)

c) A vetélkedő során az egyik versenyző az első négy kérdésre jól válaszolt. A második kérdésnél a pénzének 100 %-át, a 3., 4. és 5. kérdés esetén pénzének 75 %-át tette fel. Az 5. kérdésre sajnos rosszul válaszolt. Hány forintot vihetett haza ez a játékos? (5 pont)

d) Egy versenyző mind az 5 fordulóban jól válaszol, és közben minden fordulóban azonos eséllyel teszi meg a játékban megengedett lehetőségek valamelyikét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elnyerhető maximális pénzt viheti haza? (4 pont)

7) Októberben az iskolában hat osztály nevezett be a focibajnokságra egy-egy csapattal. Hány mérkőzést kell lejátszani, ha mindenki mindenkivel játszik, és szerveznek visszavágókat is? (3 pont)

8) A piacon az egyik zöldségespultnál hétféle gyümölcs kapható. Kati ezekből háromfélét vesz, mindegyikből 1-1 kilót. Hányféle összeállításban választhat Kati? (A választ egyetlen számmal adja meg!) (2 pont)

9) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket! (4 pont)

b) Hány mérkőzés van még hátra? (3 pont)

c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez? (5 pont)

10) Hány olyan háromjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyikben csupa különböző számjegyek szerepelnek? (2 pont)

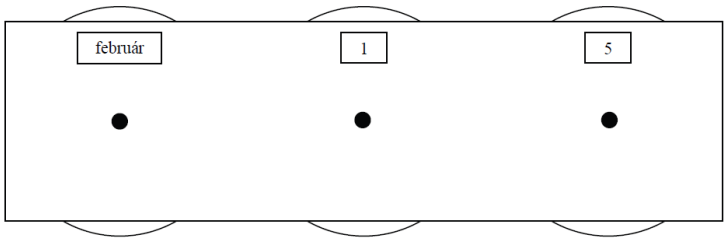
11) Az iskola rajztermében minden rajzasztalhoz két széket tettek, de így a legnagyobb létszámú osztályból nyolc tanulónak nem jutott ülőhely. Minden rajzasztalhoz betettek egy további széket, és így hét üres hely maradt, amikor ebből az osztályból mindenki leült.

a) Hány rajzasztal van a teremben? Hányan járnak az iskola legnagyobb létszámú osztályába? (6 pont)

A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3; a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3, ...8, 9 számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat”.

b) Összesen hány „dátum” forgatható ki? (3 pont)

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen megforgatva olyan dátumot kapunk, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév. (3 pont)



12) Egy 7-tagú társaságban mindenki mindenkivel egyszer kezet fogott. Hány kézfogás történt? (2 pont)

13) A 9.B osztály létszáma 32 fő. Közülük először egy osztálytitkárt, majd egy titkárhelyettest választanak. Hányféleképpen alakulhat a választás kimenetele? (2 pont)

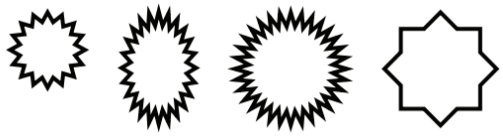
14) Ha az eredetileg $I_0\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugár x mm $(x \geq 0)$ mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}}\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0 = 800\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15 %-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!)(6 pont)

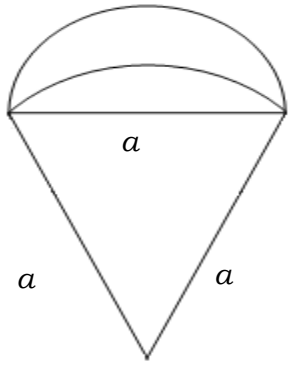
c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel?



(8 pont)

15) Annának kedden 5 órája van, mégpedig matematika (M), német (N), testnevelés (T), angol (A) és biológia (B). Tudjuk, hogy a matematikaórát testnevelés követi, és az utolsó óra német. Írja le Anna keddi órarendjének összes lehetőségét! (2 pont)

16) Az ábrán egy ejtőernyős klub kitűzője látható. (Az egyik körív középpontja a szabályos háromszög A csúcsa, a másik körív középpontja az A csúccsal szemközti oldal felezőpontja.)
Ezt a lapot fogják tartományonként színesre festeni.



A

a) Számítsa ki egyenként mindhárom tartomány területét, ha $a = 2{,}5$ cm! Számításait legalább két tizedesjegy pontossággal végezze, és az így kapott zeredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

b) Hányféle módon festhető színesre a kitűző, ha minden tartományt a piros, sárga, zöld és kék színek valamelyikére festenek a következő két feltétel együttes figyelembe vételével:
(1) szomszédos tartományok nem lehetnek azonos színűek;
(2) piros és sárga színű tartomány nem lehet egymás mellett. (11 pont)
(Szomszédos tartományoknak van közös határvonala.)

17) András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papír cetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnevük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut? (5 pont)

b) Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve! A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg!
(A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!) (6 pont)

	A húzó neve				
A cédulák megfelelő sorrendjei	A	B	C	D	E
					E
					E
					E
					E
					E
					E

c) Az ajándékok átadása után mind az öten moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett? (6 pont)

18)

a) Hány olyan négy különböző számjegyből álló négyjegyű számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme az $\{1;2;3;4;5;6;7\}$ halmaznak? (3 pont)

b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből? (6 pont)

c) Hány olyan hatjegyű, hárommal osztható szám írható fel, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazza, és e számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul benne? (8 pont)

19) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis! (2 pont)

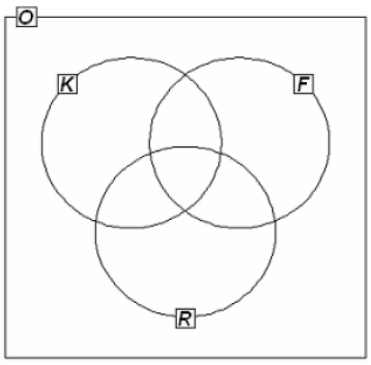
a) Hét tanulóból négyet ugyanannyiféleképpen lehet kiválasztani, mint hármat, ha a ki¬választás sorrendjétől mindkét esetben eltekintünk.

b) Van olyan x valós szám, amelyre igaz, hogy $\sqrt{x^2} = -x$

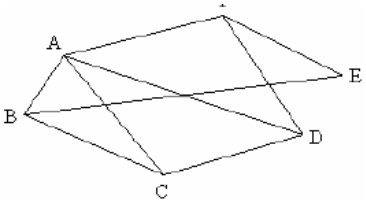
20) Egy futóverseny döntőjébe hat versenyző jutott, jelöljük őket *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* betűvel. A cél előtt pár méterrel már látható, hogy *C* biztosan utolsó lesz, továbbá az is biztos, hogy *B* és *D* osztozik majd az első két helyen. Hányféleképpen alakulhat a hat versenyző sorrendje a célban, ha nincs holtverseny? Válaszát indokolja! (3 pont)

21) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.

a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat! (4 pont)
b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!
A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére. (2 pont)
c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)
d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



1. ábra

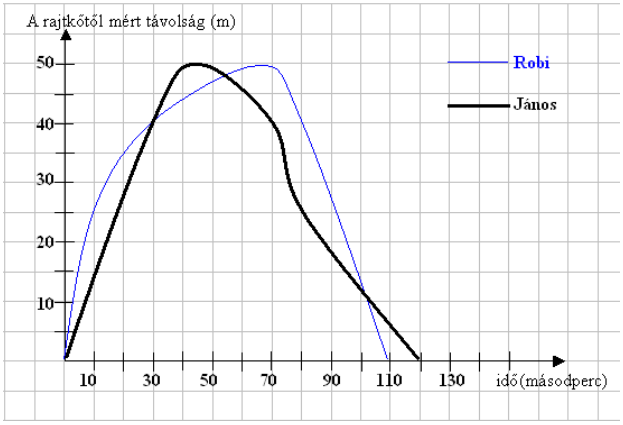


2. ábra

22) Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a baloldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.
a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre? (2 pont)
b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek? (3 pont)
c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna és Béla jegye egymás mellé szól, ha a fenti négy jegyet véletlenszerűen osztjuk ki közöttük? (4 pont)

A színház 1200 személyes. A szombati előadásra az összes jegy elkelt. Az eladott jegyek 40%-a 800 Ft-os, 25%-a 1000 Ft-os, 20%-a 1200 Ft-os, 15%-a 1500 Ft-os jegy volt.
d) Ábrázolja kördiagramon az eladott jegyek jegyárak szerinti százalékos megoszlását! (3 pont)
e) Számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe kerül egy színházjegy! (5 pont)

23) Egy sportuszoda 50 méteres medencéjében egy edzés végén úszóversenyt rendeztek. A versenyt figyelve az edző a következő grafikont rajzolta két tanítványának, Robinak és Jánosnak az úszásáról.



Olvassa le a grafikonról, hogy
a) mennyi volt a legnagyobb távolság a két fiú között a verseny során (1 pont)
b) mikor előzte meg János Robit (2 pont)
c) melyikük volt gyorsabb a 35. másodpercben! (2 pont)

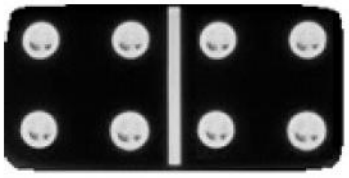
A 4*100-as gyorsváltó házi versenyén a döntőbe a Delfinek, a Halak, a Vidrák és a Cápák csapata került.
d) Hányféle sorrend lehetséges közöttük, ha azt biztosan tudjuk, hogy nem a Delfinek csapata lesz a negyedik? (3 pont)

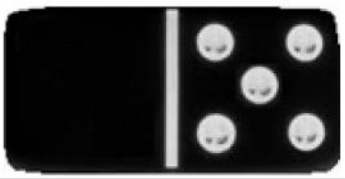
e) A verseny után kiderült, hogy az élen kettős holtverseny alakult ki, és a Delfinek valóban nem lettek az utolsók. Feltéve, hogy valakinek csak ezek az információk jutottak a tudomására, akkor ennek megfelelően hányféle eredménylistát állíthatott össze? (4 pont)

24)

a) Egy memóriajáték 30 olyan egyforma méretű lapból áll, melyek egyik oldalán egy-egy egész szám áll az 1, 2, 3, ... 14, 15 számok közül. Mindegyik szám pontosan két lapon szerepel. A lapok másik oldala (a hátoldala) teljesen azonos mintázatú. A 30 lapot összekeverjük. A játék kezdetén a lapokat az asztalra helyezzük egymás mellé, hátoldalukkal felfelé fordítva, így a számok nem látszanak. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játék kezdetén két lapot véletlenszerűen kiválasztva a lapokon álló számok megegyeznek! (5 pont)

b) Egy dominókészlet azonos méretű kövekből áll. Minden dominókő egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken elhelyezett pöttyök száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egyforma kő nem lehet egy készletben. Az ábrán két kő látható: a 4-4-es és a 0-5-ös (vagy 5-0-ás). Hány kőből áll egy dominókészlet? (6 pont)





c) A „Ki nevet a végén?” nevű társasjátékban egy játékos akkor indulhat el a pályán, amikor egy szabályos dobókockával 6-ost dob. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy valaki pontosan a harmadik dobására indulhat el a pályán! (6 pont)

25) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben $1{,}5\ \text{m}^2$-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a $27\ \text{m}^2$-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

26) András és Péter „számkártyázik” egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott lapot. (Például, ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.



a) Hány kártya van Péter előtt az első mérkőzés után, ha András az 1, 2, 3, 4, 5, 6, Péter pedig a 2, 4, 5, 3, 1, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait? (2 pont)

A második mérkőzés során Péter az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait, és így összesen két lapot vitt el.

b) Adjon meg egy lehetséges sorrendet, amelyben András kijátszhatta lapjait! (3 pont)

A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőt küldi csatába).

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg! (6 pont)

A negyedik mérkőzés előtt mindketten úgy döntöttek, hogy az egész mérkőzés során véletlenszerűen játsszák majd ki a lapjaikat. Az első három csata után Andrásnál a 3, 4, 6 számkártyák maradtak, Péternél pedig az 1, 5, 6 számkártyák.

d) Adja meg annak a valószínűségét, hogy András az utolsó három csatából pontosan kettőt nyer meg! (6 pont)

27) A biliárdjáték megkezdésekor az asztalon 15 darab azonos méretű, színezésű biliárdgolyót helyezünk el háromszög alakban úgy, hogy az első sorban 5 golyó legyen, a másodikban 4, a következőkben pedig 3, 2, illetve 1 golyó. (A golyók elhelyezésére vonatkozó egyéb szabályoktól tekintsünk el.)

a) Hányféleképpen lehet kiválasztani a 15-ből azt az 5 golyót, amelyet majd az első sorban helyezünk el? (Az 5 golyó sorrendjét nem vesszük figyelembe.) (3 pont)

b) Hányféle különböző módon lehet az első két sort kirakni, ha a 9 golyó sorrendjét is figyelembe vesszük? (3 pont)

Egy biliárdasztal játékterülete téglalap alakú, mérete 194 cm × 97 cm. A játékterület középpontja felett 85 cm-rel egy olyan (pontszerűnek tekinthető) lámpa van, amely fénykúpjának a nyílásszöge 100°.

c) Számítással állapítsa meg, hogy a lámpa megvilágítja-e a játékterület minden pontját! (11 pont)

28) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

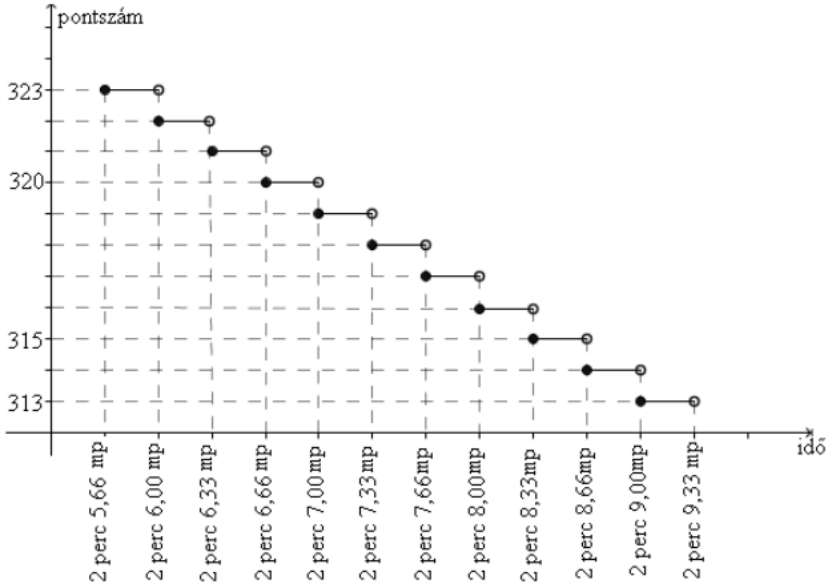
c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

29) Hány kételemű részhalmaza van a $\{2; 3; 4; 7; 11\}$ halmaznak? (2 pont)

30) Egy öttusaversenyen 31 résztvevő indult. A vívás az első szám, ahol mindenkivel egyszer mérkőzik meg. Aki 21 győzelmet arat, az 250 pontot kap. Aki ennél több győzelmet arat, az minden egyes további győzelemért 7 pontot kap a 250 ponton felül. Aki ennél kevesebbszer győz, attól annyiszor vonnak le 7 pontot a 250-ből, ahány győzelem hiányzik a 21-hez. (A mérkőzések nem végződhetnek döntetlenre.)

a) Hány pontot kapott a vívás során Péter, akinek 5 veresége volt? (3 pont)

b) Hány győzelme volt Bencének, aki 215 pontot szerzett? (3 pont)



Az öttusa úszás számában 200 métert kell úszni. Az elért időeredményeként járó pontszámot mutatja a grafikon.

c) Jelölje meg az alábbi két kérdés esetén a helyes választ!
Hány pontot kapott Robi, akinek az időeredménye 2 perc 6,28 másodperc? (2 pont)
A: 320
B: 321
C: 322
D: 323
Péter 317 pontot kapott. Az alábbiak közül válassza ki Péter időeredményét!
A: 2 perc 7,00 mp
B: 2 perc 7,60 mp
C: 2 perc 7,80 mp
D: 2 perc 8,00 mp

Az öttusa lovaglás számában egy akadálypályán tizenkét különböző akadályt kell a versenyzőnek átugrania. Egy akadály a nehézsége alapján három csoportba sorolható: A, B vagy C típusú. Ádám a verseny előtti bemelegítéskor először az öt darab A, majd a négy darab B, végül a három darab C típusú akadályokon ugrat át, mindegyiken pontosan egyszer. Bemelegítéskor az egyes akadálytípusokon belül a sorrend szabadon megválasztható.

d) Számítsa ki, hogy a bemelegítés során hányféle sorrendben ugrathatja át Ádám a tizenkét akadályt! (4 pont)

31) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0{,}854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)
b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)

(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

32) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye különböző? (2 pont)

33) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle 6 cm, oldaléle 5 cm hosszúságú. Egy szaküzletben 11 cm oldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy 11 cm oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot” használ. Mindegyik fajta „varázskanóc” fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

34)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$(2x-3)^2 = x^2$$ (5 pont)

b) Hány olyan (pozitív) háromjegyű páratlan szám van a tízes számrendszerben, amelynek minden számjegye különböző? (5 pont)

Koordinátageometria

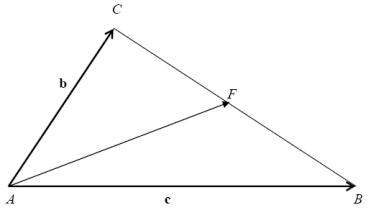
1) Adott két pont: $A\left(-4;\frac{1}{2}\right)$ és $B\left(1;\frac{3}{2}\right)$ Írja fel az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)

2) Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a $B(-3;5)$ pont. írja fel a kör egyenletét! (2 pont)

3) Írja fel a $(-2;7)$ ponton átmenő, $\underline{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét! (2 pont)

4) Adottak az $\underline{a}=(6;4)$ és az $\underline{a}-\underline{b}=(11;5)$ vektorok. Adja meg a $\underline{b}$ vektort a koordinátával! (3 pont)

5) Az ABC háromszög két oldalának vektora $AB=\underline{c}$ és $AC=\underline{b}$. Fejezze ki ezek segítségével az A csúcsból a szemközti oldal F felezőpontjába mutató AF vektort! (2 pont)



6) Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x=1$, valamint az $y=1$ egyenletű egyenesek.
   a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit! (2 pont)
   b) Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét! (5 pont)
   c) Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének? (2 pont)
   d) Az $y=-4x+2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát! (8 pont)

7) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;5)$ ponton és párhuzamos a $4x+5y=0$ egyenletű egyenessel! (3 pont)

8) Egy rombusz átlóinak hossza 12 és 20. Számítsa ki az átlóvektorok skalárszorzatát! Válaszát indokolja! (3 pont)

9)
   a) Ábrázolja koordináta-rendszerben az e egyenest, melynek egyenlete $4x+3y=-11$.
   Számítással döntse el, hogy a $P(100;-36)$ pont rajta van-e az egyenesen!
   Az egyenesen levő Q pont ordinátája (második koordinátája) 107.
   Számítsa ki a Q pont abszcisszáját (első koordinátáját)! (4 pont)
   b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5;3)$ és $B(1;-5)$.
   Számítással döntse el, hogy az $S(1;3)$ pont rajta van-e a körön! (7 pont)
   c) Adja meg az ABC háromszög C csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az $S(1;3)$ pont a háromszög súlypontja! (6 pont)

10) Fejezze ki az i és a j vektorok segítségével a $\underline{c}=2\underline{a}-\underline{b}$ vektort, ha $\underline{a}=3\underline{i}-2\underline{j}$ és $\underline{b}=-\underline{i}+5\underline{j}$! (3 pont)

11) Az *ABCD* négyzet középpontja *K*, az *AB* oldal felezőpontja *F*. Legyen $\underline{a} = \overrightarrow{KA}$ és $\underline{b} = \overrightarrow{KB}$. Fejezze ki az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok segítségével a $\overrightarrow{KF}$ vektort! (2 pont)

12) Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.
   a) Számítsa ki az $y = -16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit! (8 pont)
   b) Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)! (4 pont)

13) Az $A(-7;12)$ pontot egy $\underline{r}$ vektorral eltolva a $B(5;8)$ pontot kapjuk. Adja meg az $\underline{r}$ vektor koordinátáit! (2 pont)

14) Jelölje X-szel a táblázatban, hogy az alábbi koordináta-párok közül melyikek adják meg a 300°-os irányszögű egységvektor koordinátáit és melyikek nem!

	IGEN	NEM
$e\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$		
$e\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)$		

(4 pont)

15) Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát!
Határozza meg a két vektor által bezárt szöget!
$\underline{a}(5;8)$ $\underline{b}(-40;25)$ (3 pont)

16) Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$ egyenletű kör és az $x - 8{,}4 = 0$ egyenletű egyenes.
   a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit! (6 pont)
   b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől? (5 pont)

Egy 9 cm sugarú kört egy egyenes két körívre bont. Az egyenes a kör középpontjától 5,4 cm távolságban halad.
   c) Számítsa ki a hosszabb körív hosszát! (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (6 pont)

17) Az *ABC* háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(0;0)$, $B(-2;4)$, $C(4;5)$.
   a) Írja fel az *AB* oldal egyenesének egyenletét! (2 pont)
   b) Számítsa ki az *ABC* háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg! (7 pont)
   c) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét! (3 pont)

18) Három egyenes egyenlete a következő (a és b valós számokat jelölnek):

$e:\ y=-2x+3$

$f:\ y=ax-1$

$g:\ y=bx-4$

Milyen számot írjunk az a helyére, hogy az e és f egyenesek párhuzamosak legyenek?
Melyik számot jelöli b, ha a g egyenes merőleges az e egyenesre? (3 pont)

19) Egy kör az $(1;0)$ és $(7;0)$ pontokban metszi az x tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y=x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja! (3 pont)

20) Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(3;2)$ és $C(0;0)$.

a) Számítsa ki az ABC háromszög szögeit! (5 pont)
b) Írja fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét! (7 pont)

21) Adott két egyenes: $e:5x-2y=-14,5$, $f:2x+5y=14,5$.

a) Határozza meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit! (4 pont)
b) Igazolja, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek! (4 pont)
c) Számítsa ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét! (4 pont)

22) Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $2x-y=5$ egyenletű f egyenessel és áthalad a $P(3;-2)$ ponton! Válaszát indokolja! (2 pont)

23) Adja meg az $(x+2)^2+y^2=9$ egyenletű kör K középpontjának koordinátáit és sugarának hosszát! (3 pont)

24) Adja meg a $2x+y=4$ egyenletű egyenes és az x tengely M metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét! (3 pont)

25) A PQR háromszög csúcsai: $P(-6;-1)$, $Q(6;-6)$ és $R(2;5)$.

a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét! (5 pont)
b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát! (7 pont)

26) Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2;-1)$, $B(9;-3)$, és $C(-3;6)$.

a) Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét! (3 pont)
b) Számítsa ki a BC oldallal párhuzamos középvonal hosszát! (3 pont)
c) Számítsa ki a háromszögben a C csúcsnál lévő belső szög nagyságát! (6 pont)

27) Tekintsük a koordinátarendszerben adott $A(6;9)$, $B(-5;4)$ és $C(-2;1)$ pontokat!

a) Mekkora az AC szakasz hossza? (2 pont)
b) Írja fel az AB oldalegyenes egyenletét! (4 pont)
c) Igazolja (számítással), hogy az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van! (6 pont)
d) Írja fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét! (5 pont)

28) Adottak az $\underline{a}(4;3)$ és $\underline{b}(-2;1)$ vektorok.

a) Adja meg az $\underline{a}$ hosszát! (2 pont)
b) Számítsa ki az $\underline{a}+\underline{b}$ koordinátáit! (2 pont)

29) Adott a síkon az $x^2+y^2+2x-2y-47=0$ egyenletű kör.

a) Állapítsa meg, hogy az $A(7;7)$ pont illeszkedik-e a körre! (2 pont)

b) Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát! (5 pont)

c) Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2+y^2+2x-2y-47=0$ egyenletű körön. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit! (10 pont)

30) Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1;-3)$ és $B(7;-1)$.

a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét! (4 pont)

b) Számítással igazolja, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $x^2+y^2-6x-2y=10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát!

Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra. (4 pont)

c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A-tól különböző) metszéspontjának koordinátáit! (9 pont)

31) Adott az $A(5;2)$ és a $B(-3;-2)$ pont.

a) Számítással igazolja, hogy az A és B pontok illeszkednek az $x-2y=1$ egyenletű e egyenesre! (2 pont)

b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét! (5 pont)

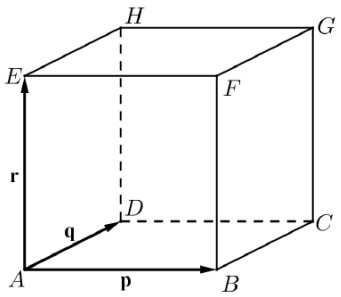
c) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely az AB átmérőjű kört a B pontban érinti! (5 pont)

32) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $(1;-3)$ ponton, és egyik normálvektora a $(8;1)$ vektor! (2pont)

33) Egy kör érinti az y tengelyt. A kör középpontja a $K(-2;3)$ pont. Adja meg a kör sugarát, és írja fel az egyenletét! (3 pont)

34) Egy kör egyenlete $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. Adja meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör átmérőjének hosszát! (3 pont)

35) Az ábrán látható kocka A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB}=\underline{p}$; $\overrightarrow{AD}=\underline{q}$ és $\overrightarrow{AE}=\underline{r}$. Fejezze ki $\underline{p}$, $\underline{q}$, és $\underline{r}$ segítségével a $\overrightarrow{GC}$, az $\overrightarrow{AG}$ és az $\overrightarrow{FH}$ vektorokat! (3 pont)



36) Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! (3 pont)

b) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! (4 pont)

A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4;-3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7;1)$ pont. Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának.

c) Adja meg a P; az R és az S csúcsok koordinátáit! (10 pont)

37)

a) Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit! (3 pont)

b) Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely -3-hoz -1-et és 3-hoz 7-et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax + b$ alakban adja meg!) (5 pont)

c) Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz! (9 pont)

38) Adott két pont a koordinátasíkon: $A(2;6)$ és $B(4;-2)$.

a) Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (6 pont)

b) Írja fel az A ponton átmenő, B középpontú kör egyenletét! (4 pont)

Adott z $y = 3x$ egyenletű és az $x^2 + 8x + y^2 - 4y = 48$ egyenletű kör.

c) Adja meg koordinátáikkal az egyenes és a kör közös pontjait! (7 pont)

39) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $4x + y = 17$ egyenletű e egyenes, továbbá az e egyenesre illeszkedő $C(2;9)$ és $T(4;1)$ pont. Az A pont az origóban van.

a) Igazolja, hogy az ATC szög derékszög! (4 pont)

Az A pont e egyenesre vonatkozó tükörképe a B pont.

b) Számítsa ki a B pont koordinátáit! (4 pont)

c) Határozza meg az ABC egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontjának koordinátáit! (9 pont)

Logika, gráfok

1) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.
Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.
a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)
Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.
b) A feladat szövege alapján töltse ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)
c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)
d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

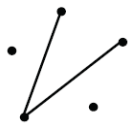
2) Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsokból 3; 2; 2; 1 él indul. Hány éle van a gráfnak? (2 pont)

3) Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek! (3 pont)

4) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2. (2 pont)

5) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andráson kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.
a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket! (4 pont)
b) Hány mérkőzés van még hátra? (3 pont)
c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez? (5 pont)

6) Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült. Rajzolja be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton! (2 pont)



7) Egy négytagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltessen gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.) (2 pont)

8) Egy baráti társaság minden tagja írt egy-egy SMS üzenetet a társaság minden további tagjának. Így mindenki 11 üzenetet írt. Hány SMS-t írtak egymásnak összesen a társaság tagjai? (2 pont)

9) A diákönkormányzat újonnan választott négytagú vezetősége: Kata, Mari, Réka és Bence. Közülük Kata három, Réka és Bence pedig két-két vezetőségi tagot ismert korábbról. Mari a négyes csoportnak csak egy tagját ismerte. (Az ismeretségek kölcsönösek.)
Rajzolja fel a négytagú vezetőség választás előtti ismeretségi gráfját! (2 pont)

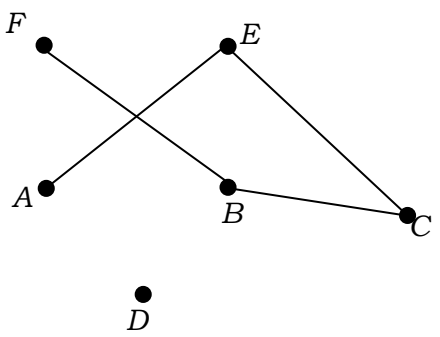
10) Rajzoljon le egy 4 pontú egyszerű gráfot, amelyben a pontok fokszáma rendre 3, 2, 2, 1! (2 pont)

11) Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.
a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját! (4 pont)
b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!) (6 pont)
c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket! (7 pont)

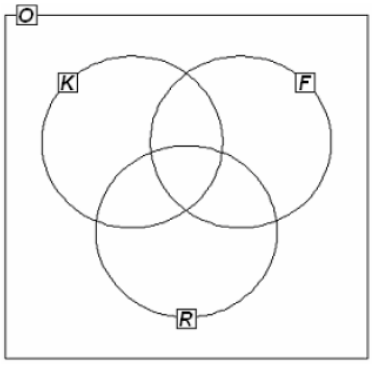
12) Rajzoljon egy gráfot, melynek 5 csúcsa és 5 éle van, továbbá legalább az egyik csúcsának a fokszáma 3. (2 pont)

13) Az ábrán látható hatpontú gráfba rajzoljon be 2 élt úgy, hogy a kapott gráf minden csúcsából 2 él induljon ki! A berajzolt éleket két végpontjukkal adja meg! (2 pont)

14) Egy álláshirdetésre négyen jelentkeznek: Aladár, Béla, Cecil és Dénes. Az adott időben megjelennek a vállalatnál, s akkor kiderül, hogy közülük hárman, Aladár, Béla és Cecil osztálytársak voltak. Dénes csak Aladárt ismeri, ők régebben egy kosárlabdacsapatban játszottak. Szemléltesse az ismeretségeket gráffal! (Az ismeretségek kölcsönösek.) (2 pont)



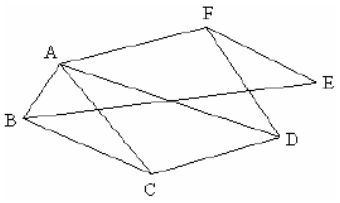
15) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.



1. ábra

a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat! (4 pont)
b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!
A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére. (2 pont)
c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)

d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



2. ábra

16) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelynek 4 éle van! (2 pont)

17) Rajzoljon egy olyan 5 csúcsú gráfot, melyben a csúcsok fokszámának összege 12. (2 pont)

18) Egy irodai számítógép-hálózat hat gépből áll. Mindegyik gép ezek közül három másikkal van közvetlenül összekötve. Rajzoljon egy olyan gráfot, amely ezt a hálózatot szemlélteti! (2 pont)

19) Döntse el, hogy az alább felsoroltak közül melyik mondat a tagadása a következő állításnak! (2 pont)

Minden érettségi feladat egyszerű.

a) Minden érettségi feladat bonyolult.
b) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.
c) Sok érettségi feladat bonyolult.
d) Van olyan érettségi feladat, ami egyszerű.

20) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)

b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	3
1	94
2	89
3	14

Jóska felmérése alapján töltse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.
Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
D) Nem minden háztartásban van televízió. (2 pont)

21) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.
   a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)
   b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)

Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapítottuk meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.
   c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)

Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.
   d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

22) "Minden szekrény barna."
Válassza ki az alábbiak közül annak a mondatnak a betűjelét, amelyik tagadása a fenti kijelentésnek!
A: Van olyan szekrény, amelyik nem barna.
B: Nincs barna szekrény.
C: Van olyan szekrény, amelyik barna.
D: Pontosan egy szekrény barna. (2 pont)

23) Rajzoljon olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0; 1; 2; 2; 3; 4. (2 pont)

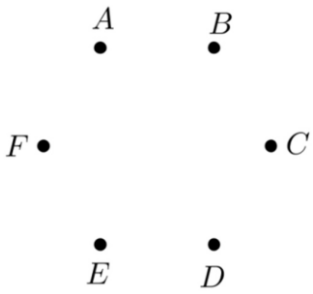
24) Egy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismertségek kölcsönösek). Az első öt megkérdezett személy válasza: 5,4,3,2,1.
   a) Ábrázolja gráffal a hatfős társaság ismertségi viszonyait! (2 pont)
   b) Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban? (1 pont)

25) Egy fiókban néhány sapka van. Tekintsük a következő állítást:
„A fiókban minden sapka fekete.” Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!
A: A fiókban minden sapka fehér.
B: A fiókban nincs fekete sapka.
C: A fiókban van olyan sapka, amely nem fekete.
D: A fiókban nem minden sapka fekete. (2 pont)

26) Hány éle van egy 8 pontú teljes gráfnak? (2 pont)

27) Egy születésnapi összejövetelen egy 7 fős társaság tagjai közül néhányan koccintottak egymással. Lehetséges-e, hogy az egyes résztvevők 1; 2; 2; 3; 3; 6; 6 másik résztvevővel koccintottak az összejövetel során? Válaszát indokolja! (3 pont)

28) Egy hatfős asztaltársaság tajgai: Anna, Balázs, Cili, Dezső, Egon és Fruzsina. Mindegyikük pontosan három másik személyt ismer a társaságban. Cili ismeri Dezsőt és Egont, Anna pedig nem ismeri sem Balázst, sem Dezsőt. Szemléltesse gráffal a társaság ismeretségi viszonyait! (Minden ismeretség kölcsönös.) (4 pont)



29) Egy dobozban lévő színes golyókról szól az alábbi állítás:

„A dobozban van olyan golyó, amelyik kék színű”

Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!

A: A dobozban van olyan golyó, amelyik nem kék színű.

B: A dobozban minden golyó kék színű.

C: A dobozban egyik golyó sem kék színű.

D: A dobozban nincs olyan golyó, amelyik kék színű. (2 pont)

Síkgeometria

1) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
   a) A háromszög köré írható kör középpontja mindig valamelyik súlyvonalra esik. (1 pont)
   b) Egy négyszögnek lehet 180°-nál nagyobb belső szöge is. (1 pont)
   c) Minden trapéz paralelogramma. (1 pont)

2) Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza 3 cm, a vele szemközti szög 18,5°. Mekkora a másik befogó? Készítsen vázlatot, és válaszát számítással indokolja! (3 pont)

3) Egy derékszögű háromszög átfogója 4,7 cm hosszú, az egyik hegyesszöge 52,5°. Hány cm hosszú a szög melletti befogó? Készítsen vázlatot az adatok feltüntetésével! Válaszát számítással indokolja, és egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (3 pont)

4) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
   a) A szabályos ötszög középpontosan szimmetrikus. (1 pont)
   b) Van olyan háromszög, amelynek a súlypontja és a magasságpontja egybeesik. (1 pont)
   c) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus. (1 pont)

5) Egy háromszög belső szögeinek aránya 2:5:11. Hány fokos a legkisebb szög? (2 pont)

6) Egy függőleges tartórúdra a talajtól 4 m magasan mozgásérzékelőt szereltek, a hozzákapcsolt lámpa 140º-os nyílásszögű forgáskúpban világít függőlegesen lefelé.
   a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével! (2 pont)
   b) Milyen messze van a lámpától a legtávolabbi megvilágított pont? (4 pont)
   c) Megvilágítja-e az érzékelő lámpája azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától 15 m távolságra van? (4 pont)
   d) A tartórúdon méterenként kampókat helyeztünk el, amelyekre fel tudjuk akasztani a mozgásérzékelő lámpáját. Alulról számítva hányadik kampót használjuk, ha azt akarjuk, hogy a vízszintes talajon ne világítson meg a lámpa 100 m2-nél nagyobb területet? (7 pont)

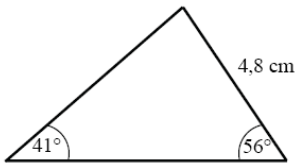
7) Mekkora az egységsugarú kör 270°-os középponti szögéhez tartozó ívének hossza? (2 pont)

8) Döntse el, hogy az alábbi *B* állítás igaz vagy hamis!
   B: Ha egy négyszög két szemközti szöge derékszög, akkor az téglalap.
   Írja le az állítás megfordítását (*C*).
   Igaz vagy hamis a *C* állítás? (3 pont)

9) Egy háromszög egyik oldalának hossza 6 cm. Az ezeken nyugvó két szög 50º és 60º. A háromszög beírt körének középpontját tükröztük a háromszög oldalaira. E három pont a háromszög csúcsaival együtt egy konvex hatszöget alkot.
   a) Mekkorák a hatszög szögei? (6 pont)
   b) Számítsa ki a hatszög azon két oldalának hosszát, amely a háromszög 60º-os szögének csúcsából indul! (5 pont)
   c) Hány négyzetcentiméter a hatszög területe? (6 pont)
   A b) és a c) kérdésekben a választ egy tizedes pontossággal adja meg!

10) Egy háromszög oldalhosszúságai egész számok. Két oldala 3 cm és 7 cm. Döntse el a következő állításokról, hogy igaz vagy hamis! (2 pont)
1. állítás: A háromszög harmadik oldala lehet 9 cm.
2. állítás: A háromszög harmadik oldala lehet 10 cm.

11) Az ábrán látható háromszögben hány cm hosszú az 56°-os szöggel szemközti oldal? (Az eredményt egy tizedes jegy pontossággal adja meg!) Írja le a számítás menetét!



(3 pont)

12) Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal 13 cm hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya 2:1.
a) Mekkora a rombusz magassága? (5 pont)
b) Mekkorák a rombusz szögei? (3 pont)
c) Milyen hosszú a rombusz hosszabbik átlója? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

13) Adja meg az alábbi állítások igazságértékét (igaz vagy hamis), majd döntse el, hogy a b) és a c) jelű állítások közül melyik az a) jelű állítás megfordítása! (4 pont)
a) Ha az *ABCD* négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.
b) Ha az *ABCD* négyszög átlói felezik egymást, akkor ez a négyszög téglalap.
c) Ha az *ABCD* négyszög nem téglalap, akkor átlói nem felezik egymást.

14) Hányszorosára nő egy 2 cm sugarú kör területe, ha a sugarát háromszorosára növeljük? (2 pont)

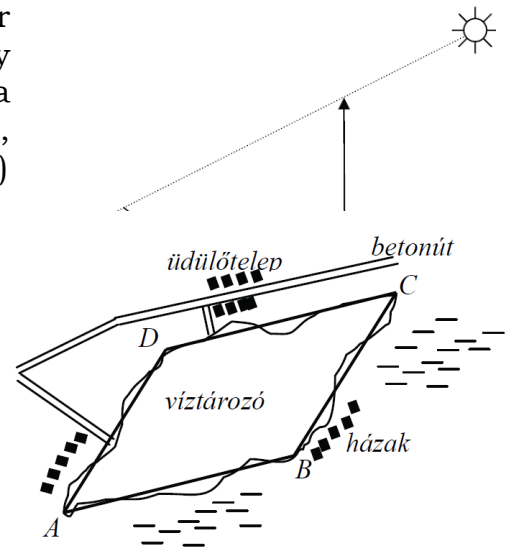
15) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogója 13 cm hosszú. Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (Válaszát egész fokra kerekítve adja meg!) (2 pont)

16) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét! A táblázatban karikázza be a helyes választ! (4 pont)
A állítás: Minden rombusznak pontosan két szimmetriatengelye van. (1 pont)
B állítás: Minden rombusznak van két szimmetriatengelye. (1 pont)
C állítás: Van olyan rombusz, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van. (1 pont)
D állítás: Nincs olyan rombusz, amelynek négy szimmetriatengelye van. (1 pont)

17) Valamely derékszögű háromszög területe 12 cm^2, az α hegyesszögéről pedig tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.
a) Mekkorák a háromszög befogói? (8 pont)
b) Mekkorák a háromszög szögei, és mekkora a köré írt kör sugara? (A szögeket fokokban egy tizedesjegyre, a kör sugarát cm-ben szintén egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

18) A következő kérdések ugyanarra a 20 oldalú szabályos sokszögre vonatkoznak.
a) Mekkorák a sokszög belső szögei? Mekkorák a külső szögek? (3 pont)
b) Hány átlója illetve hány szimmetriatengelye van a sokszögnek? Hány különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból? (6 pont)
c) Milyen hosszú a legrövidebb átló, ha a szabályos sokszög beírt körének sugara 15 cm? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

19) Egy torony árnyéka a vízszintes talajon kétszer olyan hosszú, mint a torony magassága. Hány fokos szöget zár be ekkor a Nap sugara a vízszintes talajjal? A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg! (2 pont)



20) Egy víztározó víztükrének alakját az ábrán látható módon az *ABCD* paralelogrammával közelítjük. A paralelogrammának az 1:30000 méretarányú térképen mért adatai: $AB = 4{,}70$ cm, $AD = 3{,}80$ cm és $BD = 3{,}30$ cm.

a) A helyi önkormányzat olyan kerékpárút építését tervezi, amelyen az egész víztározót körbe lehet kerekezni. Hány km hosszúságú lesz ez az út, ha hossza kb. 25%-kal több a paralelogramma kerületénél? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Mekkora az a legnagyobb távolság, amelyet motorcsónakkal, irányváltoztatás nélkül megtehetünk a víztározó víztükrén? Válaszát km-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

c) Körülbelül hány m^3-rel lesz több víz a víztározóban, ha a vízszintet 15 cm-rel megemelik? Válaszát ezer m^3-re kerekítve adja meg! (6 pont)

21) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 5 cm, a szára 6 cm hosszú. Hány fokosak a háromszög alapon fekvő szögei? A szögek nagyságát egész fokra kerekítve adja meg! Válaszát indokolja! (3 pont)

22) Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyben az átfogó hossza 1, az α hegyesszög melletti befogó hossza pedig $\sin\alpha$. Mekkora az α szög? Válaszát indokolja! (3 pont)

23) Egyenlő szárú háromszög alapja 40 cm, szárainak hossza 52 cm. A háromszöget megforgatjuk a szimmetriatengelye körül.
(A válaszait két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével, és számítsa ki, hogy mekkora a keletkező forgáskúp nyílásszöge? (4 pont)

b) Számítsa ki a keletkező forgáskúp térfogatát! (3 pont)

c) Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelyik érinti a kúp alapkörét és a palástját? (6 pont)

d) Mekkora a kúp kiterített palástjának területe? (4 pont)

24) Az *ABC* hegyesszögű háromszögben $BC = 14$ cm, $AC = 12$ cm, a *BCA* szög nagysága pedig 40°.

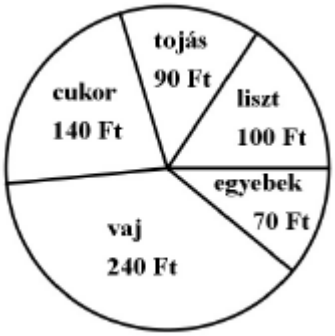
a) Számítsa ki a *BC* oldalhoz tartozó magasság hosszát! (2 pont)

b) Számítsa ki az *AB* oldal hosszát! (3 pont)

Válaszait cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!
Az *AB* oldal felezőpontja legyen *E*, a *BC* oldal felezőpontja pedig legyen *D*.
Határozza meg az *AEDC* négyszög területét!

c) Válaszát cm^2-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

25) Az ábra egy sütemény alapanyagköltségeinek megoszlását mutatja. Számítsa ki a „vaj” feliratú körcikk középponti szögének nagyságát fokban! Válaszát indokolja! (3 pont)



26) A vízszintessel 6,5°-ot bezáró egyenes út végpontja 124 méterrel magasabban van, mint a kiindulópontja. Hány méter hosszú az út? Válaszát indokolja! (3 pont)

27) Két gömb sugarának aránya $2:1$. A nagyobb gömb térfogata k-szorosa a kisebb gömb térfogatának. Adja meg k értékét! (2 pont)

28) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, mindkét vektor hossza 4 cm. Határozza meg az $\underline{a}+\underline{b}$ vektor hosszát! (2 pont)

29) Számítsa ki a szabályos tizenkétszög egy belső szögének nagyságát! Válaszát indokolja! (3 pont)

30) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)

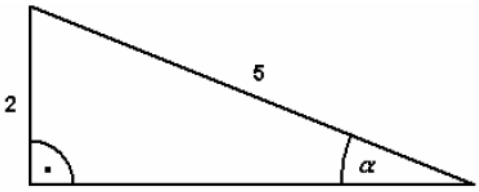
b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm^2-ben mért számértéke. (1 pont)

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

31) Egy háromszög egyik oldalának hossza 10 cm, a hozzá tartozó magasság hossza 6 cm. Számítsa ki a háromszög területét! (2 pont)

32) Számítsa ki az α szög nagyságát az alábbi derékszögű háromszögben! (2 pont)



33) Egy kör sugara 6 cm. Számítsa ki ebben a körben a 120°-os középponti szöghöz tartozó körcikk területét! (2 pont)

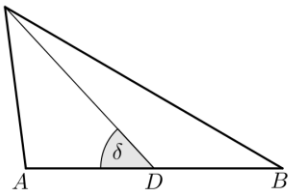
34) Egy 5 cm sugarú kör középpontjától 13 cm-re lévő pontból érintőt húzunk a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza? Írja le a számítás menetét! (3 pont)

35) Adja meg, hogy az alábbi geometriai transzformációk közül melyek viszik át önmagába az ábrán látható, háromszög alakú (sugárveszélyt jelző) táblát! (2 pont)

a) 60°-os elforgatás a tábla középpontja körül.
b) 120°-os elforgatás a tábla középpontja körül.
c) Középpontos tükrözés a tábla középpontjára.
d) Tengelyes tükrözés a tábla középpontján és a tábla egyik csúcsán átmenő tengelyre.



36) Az ábrán látható ABC háromszögben a D pont felezi az AB oldalt. A háromszögben ismert: $AB=48$ mm, $CD=41$ mm, $\delta=47°$.



a) Számítsa ki az ABC háromszög területét! (5 pont)

b) Számítással igazolja, hogy (egész milliméterre kerekítve) a háromszög BC oldalának hossza 60 mm! (4 pont)

c) Számítsa ki a háromszög B csúcsánál lévő belső szög nagyságát! (3 pont)

37) Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza 4,2 cm és 5,6 cm. Mekkora a téglalap körülírt körének sugara? Válaszát indokolja! (3 pont)

38)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$ (6 pont)

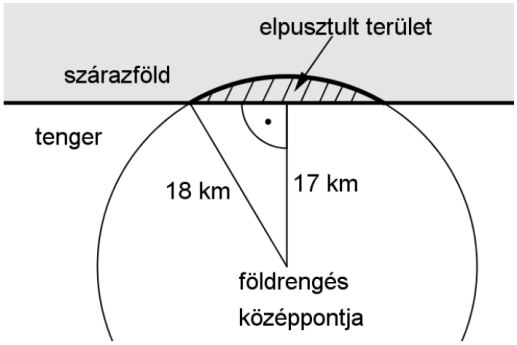
c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

III) A $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

39) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

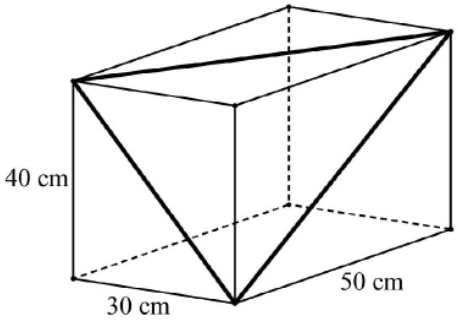
b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

40) Egy téglatest alakú akvárium egy csúcsból kiinduló élei 30 cm, 40 cm, illetve 50 cm hosszúak.

a) Hány literes ez az akvárium? (A számolás során tekintsen el az oldallapok vastagságától!) (3 pont)



Tekintsük azt a háromszöget, amelynek oldalait az ábrán látható téglatest három különböző hosszúságú lapátlója alkotja.

b) Mekkora ennek a háromszögnek a legkisebb szöge? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

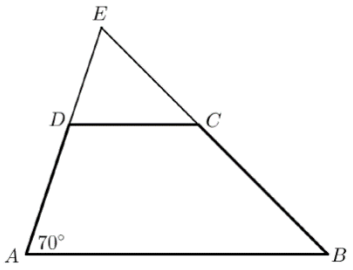
41) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus négyszög.

b) A kocka testátlója 45°-os szöget zár be az alaplappal.

c) A szabályos tizenhétszögben az egyik csúcsból kiinduló összes átló a tizenhétszöget 15 háromszögre bontja. (2 pont)

42) Az $ABCD$ trapéz oldalainak hossza: $AB = 10\,\text{cm}$; $CD = 6\,\text{cm}$; $AD = 7\,\text{cm}$. Az A csúcsnál fekvő belső szög nagysága 70°.



a) Mekkora távolságra van a D pont az AB oldaltól? (3 pont)

b) Számítsa ki a négyszög AC átlójának hosszát! (4 pont)

Az E pont az AD és BC szárak egyenesének metszéspontja.

c) Számítsa ki az ED szakasz hosszát! (4 pont)

43) Egy ABC háromszög A csúcsánál lévő külső szöge 104°-os, B csúcsnál lévő belső szöge 74°-os. Hány fokos a háromszög C csúcsnál lévő külső szöge? Válaszát indokolja! (3 pont)

44) Az ABC derékszögű háromszög AC befogója $6\,cm$, BC befogója $8\,cm$ hosszú.

a) Számítsa ki az ABC háromszög hegyesszögeinek nagyságát! (3 pont)

A DEF derékszögű háromszög DE befogója $7\,cm$-rel rövidebb, mint a DF befogó. Az átfogó $2\,cm$-rel hosszabb, mint a DF befogó.

b) Számítsa ki a DEF háromszög oldalainak hosszát! (8 pont)

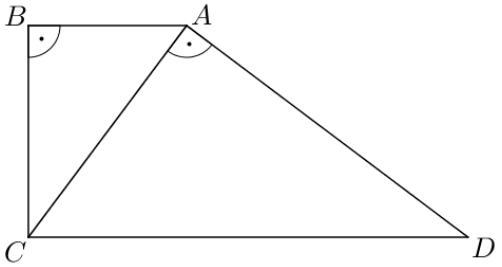
45) Az $ABCD$ húrtrapéz oldalainak hossza:
$AB = 5$ cm, $BC = 2{,}5$ cm, $CD = 2$ cm, és $DA = 2{,}5$ cm.

a) Számítsa ki a trapéz szögeit! (5 pont)

b) Határozza meg az ABC és ACD háromszögek területének arányát! (5 pont)

c) A trapéz belső szögeit egy-egy 5 mm sugarú körívvel jelöltük. Számítsa ki a négy körív hosszának összegét! (3 pont)

46) Két derékszögű háromszöget egy-egy oldalukkal egymáshoz illesztettünk az ábrának megfelelően. Így az *ABCD* derékszögű trapézt kaptuk.



a) Igazolja, hogy az *ABC* és a *CAD* háromszög hasonló! (3 pont)

Legyen $AB = 9\,\text{cm}$, $AC = 15\,\text{cm}$.

b) Számítsa ki a trapéz *AD* oldalán fekvő szögeinek nagyságát! (4 pont)

c) Számítsa ki a trapéz területét! (7 pont)

47) Egy háromszög 3 cm és 5 cm hosszú oldalai 60°-os szöget zárnak be egymással. Hány centiméter hosszú a háromszög harmadik oldala? Megoldását részletezze! (3 pont)

48) Az *ABC* derékszögű háromszög egyik befogója 8 cm, átfogója 17 cm hosszú.

a) Számítsa ki a háromszög 17 cm-es oldalához tartozó magasságának hosszát! (5 pont)

b) Hány cm^2 a háromszög körülírt körének területe? (3 pont)

A *DEF* háromszög hasonló az *ABC* háromszöghöz, és az átfogója 13,6 cm hosszú.

c) Hány százalék a *DEF* háromszög területe az *ABC* háromszög területének? (4 pont)

Sorozatok

1) Egy mértani sorozat első tagja 8, hányadosa 0,5. Számítsa ki a sorozat ötödik tagját! (2 pont)

2) Egy számtani sorozat második tagja 17, harmadik tagja 21.
   a) Mekkora az első 150 tag összege? (5 pont)

   Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25 863.
   b) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)
   c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

3) Egy kultúrpalota színháztermének a nézőtere szimmetrikus trapéz alaprajzú, a széksorok a színpadtól távolodva rövidülnek. A leghátsó sorban 20 szék van, és minden megelőző sorban 2-vel több, mint a mögötte lévőben. 500 diák és 10 kísérő tanár pont megtöltik a nézőteret. Hány széksor van a nézőtéren? (12 pont)

4) Mennyi annak a mértani sorozatnak a hányadosa, amelynek harmadik tagja 5, hatodik tagja pedig 40? (2 pont)

5) Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.
   a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám? (8 pont)
   b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (4 pont)

6) Egy számtani sorozat első eleme 8, differenciája $-\frac{2}{3}$. Mekkora a sorozat negyedik eleme? (2 pont)

7) Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azutánin 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.
   a) Hány méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon? (3 pont)
   b) Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele? (8 pont)
   c) Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon? (3 pont)
   d) A 21-edik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

8) Egy mértani sorozat második eleme 32, hatodik eleme 2. Mekkora a sorozat hányadosa? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

9)

a) Határozza meg azt a háromjegyű számot, amelyről a következőket tudjuk:
   - számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő tagjai;
   - a szám értéke 53,5-szerese a számjegyei összegének;
   - ha kivonjuk belőle az első és utolsó jegy felcserélésével kapott háromjegyű számot, akkor 594 az eredmény. (10 pont)

b) Sorolja fel azokat a 200-nál nagyobb háromjegyű számokat, amelyeknek számjegyei a felírás sorrendjében növekvő számtani sorozat tagjai! (4 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a b) kérdésben szereplő számok közül véletlenszerűen egyet kiválasztva, a kiválasztott szám osztható 9-cel! (3 pont)

10) Egy számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 60. Mennyi a sorozat első öt tagjának összege? Válaszát indokolja! (3 pont)

11) Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3 pont)

b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3 pont)

Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon mindennap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.

c) Hány nap alatt készült-el a 2 méter hosszúra tervezett sál? (11 pont)

12) Egy számtani sorozat első tagja –3, differenciája –17. Számítsa ki a sorozat 100-adik tagját! Számítását részletezze! (2 pont)

13) Egy mértani sorozat első tagja -3, a hányadosa -2. Adja meg a sorozat ötödik tagját! Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

14) Egy mértani sorozat első tagja –5, hányadosa –2. Számítsa ki a sorozat tizenegyedik tagját! Indokolja a válaszát! (1 pont)

15) Angéla a pihenőkertjük egy részére járólapokat fektetett le. Az első sorba 8 járólap került, minden további sorba kettővel több, mint az azt megelőzőbe. Összesen 858 járólapot használt fel.

a) Hány sort rakott le Angéla? (6 pont)

A járólapokat 225-ös csomagolásban árusítják. Minden csomagban bordó színű a járólapok 16 %-a, a többi szürke. Angéla 4 csomag járólapot vásárolt. Csak bordó színű lapokat rakott le az első és az utolsó sorba. Ezen kívül a többi sor két szélén levő 1–1 járólap is bordó, az összes többi lerakott járólap szürke.

b) Adja meg, hogy hány szürke és hány bordó járólap maradt ki a lerakás után! (6 pont)

16)

a) Egy számtani sorozat első tagja –7, a nyolcadik tagja 14. Adja meg n lehetséges értékeit, ha a sorozat első n tagjának összege legfeljebb 660. (9 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja ugyancsak –7, a negyedik tagja –189. Mekkora az n, ha az első n tag összege –68887? (8 pont)

17) Melyik a 201-edik pozitív páros szám? Válaszát indokolja! (3 pont)

18) Egy számtani sorozat ötvenedik tagja 29, az ötvenegyedik tagja 26. Számítsa ki a sorozat első tagját! (3 pont)

19) Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa (-2). Adja meg a sorozat első hat tagjának összegét! (2 pont)

20) Az újkori olimpiai játékok megrendezésére 1896 óta kerül sor, ebben az évben tartották az első (nyári) olimpiát Athénban. Azóta minden negyedik évben tartanak nyári olimpiát, és ezeket sorszámmal látják el. Három nyári olimpiát (az első és a második világháború miatt) nem tartottak meg, de ezek az elmaradt játékok is kaptak sorszámot.

a) Melyik évben tartották a 20. nyári olimpiai játékokat? (2 pont)

b) Számítsa ki, hogy a 2008-ban Pekingben tartott nyári olimpiának mi volt a sorszáma! (2 pont)

A nyári olimpiák szervezőinek egyik fő bevételi forrása a televíziós jogok értékesítéséből származó bevétel. Rendelkezésünkre állnak a következő adatok (millió dollárban számolva):

Olimpia sorszáma	20.	22.
Bevétel a televíziós jogok értékesítéséből	75	192

Eszter úgy véli, hogy a televíziós jogok értékesítéséből származó bevételek – a 20. olimpiától kezdve – az egymás utáni nyári olimpiákon egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Marci szerint ugyanezek a számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A saját modelljük alapján mindketten kiszámolják, hogy mennyi lehetett a televíziós jogok értékesítéséből származó bevétel a 27. nyári olimpián. Ezután megkeresik a tényleges adatot, amely egy internetes honlap szerint 1383 (millió dollár).

c) Számítsa ki, hogy Eszter vagy Marci becslése tér el kisebb mértékben a 27. nyári olimpia tényleges adatától! (8 pont)

21)

a) Egy számtani sorozat első tagja 2, első hét tagjának összege 45,5. Adja meg a sorozat hatodik tagját! (5 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja 5, második és harmadik tagjának összege 10. Adja meg a sorozat első hét tagjának az összegét! (7 pont)

22) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja és differenciája is 4. Adja meg a sorozat 26. tagját! (2 pont)

23) A $\{b_n\}$ mértani sorozat hányadosa 2, első hat tagjának összege 94,5. Számítsa ki a sorozat első tagját! Válaszát indokolja! (3 pont)

24) Egy számtani sorozat első tagja 5, második tagja 8.
   a) Adja meg a sorozat 80. tagját! (2 pont)
   b) Tagja-e a fenti sorozatnak a 2005? (Válaszát számítással indokolja!) (3 pont)
   c) A sorozat első n tagját összeadva az összeg 1550. Határozza meg n értékét! (7 pont)

25)
   a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! (5 pont)
   b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! (7 pont)

26) Egy számtani sorozat hatodik tagja 15, kilencedik tagja 0. Számítsa ki a sorozat első tagját! Válaszát indokolja! (3 pont)

27) A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer $\left(2\cdot10^{-6}\text{m}\right)$, átmérője 0,5 mikrométer $\left(5\cdot10^{-7}\text{m}\right)$.
   a) Számítsa ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításainak eredményét m^3-ben, illetve m^2-ben, normálalakban adja meg! (5 pont)

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.
   b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? (4 pont)

A baktériumok számát a tápoldatban t perc elteltével a $B(t)=3000000\cdot2^{\frac{t}{15}}$ összefüggés adja meg.
   c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

28)
   a) Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 3. A sorozat első n tagjának összege 440. Adja meg n értékét! (5 pont)
   b) Egy mértani sorozat első tagja 5, hányadosa 1,2. Az első tagtól kezdve legalább hány tagot kell összeadni ebben a sorozatban, hogy az összege elérje az 500-at? (7 pont)

29) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.
   a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben $1{,}5\ \text{m}^2$-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a $27\ \text{m}^2$-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.
   b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

30) Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot egy évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel egy év elteltével, ha év közben nem változtatott a lekötésen? (2 pont)

31) A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az *A* Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)

a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott? (3 pont)

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) Hány százalékos volt a *B* Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel? (10 pont)

c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.) (4 pont)

32) Csilla és Csongor ikrek, és születésükkor mindkettőjük részére takarékkönyvet nyitottak a nagyszülők. 18 éves korukig egyikőjük számlájáról sem vettek fel pénzt.

Csilla számlájára a születésekor 500 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg évi 8 %-kal kamatozik.

a) Legfeljebb mekkora összeget vehet fel Csilla a 18. születésnapján a számlájáról, ha a kamat mindvégig 8 %? (A pénzt forintra kerekített értékben fizeti ki a bank.) (5 pont)

Csongor számlájára a születésekor 400 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg félévente kamatozik, mindig azonos kamatlábbal.

b) Mekkora ez a félévenkénti kamatláb, ha tudjuk, hogy Csongor a számlájáról a 18. születésnapján 2 millió forintot vehet fel? (A kamatláb mindvégig állandó.) A kamatlábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

33) Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4 %-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben. 2003-ban összesen 41,9 millió autó készült. Válaszait százezerre kerekítve adja meg!

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben? (4 pont)

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben? (4 pont)

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinek ugyanakkora százalékával csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az előrejelzés szerint az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során? Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

d) Elfogadjuk az előrejelzés adatát, majd azt feltételezzük, hogy 2013 után évente 3 %-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 76 %-a? (4 pont)

34) Egy autó ára újonnan 2 millió 152 ezer forint, a megvásárlása után öt évvel ennek az autónak az értéke 900 ezer forint.

a) A megvásárolt autó tulajdonosának a vezetési biztonságát a vásárláskor 90 ponttal jellemezhetjük. Ez a vezetési biztonság évente az előző évinek 6 %-ával nő. Hány pontos lesz 5 év elteltével az autótulajdonos vezetési biztonsága? Válaszát egész pontra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Az első öt év során ennek az autónak az értéke minden évben az előző évi értékének ugyanannyi százalékával csökken. Hány százalék ez az éves csökkenés? (8 pont)
Válaszát egész százalékra kerekítve adja meg!

35) Egy sejttenyészetben 2 naponta kétszereződik meg a sejtek száma. Az első nap kezdetén 5000 sejtből állt a tenyészet. Hány sejt lesz a tenyészetben 8 nap elteltével?
Számításait részletezze! (3 pont)

36) A 2000 eurós tőke évi 6 %-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra? Megoldását részletezze! (4 pont)

37) Egy számtani sorozat első tagja 56, differenciája -4.

a) Adja meg a sorozat első 25 tagjának összegét! (2 pont)

b) Számítsa ki az n értékét és a sorozat n-edik tagját, ha az első n tag összege 408. (8 pont)

Egy mértani sorozat első tagja 10^{25}, hányadosa $0,01$.

c) Hányadik tagja ennek a sorozatnak a 100 000? (7 pont)

38) Egy bomlási folyamatban a radioaktív részecskék száma kezdetben $6 \cdot 10^{23}$, amely érték percenként az előző érték századrészére csökken. Számítsa ki a radioaktív részecskék számát 10 perc elteltével! (2 pont)

39) Zsuzsa nagyszülei elhatározzák, hogy amikor unokájuk 18 éves lesz, akkor vásárlási utalványt adnak neki ajándékba. Ezért Zsuzsa 18. születésnapja előtt 18 hónapon keresztül minden hónapban félretesznek valamekkora összeget úgy, hogy Zsuzsa 18. születésnapján éppen 90 000 forintjuk legyen erre a célra. Úgy tervezik, hogy az első alkalom után mindig 200 forinttal többet tesznek félre, mint az előző hónapban.

a) Terveik szerint mennyi pénzt tesznek félre az első, és mennyit az utolsó alkalommal? (7 pont)

Zsuzsa egyik testvére hét évvel idősebb a másik testvérénél. A két testvér életkorának mértani közepe 12.

b) Hány éves Zsuzsa két testvére? (5 pont)

40) Egy számtani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; a és 18.
a) Határozza meg az a értékét és a sorozat differenciáját! (3 pont)
Egy mértani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; b és 18.
b) Határozza meg a b értékét és a sorozat hányadosát! (5 pont)
A 32; c és 18 számokról tudjuk, hogy a három szám átlaga kettővel kisebb, mint a mediánja, továbbá $32 > c > 18$.
c) Határozza meg a c értékét! (5 pont)

41) Egy számtani sorozat negyedik tagja 7, ötödik tagja -5. Határozza meg a sorozat első tagját! Megoldását részletezze! (3 pont)

42) A kereskedelemmel foglalkozó cégek között több olyan is van, amely állandóan emelkedő fizetéssel jutalmazza a dolgozók munkavégzését. Péter munkát keres, és két cég ajánlata közül választhat:
I. ajánlat: Az induló fizetés 200000 Ft, amit havonta 5000 Ft-tal emelnek négy éven át.
II. ajánlat: Az induló fizetés 200000 Ft, amit havonta 2%-kal emelnek négy éven át.
a) Melyik ajánlatot válassza Péter, ha tervei szerint négy évig a választott munkahelyen akar dolgozni, és azt az ajánlatot szeretné választani, amelyik a négy év alatt nagyobb összjövedelmet kínál? (7 pont)
A Péter szerződésében szereplő napi 8 óra munkaidő rugalmas, azaz lehetnek olyan napok, amikor 8 óránál többet, és olyanok is, amikor kevesebbet dolgozik. 6 óránál kevesebbet, illetve 10 óránál többet sosem dolgozik egy nap. Az alábbi táblázatban Péter januári munkaidő-kimutatásának néhány adata látható.

Napi munkaidő (óra)	6	7	8	9	10
Hány munkanapon dolgozott ennyi órát?	4	5			3

b) Számítsa ki a táblázatból hiányzó két adatot, ha tudjuk, hogy január hónap 22 munkanapján Péter átlagosan naponta 8 órát dolgozott! (6 pont)

43) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.
a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)
1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg: $f(x) = 51 \cdot 1{,}667^x$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.
b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózatból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

44) Egy mértani sorozat második tagja 6, harmadik tagja -18. Adja meg a sorozat ötödik tagját! (2 pont)

45) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.

a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására? (7 pont)

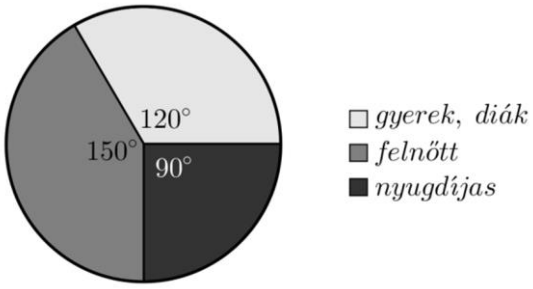
A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4 \cdot H - R + F$ képlettel történik, ahol H a helyes válaszok, R a rossz feladatok, F pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.

b) Hány helyes választ adott Vera? (5 pont)

Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.

c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem? (5 pont)

46) Az alábbi kördiagramm egy balatoni strandon a júliusban megvásárolt belépőjegyek típusának eloszlását mutatja.



Júliusban összesen 16416 fő vásárolt belépőjegyet. A belépőjegyek árát az alábbi táblázat tartalmazza.

gyerek, diák	350 Ft/fő
felnőtt	700 Ft/fő
nyugdíjas	400 Ft/fő

a) Mennyi volt a strand bevétele a júliusban eladott belépőkből? (5 pont)

A tapasztalatok szerint júliusban folyamatosan nő a strandolók száma. Ezért a strandbüfében rendszer, hogy július 1-jei megrendelést követően július 2-től kezdve július 31-ig minden nap ugyanannyi literrel növelik a nagykereskedésből megrendelt üdítő mennyiségét.
A könyvelésből kiderült, hogy július 1-jén, 2-án és 3-án összesen 165 litert, július 15-én pedig 198 litert rendeltek.

b) Hány liter üdítőt rendeltek júliusban összesen? (7 pont)

Statisztika

1) Egy dolgozatnál az elérhető legmagasabb pontszám 100 volt. 15 tanuló eredményeit tartalmazza a következő táblázat:

Elért pontszám	100	95	91	80	65	31	17	8	5
A dolgozatok	3	2	1	2	1	2	2	1	1

a) Határozza meg az összes dolgozat pontszámának átlagát (számtani közepét), móduszát és mediánját! (5 pont)

b) A dolgozatok érdemjegyeit az alábbi táblázat alapján kell megállapítani!

Pontszám	Osztályzat
80-100	jeles
60-79	jó
40-59	közepes
20-39	elégséges
0-19	elégtelen

Ennek ismeretében töltse ki a következő táblázatot! (2 pont)

Osztályzat	jeles	jó	közepes	elégséges	elégtelen
A dolgozatok száma					

c) Készítsen kördiagramot az osztályzatok megoszlásáról! Adja meg az egyes körcikkekhez tartozó középponti szögek értékét is! (5 pont)

2) A fizika órai tanulókísérlet egy tömegmérési feladat volt. A mérést 19 tanuló végezte el. A mért tömegre gramm pontossággal a következő adatokat kapták: 37, 33, 37, 36,35, 36, 37, 40, 38, 33, 37, 36, 35, 35, 38, 37, 36, 35, 37.

a) Készítse el a mért adatok gyakorisági táblázatát! (3 pont)

b) Mennyi a mérési adatok átlaga gramm pontossággal? (3 pont)

c) Mekkora a kapott eredmények mediánja, módusza? (2 pont)

d) Készítsen oszlopdiagramot a mérési eredményekről! (4 pont)

3) Egy osztály történelem dolgozatot írt. Öt tanuló dolgozata jeles, tíz tanulóé jó, három tanulóé elégséges, két tanuló elégtelen dolgozatot írt.

a) Hányan írtak közepes dolgozatot, ha tudjuk, hogy az osztályátlag 3,410-nál nagyobb és 3,420-nál kisebb? (10 pont)

b) Készítsen gyakorisági táblázatot, és ábrázolja oszlop-diagrammal az osztályzatok gyakoriságát! (4 pont)

c) A párhuzamos osztályban 32 tanuló írta meg ugyanezt a dolgozatot, és ott 12 közepes dolgozat született. Melyik osztályban valószínűbb, hogy a dolgozatok közül egyet véletlenszerűen elővéve éppen közepes dolgozat kerül a kezünkbe? (3 pont)

4) Az alábbi adatok március első hetében mért napi hőmérsékleti maximumok (az adatokat °C-ban mérték):

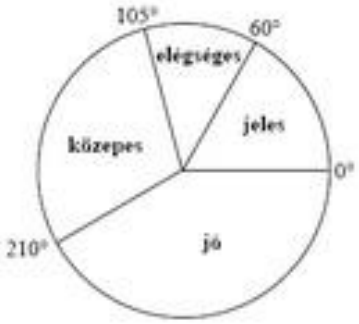
hétfő	kedd	szerda	csütörtök	péntek	szombat	vasárnap
5,2	1,6	3,1	–0,6	–1,1	1,6	0

Mennyi volt ezen a héten a hőmérsékleti maximumok átlaga? (2 pont)

5) A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.

a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották? (3 pont)

b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:
Adja meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket! Válaszát foglalja táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltesse oszlop-diagramon is! (6 pont)



c) Az összes megírt dolgozatból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy jeles vagy jó dolgozatot veszünk a kezünkbe? (3 pont)

6) Egy márciusi napon öt alkalommal mérték meg a külső hőmérsékletet. A kapott adatok átlaga 1 °C, mediánja 0 °C. Adjon meg öt ilyen lehetséges hőmérséklet értéket! (4 pont)

7) Egy tanulmányi verseny döntőjében 8 tanuló vett részt. Három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladat maximálisan elérhető pontszáma 40, a másodiké 50, a harmadiké 60. A nyolc versenyző feladatonkénti eredményeit tartalmazza az alábbi táblázat:

Versenyző sorszáma	I.	II.	III.	Összpontszám	Százalékos teljesítmény
1.	28	16	40		
2.	31	35	44		
3.	32	28	56		
4.	40	42	49		
5.	35	48	52		
6.	12	30	28		
7.	29	32	45		
8.	40	48	41		

a) Töltse ki a táblázat hiányzó adatait! A százalékos teljesítményt egészre kerekítve adja meg!
Melyik sorszámú versenyző nyerte meg a versenyt, ki lett a második, és ki a harmadik helyezett? (5 pont)

b) A nyolc versenyző dolgozata közül véletlenszerűen kiveszünk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 75%-osnál jobb teljesítményű dolgozat került a kezünkbe? (2 pont)

c) Egy tanuló betegség miatt nem tudott megjelenni a döntőn. Másnap megkapta, és megoldotta a feladatokat. Eredményét később összehasonlította a nyolc döntős versenyző eredményével. Észrevette, hogy az első feladatot a versenyzők I. feladatra kapott pontszámainak a mediánjára teljesítette (egészre kerekítve), a második feladatot pedig a nyolc versenyző II. feladata pontszámainak a számtani közepére (szintén egészre kerekítve). A III. feladatot 90%-ra teljesítette.
Mennyi lett ennek a tanulónak az összpontszáma? Ezzel hányadik helyen végzett volna? (5 pont)

8) Máté a tanév során 13 érdemjegyet kapott matematikából. Ezek időrendben: 4, 4, 3, 4, 4, 2, 5, 4, 3, 1, 3, 3, 2. Adja meg a jegyek móduszát és mediánját! (2 pont)

9) Egy gimnáziumban 50 diák tanulja emelt szinten a biológiát. Közülük 30-an tizenegyedikesek és 20-an tizenkettedikesek. Egy felmérés alkalmával a tanulóktól azt kérdezték, hogy hetente átlagosan hány órát töltenek a biológia házi feladatok megoldásával. A táblázat a válaszok összesített eloszlását mutatja.

A biológia házi feladatok megoldásával hetente eltöltött órák száma*	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
Tanulók száma	3	11	17	15	4

* A tartományokhoz az alsó határ hozzátartozik, a felső nem.

a) Ábrázolja oszlopdiagramon a táblázat adatait! (3 pont)
b) Átlagosan hány órát tölt a biológia házi feladatok megoldásával hetente ez az 50 tanuló? Az egyes időintervallumok esetében a középértékekkel (1, 3, 5, 7 és 9 órával) számoljon! (3 pont)

Egy újságíró két tanulóval szeretne interjút készíteni. Ezért a biológiát emelt szinten tanuló 50 diák névsorából véletlenszerűen kiválaszt két nevet.

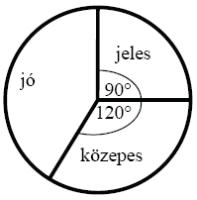
c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik kiválasztott tanuló tizenegyedikes, a másik pedig tizenkettedikes? (6 pont)
d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét kiválasztott tanuló legalább 4 órát foglalkozik a biológia házi feladatok elkészítésével hetente? (5 pont)

10) Öt szám átlaga 7. Az öt szám közül négyet ismerünk, ezek az 1, a 8, a 9 és a 12. Határozza meg a hiányzó számot! Válaszát számítással indokolja! (3 pont)

11) Rozi irodalomból a tanév során a következő jegyeket kapta: 2; 4; 3; 5; 2; 4; 5; 3; 5. Mi lenne az év végi osztályzata, ha az a kapott jegyek mediánja lenne? (2 pont)

12) A kézilabdaedzéseken 16 tanuló vesz részt, átlagmagasságuk 172 cm. Mennyi a magasságaik összege? (2 pont)

13) Egy iskolában 120 tanuló érettségizett matematikából. Nem volt sem elégtelen, sem elégséges dolgozat. Az eredmények megoszlását az alábbi kördiagram szemlélteti.
Hányan kaptak jeles, jó, illetve közepes osztályzatot? (3 pont)



14) Számítsa ki a 12 és 75 számok mértani közepét! (2 pont)

15) Egy 2000. január elsejei népesség-statisztika szerint a Magyarországon élők kor és nem szerinti megoszlása (ezer főre) kerekítve az alábbi volt:

Korcsoport (év)	Férfiak száma (ezer fő)	Nők száma (ezer fő)
0 - 19	1214	1158
20 - 39	1471	1422
40 - 59	1347	1458
60 - 79	685	1043
80 -	75	170

a) Melyik korcsoport volt a legnépesebb? A táblázat adatai alapján adja meg, hogy hány férfi és hány nő élt Magyarországon 2000. január elsején? (3 pont)
b) Ábrázolja egy közös oszlopdiagramon, két különböző jelölésű oszloppal a férfiak és a nők korcsoportok szerinti megoszlását! (5 pont)
c) Számítsa ki a férfiak százalékos arányát a 20 évnél fiatalabbak korcsoportjában, valamint a legalább 80 évesek között! (4 pont)

16) Számítsa ki 25 és 121 számtani és mértani közepét! (2 pont)

17) Melyik az a legnagyobb szám az alábbi 12 szám közül, amelynek elhagyásával a megmaradt 11 szám mediánja 6?
6; 4; 5; 5; 1; 10; 7; 6; 11; 2; 6; 5 (2 pont)

18) Az alábbi táblázat egy 7 fős csoport tagjainak cm-ben mért magasságait tartalmazza. Mekkora a csoport átlagmagassága? A csoport melyik tagjának a magassága van legközelebb az átlagmagassághoz?

Anna	Bea	Marci	Karcsi	Ede	Fanni	Gábor
155	158	168	170	170	174	183

(3 pont)

19) Egy 17 fős csoport matematika témazáró dolgozatának értékelésekor a tanár a következő információkat közölte:
Mind a 17 dolgozatot az 1-es, a 2-es, a 3-as, a 4-es és az 5-ös jegyek valamelyikével osztályozta.
A jegyek mediánja 4, módusza 4, terjedelme 4 és az átlaga (két tizedes jegyre kerekítve) 3,41.
Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, illetve hamis!
a) A dolgozatoknak több mint a fele jobb hármasnál. (1 pont)
b) Nincs hármasnál rosszabb dolgozat. (1 pont)

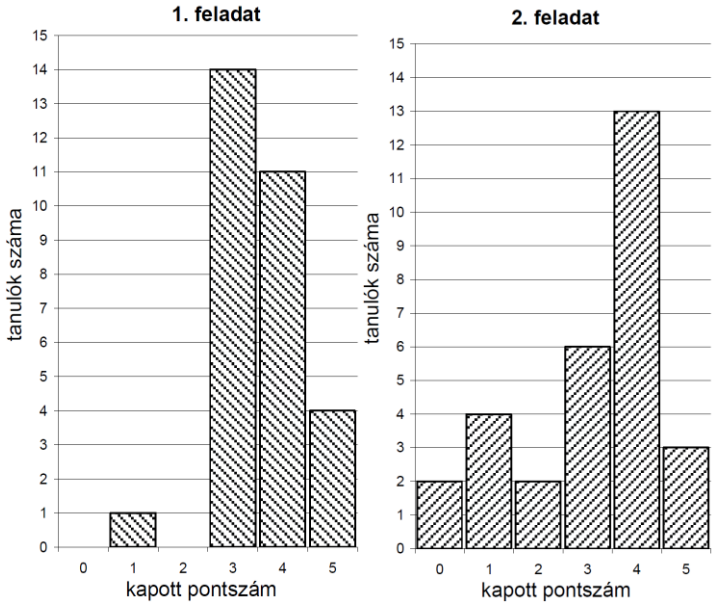
20) Számítsa ki azt a két pozitív számot, amelyek számtani (aritmetikai) közepe 8, mértani (geometriai) közepe pedig 4,8. (12 pont)

21) Megkérdeztek 25 családot arról, hogy hány forintot költöttek az elmúlt hónapban friss gyümölcsre. A felmérés eredményét mutatja az alábbi táblázat:

3500	4500	5600	4000	6800
4000	3400	5600	6200	4500
500	5400	2500	2100	1500
9000	1200	3800	2800	4500
4000	3000	5000	3000	5000

(Az adatokat tekintsük pontos értékeknek!)
a) Hány forintot költöttek átlagosan ezek a családok friss gyümölcs vásárlására az elmúlt hónapban? (3 pont)
b) Ossza 1000 Ft terjedelmű osztályokba a fenti értékeket, kezdve a 0-1000 Ft, 1001-2000 Ft stb. osztályokkal, és ábrázolja ezeknek az osztályoknak a gyakoriságát oszlopdiagramon! (5 pont)
c) Az 500 Ft és a 9000 Ft kiugró értékek. (6 pont)
Mennyi a megmaradt adatok átlaga, ha ezeket a kiugró értékeket elhagyjuk az adatok közül?
Hány százalékos változást jelent ez az eredeti átlaghoz képest, és milyen irányú ez a változás?
Mennyi az így keletkezett új adatsor terjedelme?
(Az átlagot forintra, a százaléklábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)
d) Az eredeti mintát a vizsgálatot végző cég két új család megfelelő adatával bővítette. Az egyik az eredeti átlagnál 1000 Ft-tal többet, a másik ugyanennyivel kevesebbet költött havonta friss gyümölcsre.
Mutassa meg számítással, hogy így az átlag nem változott! (3 pont)

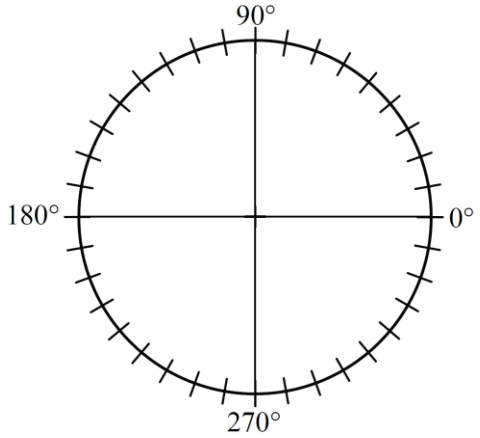
22) Egy iskolai tanulmányi verseny döntőjébe 30 diák jutott be, két feladatot kellett megoldaniuk. A verseny után a szervezők az alábbi oszlopdiagramokon ábrázolták az egyes feladatokban szerzett pontszámok eloszlását:



a) A diagramok alapján töltse ki a táblázat üres mezőit! Az első feladatra kapott pontszámok átlagát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (3 pont)

	1. feladat	2. feladat
pontszámok átlaga		3,10
pontszámok mediánja		

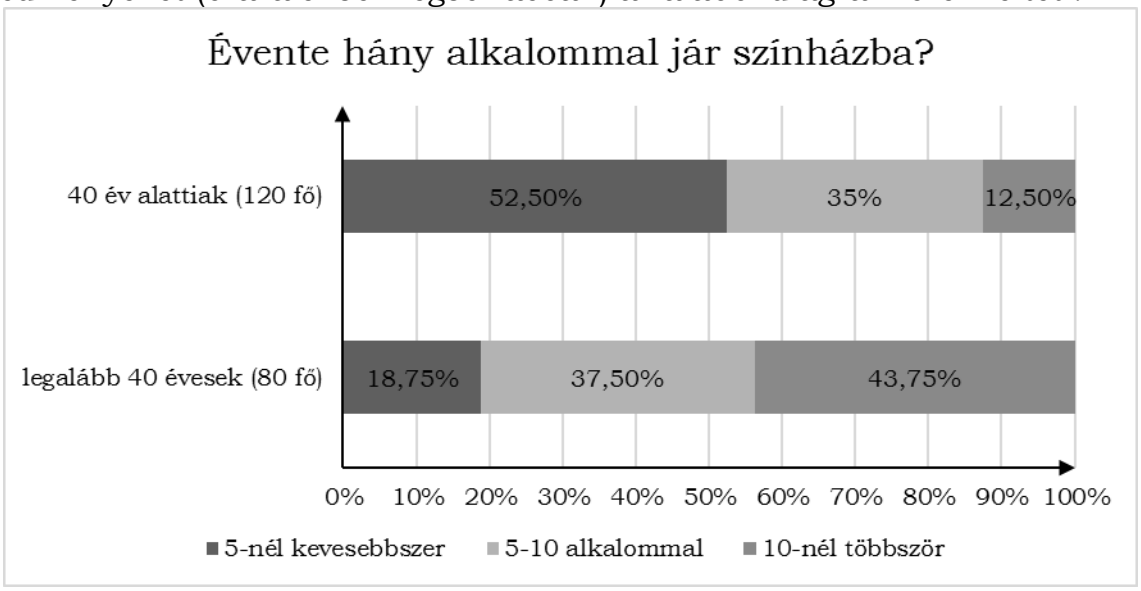
b) A megfelelő középponti szögek megadása után ábrázolja kördiagramon a 2. feladatra kapott pontszámok eloszlását! (4 pont)



c) A versenyen minden tanuló elért legalább 3 pontot. Legfeljebb hány olyan tanuló lehetett a versenyzők között, aki a két feladat megoldása során összesen pontosan 3 pontot szerzett? (5 pont)

23) Adja meg a 2; 11; 7; 3; 17; 5; 13 számok mediánját! (2 pont)

24) Egy felmérés során két korcsoportban összesen 200 embert kérdeztek meg arról, hogy évente hány alkalommal járnak színházba. Közülük 120-an 40 évesnél fiatalabbak, 80 válaszadó pedig 40 éves vagy annál idősebb volt. Az eredményeket (százalékos megoszlásban) az alábbi diagram szemlélteti.



a) Hány legalább 40 éves ember adta azt a választ, hogy 5-nél kevesebbszer volt színházban? (3 pont)

b) A megkérdezettek hány százaléka jár évente legalább 5, de legfeljebb 10 alkalommal színházba? (4 pont)

c) A 200 ember közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük legfeljebb az egyik fiatalabb 40 évesnél?

Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

25) Az alábbi táblázat András és Bea érettségi érdemjegyeit mutatja.

	András	Bea	Cili
Magyar nyelv és irodalom	3	4	
Matematika	4	5	
Történelem	4	4	
Angol nyelv	3	5	
Fölrajz	5	5	

a) Számítsa ki András jegyeinek átlagát és szórását! (3 pont)

Cili érettségi eredményéről azt tudjuk, hogy jegyeinek átlaga András és Bea jegyeinek átlaga közé esik, továbbá Cili jegyeinek a szórása 0.

b) Töltse ki a táblázatot Cili jegyeivel! (3 pont)

Dávid is ebből az 5 tárgyból érettségizett, az 5 tárgy az ő bizonyítványában is a fenti sorrendben szerepel. Eredményeiről azt tudjuk, hogy jegyeinek mediánja 4, átlaga pedig 4,4 lett.

c) Határozza meg Dávid osztályzatait és azt, hogy hányféleképpen lehetne ezekkel az osztályzatokkal kitölteni az érettségi bizonyítványát! (7 pont)



Az ábra a 24 fős osztály érettségi eredményeinek megoszlását mutatja matematikából. Tudjuk, hogy jeles osztályzatot 4 tanuló ért el.

d) Az osztály tanulói közül hányan érettségiztek közepes eredménnyel matematikából? (4 pont)

26) Egy teherautóval több zöldségboltba almát

szállítottak. Az egyik üzletbe 60 kg jonatánt, 135 kg starkingot, 150 kg idaredet és 195 kg golden almát vittek. A jonatán és az idared alma kilóját egyaránt 120 Ft-ért, a starking és a golden kilóját 85 Ft-ért árulta a zöldséges.

a) Hány százalékkal volt drágább a jonatán alma kilója a goldenéhez képest? (2 pont)

b) Mennyi bevételhez jutott a zöldséges, ha a teljes mennyiséget eladta? (2 pont)

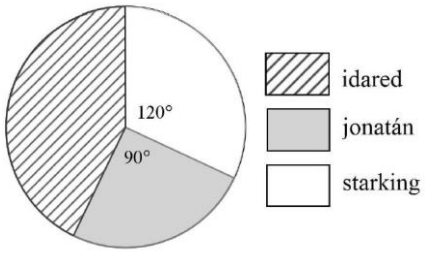
c) A zöldségeshez kiszállított árukészlet alapján számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe került nála 1 kg alma! (3 pont)

d) Ábrázolja kördiagramon a zöldségeshez érkezett alma mennyiségének fajták szerinti megoszlását! (6 pont)

A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.

e) A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz? (4 pont)

27) Egy gyümölcsárus háromféle almát kínál a piacon. A teljes készletről kördiagramot készítettünk.
Írja a táblázat megfelelő mezőibe a hiányzó adatokat! (3 pont)



Alma fajtája	A körcikk középponti szöge (fok)	Mennyiség (kg)
jonatán	90	
idared		
starking	120	48

28) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)

b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	3
1	94
2	89
3	14

Jóska felmérése alapján töltse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.
Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!
A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
D) Nem minden háztartásban van televízió. (2 pont)

29) Kóstolóval egybekötött termékbemutatót tartottak egy új kávékeverék piaci megjelenését megelőzően. Két csoport véleményét kérték úgy, hogy a terméket az 1-től 10-ig terjedő skálán mindenkinek egy-egy egész számmal kellett értékelnie. Mindkét csoport létszáma 20 fő volt. A csoportok értékelése az alábbi táblázatban látható.

pontszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság az 1. csoportban	0	0	1	0	6	8	2	2	1	0
gyakoriság a 2. csoportban	0	8	0	2	0	1	0	0	0	9

a) Ábrázolja közös oszlopdiagramon, különböző jelölésű oszlopokkal a két csoport pontszámait! A diagramok alapján fogalmazzon meg véleményt arra vonatkozóan, hogy melyik csoportban volt nagyobb a pontszámok szórása! Véleményét a diagramok alapján indokolja is! (5 pont)
b) Hasonlítsa össze a két csoport pontszámainak szórását számítások segítségével is! (5 pont)

Kétféle kávéból 14 kg 4600 Ft/kg egységárú kávékeveréket állítanak elő. Az olcsóbb kávéfajta egységára 4500 Ft/kg, a drágábbé pedig 5000 Ft/kg.
c) Hány kilogramm szükséges az egyik, illetve a másik fajta kávéból? (7 pont)

30) Egy kis cégnél nyolcan dolgoznak: hat beosztott és két főnök. A főnökök átlagos havi jövedelme 190 000 Ft, a beosztottaké 150 000 Ft.
Hány forint a cég nyolc dolgozójának átlagos havi jövedelme? (2 pont)

31) Réka év végi bizonyítványában a következő osztályzatok szerepelnek: 4; 2; 3; 5; 5; 4; 5; 5; 4. Adja meg Réka osztályzatainak móduszát és mediánját!(2 pont)

32) Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat.

Életkor	17	18	19	21	22	23	24	25	26	31
Gyakoriság	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1

a) Számítsa ki a csapat átlagéletkorát! (2 pont)

Jelölje *A* azt az eseményt, hogy a csapatból 7 játékost véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztottak között legfeljebb egy olyan van, aki 20 évnél fiatalabb.
b) Számítsa ki az *A* esemény valószínűségét! (8 pont)
c) A világbajnokság egyik mérkőzésén a magyar kezdőcsapat 6 mezőnyjátékosáról a következőket tudjuk:
- a legidősebb és a legfiatalabb játékos életkorának különbsége 12 év,
- a játékosok életkorának egyetlen módusza 22 év,
- a hat játékos életkorának mediánja 23 év,
- a hat játékos életkorának átlaga 24 év.

Adja meg a kezdőcsapat hat mezőnyjátékosának életkorát! (7 pont)

33) Egy közvélemény-kutató intézet azt a feladatot kapta, hogy két alkalommal – fél év különbséggel – mérje fel a TV-ben látható három filmsorozat nézettségi adatait. Az ábrán látható kérdőíven a válaszoló vagy azt jelölhette be, hogy az A, B, és C sorozatok közül melyiket nézi (akár többet is meg lehetett jelölni), vagy azt, hogy egyiket sem nézi. Az első felméréskor kapott 600 kérdőív jelöléseit összesítve megállapították, hogy az A sorozat összesen 90 jelölést kapott, a B sorozat összesen 290-et, a C sorozat pedig összesen 230-at. Érdekes módon olyan válaszadó nem volt, aki pontosan két sorozatot nézett volna, viszont 55-en mindhárom sorozatot bejelölték.

Tegyen X-et a megfelelő mezőbe!

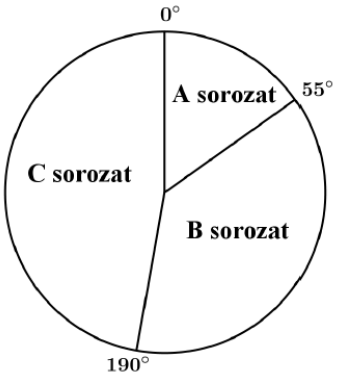
Nézem az **A** sorozatot.	☐
Nézem a **B** sorozatot.	☐
Nézem a **C** sorozatot.	☐
Egyik sorozatot sem nézem.	☐

Ha az utolsó mezőbe X-et tett, akkor a másik három mezőt hagyja üresen!

a) A válaszolók hány százaléka nézte az A sorozatot? (2 pont)

b) Hány válaszoló nem nézte egyik sorozatot sem? (5 pont)

A második felmérés során kiválogatták azokat a kérdőíveket, amelyeken valamelyik sorozat meg volt jelölve. Ezeken a három sorozat nézettségére összesen 576 jelölés érkezett. Az adatok feldolgozói minden jelölést megszámoltak, és a végeredményről az itt látható kördiagramot készítették.



c) Számítsa ki, hogy az egyes sorozatok nézettségére hány jelölés érkezett! (5 pont)

34) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)

b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)

Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapítottuk meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.

c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)

Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

35) Egy mérőállomáson az egyik év júliusának tizenhárom egymást követő napján az alábbi csapadékértékeket mérték (milliméterben): 2; 26; 8; 1; 21; 10; 22; 49; 5; 25; 9. Adja meg az adatsor terjedelmét és mediánját! (3 pont)

36) Egy webáruházba való belépés előzetes regisztrációhoz kötött, melynek során a regisztráló életkorát is meg kell adnia. Az adatok alapján a 25560 regisztráló közül 28 évesnél fiatalabb 7810 fő, 55 évesnél idősebb 4615 fő, a többiek 28 és 55 év közöttiek.

a) Készítsen a létszámadatok alapján kördiagramot, kiszámítva a három körcikkhez tartozó középponti szögeket is! (5 pont)

A webáruház üzemeltetői a vásárlói szokásokat szeretnék elemezni, ezért a regisztráltak közül véletlenszerűen kiválasztanak két személyt.

b) Adja meg annak a valószínűségét, hogy az egyik kiválasztott személy 28 évesnél fiatalabb, a másik 55 évesnél idősebb! (4 pont)

A regisztráltak egy része vásárol is a webáruházban. A vásárlók között a 28 év alattiak éppen kétszer annyian vannak, mint az 55 évesnél idősebbek. A 28 év alattiak az elmúlt időszakban összesen 19 325 700 Ft, az 55 év felettiek 17 543 550 Ft értékben vásároltak. Az 55 év felettiek átlagosan 2410 Ft-tal költöttek többet, mint a 28 év alattiak.

c) Számítsa ki, hány 55 év feletti vásárlója volt a webáruháznak, és adja meg, hogy ezek a vásárlók átlagosan mennyit költöttek! (8 pont)

37) Határozza meg az alábbi adatsor terjedelmét, átlagát és szórását!

1;1;1;1;3;3;3;5;5;7 (4 pont)

38) Egy számtani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; a és 18.

a) Határozza meg az a értékét és a sorozat differenciáját! (3 pont)

Egy mértani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; b és 18.

b) Határozza meg a b értékét és a sorozat hányadosát! (5 pont)

A 32; c és 18 számokról tudjuk, hogy a három szám átlaga kettővel kisebb, mint a mediánja, továbbá $32 > c > 18$.

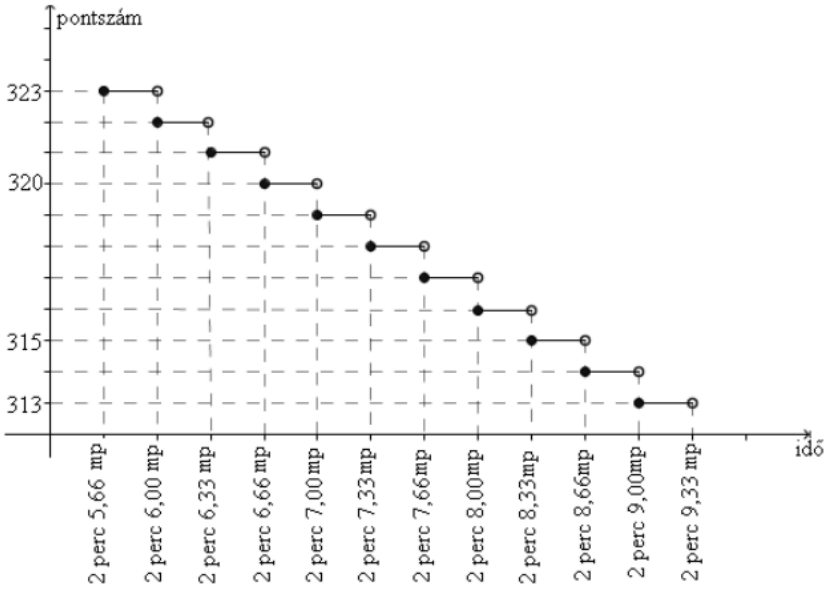
c) Határozza meg a c értékét! (5 pont)

39) Egy öttusaversenyen 31 résztvevő indult. A vívás az első szám, ahol mindenkivel egyszer mérkőzik meg. Aki 21 győzelmet arat, az 250 pontot kap. Aki ennél több győzelmet arat, az minden egyes további győzelemért 7 pontot kap a 250 ponton felül. Aki ennél kevesebbszer győz, attól annyiszor vonnak le 7 pontot a 250-ből, ahány győzelem hiányzik a 21-hez. (A mérkőzések nem végződhetnek döntetlenre.)

a) Hány pontot kapott a vívás során Péter, akinek 5 veresége volt? (3 pont)

b) Hány győzelme volt Bencének, aki 215 pontot szerzett? (3 pont)

Az öttusa úszás számában 200 métert kell úszni. Az elért időeredményeként járó pontszámot mutatja a grafikon.



c) Jelölje meg az alábbi két kérdés esetén a helyes választ!

Hány pontot kapott Robi, akinek az időeredménye 2 perc 6,28 másodperc? (2 pont)

A: 320
B: 321
C: 322
D: 323

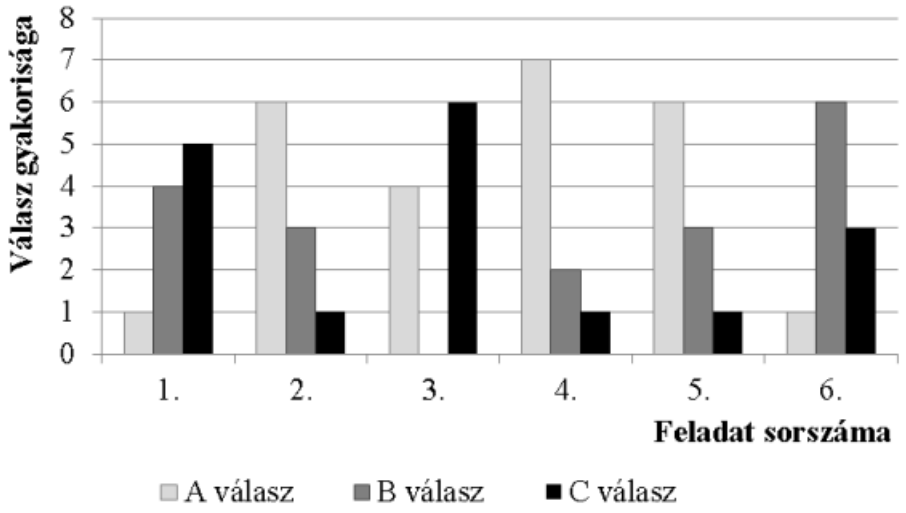
Péter 317 pontot kapott. Az alábbiak közül válassza ki Péter időeredményét!

A: 2 perc 7,00 mp
B: 2 perc 7,60 mp
C: 2 perc 7,80 mp
D: 2 perc 8,00 mp

Az öttusa lovaglás számában egy akadálypályán tizenkét különböző akadályt kell a versenyzőnek átugrania. Egy akadály a nehézsége alapján három csoportba sorolható: A, B vagy C típusú. Ádám a verseny előtti bemelegítéskor először az öt darab A, majd a négy darab B, végül a három darab C típusú akadályokon ugrat át, mindegyiken pontosan egyszer. Bemelegítéskor az egyes akadálytípusokon belül a sorrend szabadon megválasztható.

d) Számítsa ki, hogy a bemelegítés során hányféle sorrendben ugrathatja át Ádám a tizenkét akadályt! (4 pont)

40) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott választok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)

b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)

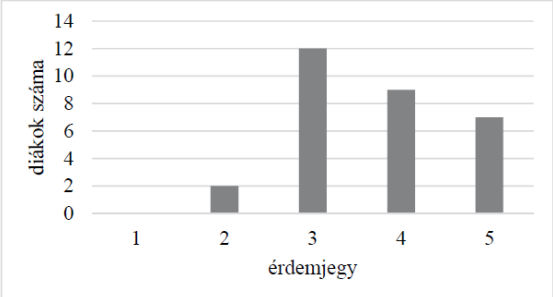
Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.

d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben? (5 pont)

41) A 8-nak és egy másik pozitív számnak a mértani közepe 12. Melyik ez a másik szám? (2 pont)

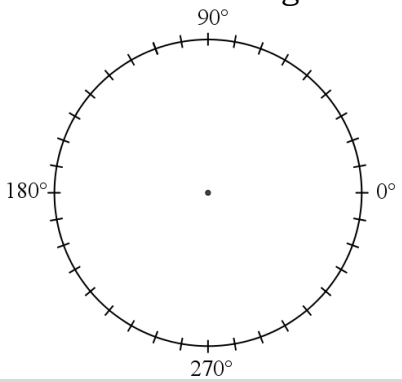
42) Egy adathalmazban öt adat van: 0; 1; 2; 3; 4. Számítsa ki az adathalmaz szórását! (2 pont)

43) Egy 30 fős osztály matematikaérettségi vizsgájának érdemjegyei olvashatók le az alábbi diagramról.



a) Adja meg az osztály matematikaérettségi érdemjegyeinek átlagát, mediánját és móduszát! (4 pont)

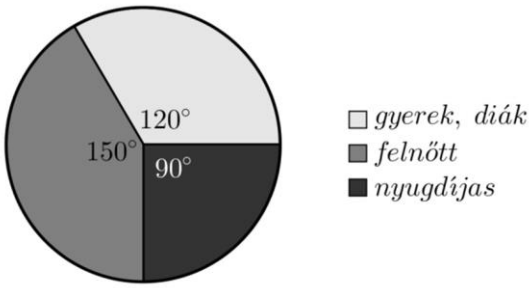
b) Ábrázolja az érdemjegyek eloszlását kördiagramon! (4 pont)



Az osztály tanulóinak matematikaérettségi dolgozatai közül az érettségi elnök véletlenszerűen kiválaszt és megvizsgál kettőt.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy mindkét kiválasztott dolgozat érdemjegye hármas! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

44) Az alábbi kördiagramm egy balatoni strandon a júliusban megvásárolt belépőjegyek típusának eloszlását mutatja.



Júliusban összesen 16416 fő vásárolt belépőjegyet. A belépőjegyek árát az alábbi táblázat tartalmazza.

gyerek, diák	350 Ft/fő
felnőtt	700 Ft/fő
nyugdíjas	400 Ft/fő

a) Mennyi volt a strand bevétele a júliusban eladott belépőkből? (5 pont)

A tapasztalatok szerint júliusban folyamatosan nő a strandolók száma. Ezért a strandbüfében rendszer, hogy július 1-jei megrendelést követően július 2-től kezdve július 31-ig minden nap ugyanannyi literrel növelik a nagykereskedésből megrendelt üdítő mennyiségét.
A könyvelésből kiderült, hogy július 1-jén, 2-án és 3-án összesen 165 litert, július 15-én pedig 198 litert rendeltek.

b) Hány liter üdítőt rendeltek júliusban összesen? (7 pont)

45) Egy 20 fős társaság tagjait az április havi szabadidős tevékenységeikről kérdezték. Mindenki három eldöntendő kérdésre válaszolt (igennel vagy nemmel).

I. Volt-e moziban?
II. Olvasott-e szépirodalmi könyvet?
III. Volt-e koncerten?

A válaszokból kiderült, hogy tizenketten voltak moziban, kilencen olvastak szépirodalmi könyvet, és négy fő járt koncerten. Öten voltak, akik moziban jártak és szépirodalmi könyvet is olvastak, négyen pedig moziban és koncerten is jártak. Hárman mindhárom kérdésre igennel válaszoltak.

a) Hány olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt? (6 pont)

A társaság 20 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legalább egyikük volt moziban április folyamán! (5 pont)

Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2.

c) Adja meg ezt a kilenc számot! (6 pont)

Számelmélet

1) Egy számtani sorozat második tagja 17, harmadik tagja 21.
   a) Mekkora az első 150 tag összege? (5 pont)

Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25 863.

   b) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)
   c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

2) Peti felírt egy hárommal osztható hétjegyű telefonszámot egy cédulára, de az utolsó jegy elmosódott. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy nulla volt. A kiolvasható szám: 314726Δ. Igaza lehetett-e Peti barátjának? Válaszát indokolja! (2 pont)

3) Tekintse a következő állításokat, és a táblázatban mindegyik betűjele mellé írja oda, hogy igaz, vagy hamis állításról van-e szó!
   a) Két pozitív egész közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolútértéke nagyobb. (1 pont)
   b) Két egész szám közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolútértéke nagyobb. (1 pont)
   c) Negatív szám egész kitevőjű hatványai között pozitívak és negatívak is vannak. (1 pont)

4) Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.
   a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám? (8 pont)
   b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (4 pont)

5) A pozitív egészeket növekvő sorrendbe állítjuk. Melyik szám nagyobb: a hetedik 13-mal osztható pozitív egész, vagy a tizenharmadik 7-tel osztható pozitív egész? (2 pont)

6) Háromjegyű számokat írtunk fel a 0; 5 és 7 számjegyekkel. Írja fel ezek közül azokat, amelyek öttel oszthatók, és különböző számjegyekből állnak! (2 pont)

7) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
   a) Ha egy természetes szám osztható hattal és tízzel, akkor osztható hatvannal. (1 pont)
   b) A 20-nál kisebb pozitív prímszámok összege páratlan. (1 pont)
   c) A deltoid átlói felezik a belső szögeket. (1 pont)

8) Adja meg a $\left]-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right[$ nyílt intervallum két különböző elemét! (2 pont)

9) Írja fel két egész szám hányadosaként a $2+\frac{2}{3}$ szám reciprokának értékét! (2 pont)

10) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,
   a) amely öt azonos számjegyből áll; (3 pont)
   b) amelyik páros; (4 pont)
   c) amelyik 4-gyel osztható? (5 pont)

11) Adja meg a 24 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát! (2 pont)

12) Írja fel 24 és 80 legkisebb közös többszörösét! Számítását részletezze! (3 pont)

13) Sorolja fel a 2010-nek mindazokat a pozitív osztóit, amelyek prímszámok! (2 pont)

14) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
   I. Minden prímszám páratlan. (1 pont)
   II. Létezik páratlan prímszám. (1 pont)
   III. Minden egész szám racionális szám. (1 pont)
   IV. Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként (1 pont)

15) Adottak a következő számok: $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4$ és $b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 13$.
Írja fel a és b legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! A kért számokat elegendő prímtényezős alakban megadni. (2 pont)

16) Döntse el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz-e vagy hamis!
A: Ha két szám négyzete egyenlő, akkor a számok is egyenlők. (1 pont)
B: A kettes számrendszerben felírt 10100 szám a tízes számrendszerben 20. (1 pont)
C: Egy hatoldalú konvex sokszögnek 6 átlója van. (1 pont)

17) Írja fel prímszámok szorzataként a 420-at! (2 pont)

18) Bontsa fel a 36000-et két részre úgy, hogy a részek aránya 5:4 legyen! (2 pont)

19) Adja meg a következő állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
   A) A $\{0;1;2;3;4\}$ adathalmaz szórása 4.
   B) Ha egy sokszög minden oldala egyenlő hosszú, akkor a sokszög szabályos.
   C) A 4 és a 9 mértani közepe 6. (2 pont)

20) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!
   a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)
   b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)
   c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm^2-ben mért számértéke. (1 pont)
   d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)
   (3 pont)

21) Egy érettségiző osztály félévi matematika osztályzatai között elégtelen nem volt, de az összes többi jegy előfordult. Legkevesebb hány tanulót kell kiválasztani közülük, hogy a kiválasztottak között biztosan legyen legalább kettő, akinek azonos volt félévkor a matematika osztályzata? (2 pont)

22)

a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! (5 pont)

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! (7 pont)

23) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

a) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb mindkét számnál.

b) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig osztója a két szám összegének.

c) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója nem lehet 1.

24) Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja! (3 pont)

25) Legyen A halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza.
Elemeinek felsorolásával adja meg az A, a B, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (4 pont)

26) Melyik számjegy állhat a $\overline{2582X}$ ötjegyű számban az X helyén, ha a szám osztható 3-mal? Válaszát indokolja! (3 pont)

27) Jelölje $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát és $\varnothing$ az üres halmazt! Adja meg az alábbi halmazműveletek eredményét!

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z} \cup \varnothing$

c) $\varnothing \setminus \mathbb{N}$ (3 pont)

28) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Minden valós szám abszolút értéke pozitív.

B: $16^{\frac{1}{4}} = 2$

C: Ha egy szám osztható 6-tal és 9-cel, akkor biztosan osztható 54-gyel is. (2 pont)

29) Milyen számjegy állhat az X helyén, ha a négyjegyű $\overline{361X}$ szám 6-tal osztható? (2 pont)

30) Két különböző színű szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok szorzata prímszám lesz! Megoldását részletezze! (4 pont)

31) Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldását részletezze! (3 pont)

32) Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy néggyel osztható számot választunk? Válaszát indokolja! (3 pont)

33) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
   A: Ha egy szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor osztható 48-cal is.
   B: Ha egy pozitív egész szám minden számjegye osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal.
   C: A 48 és a 120 legnagyobb közös osztója a 12. (2 pont)

34) Milyen számjegyeket írhatunk a c helyére, hogy a $\overline{64c39c}$ hatjegyű szám osztható legyen 3-mal? Válaszát indokolja! (3 pont)

Szöveges feladatok

1) Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12 %-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.
   a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt? (10 pont)
   b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Annának, illetve Zsuzsinak az osztozkodás után? (7 pont)

2) 2001-ben a havi villanyszámla egy háztartás esetében három részből állt. az alapdíj 240 Ft, ez független a fogyasztástól, a nappali áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 19,8 Ft, az éjszakai áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 10,2 Ft. A számla teljes értékének 12 %-át kell még általános forgalmi adóként (ÁFA) kifizetnie a fogyasztónak.
   a) Mennyit fizetett forintra kerekítve egy család abban a hónapban, amikor a nappali fogyasztása 39 kWh, az éjszakai fogyasztása 24 kWh volt? (3 pont)
   b) Adjon képletet a befizetendő számla F összegére, ha a nappali fogyasztás x kWh, és az éjszakai fogyasztás pedig y kWh! (3 pont)
   c) Mennyi volt a család fogyasztása a nappali illetve és az éjszakai áramból abban a hónapban, amikor 5456 Ft-ot fizettek, és tudjuk, hogy a nappali fogyasztásuk kétszer akkora volt, mint az éjszakai? (8 pont)
   d) Mekkora volt a nappali és az éjszakai fogyasztás aránya abban a hónapban, amikor a kétféle fogyasztásért (alapdíj és ÁFA nélkül) ugyanannyit kellett fizetni? (3 pont)

3) Egy farmernadrág árát 20 %-kal felemelték, majd amikor nem volt elég nagy a forgalom, az utóbbi árat 25 %-kal csökkentették. Most 3600 Ft-ért lehet a farmert megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszát számítással indokolja! (4 pont)

4) Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot egy évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel egy év elteltével, ha év közben nem változtatott a lekötésen? (2 pont)

5) Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítésekor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.
   a) Hány sor van a fenyők parcellájában? Hány fenyőfa van egy sorban? (10 pont)
   b) Hány platánfát telepítettek? (2 pont)

6) Bea édesapja két és félszer olyan idős most, mint Bea. 5 év múlva az édesapa 50 éves lesz. Hány éves most Bea? Válaszát indokolja! (3 pont)

7) Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A, a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl.: ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez).

a) Töltse ki az első forduló táblázatának hiányzó adatait! (4 pont)

Első forduló eredményei	1. kérdés	2. kérdés	3. kérdés	4. kérdés
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	
Jó válaszok száma	7	10		8
Anikó elért pontszáma			5	0

b) Hány százalékkal növekedett volna Anikó összpontszáma az első fordulóban, ha a második kérdésre is jól válaszolt volna? (A többi játékos válaszát változatlannak képzeljük.) (3 pont)

c) Ha Anikó valamelyik másik fordulóban mind a négy kérdésre találomra válaszol, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden válasza helyes? (3 pont)

d) Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre kapott összpontszáma a lehető legtöbb legyen? (7 pont)

8) Ha fél kilogramm narancs 75 Ft-ba kerül, akkor hány kilogramm narancsot kapunk 300 Ft-ért? (2 pont)

9) A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az *A* Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6 %-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6 % volt.)

a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott? (3 pont)

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) Hány százalékos volt a B Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel? (10 pont)

c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.) (4 pont)

10) Egy kisüzem 6 egyforma teljesítményű gépe 12 nap alatt gyártaná le a megrendelt csavarmennyiséget. Hány ugyanilyen teljesítményű gépnek kellene dolgoznia ahhoz, hogy ugyanennyi csavart 4 nap alatt készítsenek el? (2 pont)

11) Egy vetélkedőn részt vevő versenyzők érkezéskor sorszámot húznak egy urnából. Az urnában 50 egyforma gömb van. Minden egyes gömbben egy-egy szám van, ezek különböző egész számok 1-től 50-ig.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az elsőnek érkező versenyző héttel osztható sorszámot húz? (3 pont)

A vetélkedő győztesei között jutalomként könyvutalványt szerettek volna szétosztani a szervezők. A javaslat szerint Anna, Bea, Csaba és Dani kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően $1:2:3:4$. Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalom ötödét szánták, önként lemond az utalványról. A zsűri úgy döntött, hogy a neki szánt 16000 forintos utalványt is szétosztják a másik három versenyző között úgy, hogy az ő jutalmaik közötti arány ne változzon.

b) Összesen hány forint értékű könyvutalványt akartak a szervezők szétosztani a versenyzők között, és ki mondott le a könyvutalványról? (6 pont)

c) Hány forint értékben kapott könyvutalványt a jutalmat kapott három versenyző külön-külön? (3 pont)

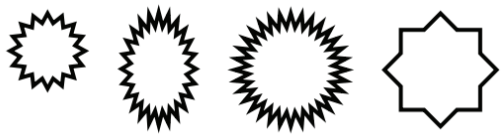
12) Ha az eredetileg $I_0\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$watt intenzitású lézersugár x mm $(x \geq 0)$ mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}}\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz. Ezt az anyagot $I_0 = 800\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15 %-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!)(6 pont)

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel? (8 pont)

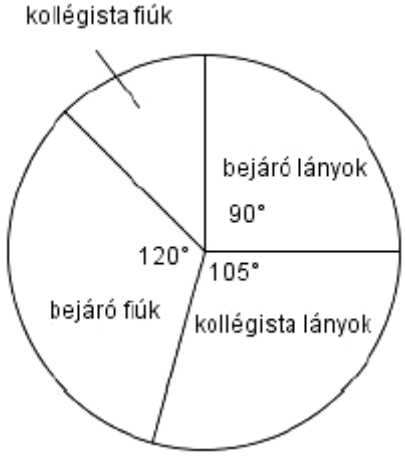


13) András 140 000 forintos fizetését megemelték 12 %-kal. Mennyi lett András fizetése az emelés után? (2 pont)

14) A testtömegindex kiszámítása során a vizsgált személy kilogrammban megadott tömegét osztják a méterben mért testmagasságának négyzetével. Számítsa ki Károly testtömegindexét, ha magassága 185 cm, tömege pedig 87 kg! (3 pont)

15) A munkavállaló nettó munkabérét a bruttó béréből számítják ki levonások és jóváírások alkalmazásával. Kovács úr bruttó bére 2010 áprilisában 200 000 forint volt. A 2010-ben érvényes szabályok alapján különböző járulékokra ennek a bruttó bérnek összesen 17%-át vonták le. Ezen felül a bruttó bérből személyi jövedelemadót is levontak, ez a bruttó bér 127%-ának a 17%-a volt. A levonások után megmaradó összeghez hozzáadtak 15 100 forintot adójóváírásként. Az így kapott érték volt Kovács úr nettó bére az adott hónapban.
   a) Számítsa ki, hogy Kovács úr bruttó bérének hány százaléka volt a nettó bére az adott hónapban!
   Szabó úr nettó bére 2010 áprilisában 173 015 forint volt. Szabó úr fizetésénél a levonásokat ugyanazzal az eljárással számították ki, mint Kovács úr esetében, de ebben a hónapban Szabó úr csak 5980 forint adójóváírást kapott. (5 pont)
   b) Hány forint volt Szabó úr bruttó bére az adott hónapban? (7 pont)

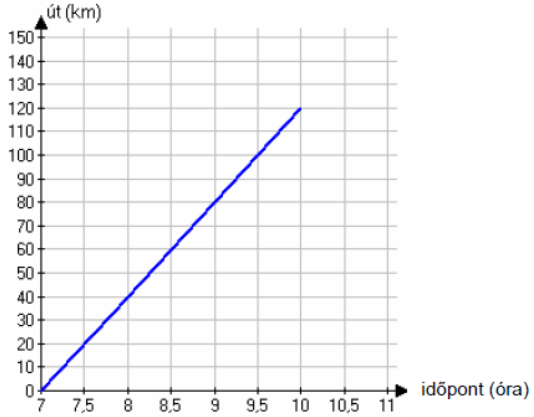
16) Egy középiskolának 480 tanulója van. A diákok egy része kollégiumban lakik, a többiek bejárók. A bejárók és a kollégisták nemek szerinti eloszlását mutatja a kördiagram. Adja meg a kollégista fiúk számát! Válaszát indokolja! (3 pont)



17) Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre.
   a) Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben? A mobiltársaság Telint néven új mobilinternet csomagot vezet be a piacra január elsején. Januárban 10 000 új előfizetőt várnak, majd ezután minden hónapban az előző havinál 7,5%-kal több új előfizetőre számítanak. Abban a hónapban, amikor az adott havi új előfizetők száma eléri a 20 000-et, a társaság változtatni szeretne a Telint csomag árán. (11 pont)
   b) Számítsa ki, hogy a tervek alapján melyik hónapban éri el a Telint csomag egyhavi új előfizetőinek a száma a 20 000-et! (6 pont)

18) Egy vállalat 250 000 Ft-ért vásárol egy számítógépet. A gép egy év alatt 10%-ot veszít az értékéből. Mennyi lesz a gép értéke 1 év elteltével? Írja le a számítás menetét! (3 pont)

19) Budapestről reggel 7 órakor egy tehervonat indul Debrecenbe, amely megállás nélkül egyenletes sebességgel halad. A koordinátarendszerben a tehervonat által megtett utat ábrázoltuk az idő függvényében.



a) Mekkora utat tett meg a tehervonat az első órában? (2 pont)
b) Számítsa ki, hogy hány óra alatt tesz meg a tehervonat 108 kilométert? (2 pont)

Budapestről reggel 7 óra 30 perckor egy gyorsvonat is indul ugyanazon az útvonalon Debrecenbe, amely megállás nélkül 70 km/h állandó nagyságú sebességgel halad.

c) Rajzolja be a fenti koordinátarendszerbe a gyorsvonat út-idő grafikonját a 7 óra 30 perc és 9 óra 30 perc közötti időszakban! (2 pont)
d) Számítsa ki, hogy mikor és mekkora út megtétele után éri utol a gyorsvonat a tehervonatot! (11 pont)

20) Egy 40 000 Ft-os télikabátot a tavaszi árleszállításkor 10%-kal olcsóbban lehet megvenni. Mennyi a télikabát leszállított ára? (2 pont)

21) Egy teherautóval több zöldségboltba almát szállítottak. Az egyik üzletbe 60 kg jonatánt, 135 kg starkingot, 150 kg idaredet és 195 kg golden almát vittek. A jonatán és az idared alma kilóját egyaránt 120 Ft-ért, a starking és a golden kilóját 85 Ft-ért árulta a zöldséges.

a) Hány százalékkal volt drágább a jonatán alma kilója a goldenéhez képest? (2 pont)
b) Mennyi bevételhez jutott a zöldséges, ha a teljes mennyiséget eladta? (2 pont)
c) A zöldségeshez kiszállított árukészlet alapján számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe került nála 1 kg alma! (3 pont)
d) Ábrázolja kördiagramon a zöldségeshez érkezett alma mennyiségének fajták szerinti megoszlását! (6 pont)

A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.

e) A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz? (4 pont)

22) Egy országban egy választáson a szavazókorú népesség 63,5%-a vett részt. A győztes pártra a résztvevők 43,6%-a szavazott.
Hány fős a szavazókorú népesség, ha a győztes pártra 4 152 900 fő szavazott? Válaszát indokolja! (3 pont)

23) Egy konzerv tömege a konzervdobozzal együtt 750 gramm. A konzervdoboz tömege a teljes tömeg 12%-a. Hány gramm a konzerv tartalma? (2 pont)

24) Egy termék árát az egyik hónapban 20%-kal, majd a következő hónapban újabb 20%-kal megemelték. A két áremelés együttesen hány százalékos áremelésnek felel meg? Válaszát indokolja! (3 pont)

25) Kóstolóval egybekötött termékbemutatót tartottak egy új kávékeverék piaci megjelenését megelőzően. Két csoport véleményét kérték úgy, hogy a terméket az 1-től 10-ig terjedő skálán mindenkinek egy-egy egész számmal kellett értékelnie. Mindkét csoport létszáma 20 fő volt. A csoportok értékelése az alábbi táblázatban látható.

pontszám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság az 1. csoportban	0	0	1	0	6	8	2	2	1	0
gyakoriság a 2. csoportban	0	8	0	2	0	1	0	0	0	9

a) Ábrázolja közös oszlopdiagramon, különböző jelölésű oszlopokkal a két csoport pontszámait! A diagramok alapján fogalmazzon meg véleményt arra vonatkozóan, hogy melyik csoportban volt nagyobb a pontszámok szórása! Véleményét a diagramok alapján indokolja is! (5 pont)

b) Hasonlítsa össze a két csoport pontszámainak szórását számítások segítségével is! (5 pont)

Kétféle kávéból 14 kg 4600 Ft/kg egységárú kávékeveréket állítanak elő. Az olcsóbb kávéfajta egységára 4500 Ft/kg, a drágábbé pedig 5000 Ft/kg.

c) Hány kilogramm szükséges az egyik, illetve a másik fajta kávéból? (7 pont)

26) András és Péter „számkártyázik” egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott lapot. (Például ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.



a) Hány kártya van Péter előtt az első mérkőzés után, ha András az 1, 2, 3, 4, 5, 6, Péter pedig a 2, 4, 5, 3, 1, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait? (2 pont)

A második mérkőzés során Péter az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait, és így összesen két lapot vitt el.

b) Adjon meg egy lehetséges sorrendet, amelyben András kijátszhatta lapjait! (3 pont)

A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőt küldi csatába).

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg! (6 pont)

A negyedik mérkőzés előtt mindketten úgy döntöttek, hogy az egész mérkőzés során véletlenszerűen játsszák majd ki a lapjaikat. Az első három csata után Andrásnál a 3, 4, 6 számkártyák maradtak, Péternél pedig az 1, 5, 6 számkártyák.

d) Adja meg annak a valószínűségét, hogy András az utolsó három csatából pontosan kettőt nyer meg! (6 pont)

27) A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál használják a következő tapasztalati képletet: $\acute{E} = 75{,}5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$.

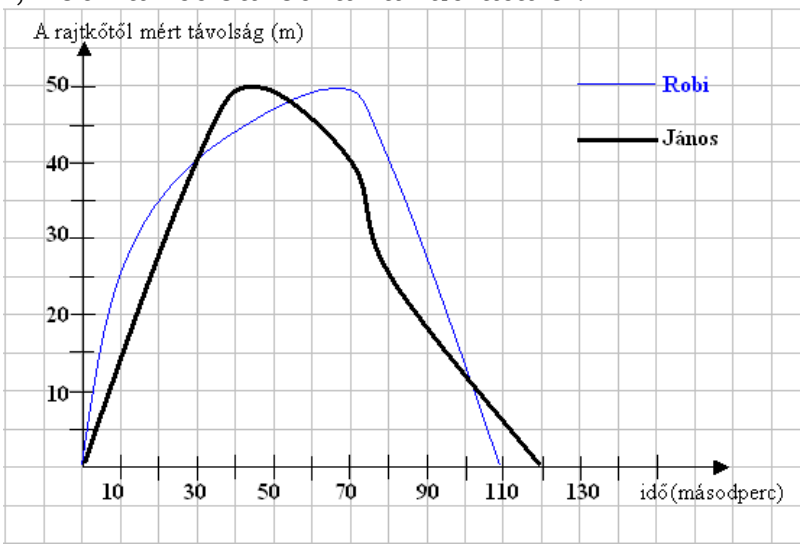
A képletben az $\acute{E}$ a születéskor várható átlagos élettartam években, G az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

a) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 dollár volt? (4 pont)

b) Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő? (5 pont)

c) Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év. Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (G) nagysága (reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra)? (8 pont)

28) Egy sportuszoda 50 méteres medencéjében egy edzés végén úszóversenyt rendeztek. A versenyt figyelve az edző a következő grafikont rajzolta két tanítványának, Robinak és Jánosnak az úszásáról.



Olvassa le a grafikonról, hogy

a) Mennyi volt a legnagyobb távolság a két fiú között a verseny során (1 pont)

b) Mikor előzte meg János Robit (2 pont)

c) Melyikük volt gyorsabb a 35. másodpercben! (2 pont)

A 4*100-as gyorsváltó házi versenyén a döntőbe a Delfinek, a Halak, a Vidrák és a Cápák csapata került.

d) Hányféle sorrend lehetséges közöttük, ha azt biztosan tudjuk, hogy nem a Delfinek csapata lesz a negyedik? (3 pont)

e) A verseny után kiderült, hogy az élen kettős holtverseny alakult ki, és a Delfinek valóban nem lettek az utolsók. Feltéve, hogy valakinek csak ezek az információk jutottak a tudomására, akkor ennek megfelelően hányféle eredménylistát állíthatott össze? (4 pont)

29) Egy szám $\frac{5}{6}$ részének a 20%-a 31. Melyik ez a szám? Válaszát indokolja!

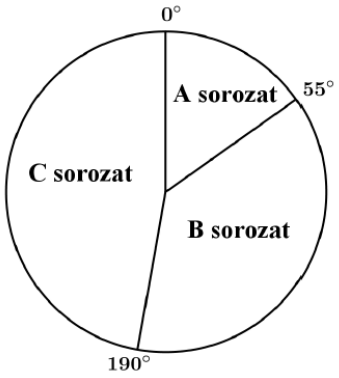
(3 pont)

30) Egy közvélemény-kutató intézet azt a feladatot kapta, hogy két alkalommal – fél év különbséggel – mérje fel a TV-ben látható három filmsorozat nézettségi adatait. Az ábrán látható kérdőíven a válaszoló vagy azt jelölhette be, hogy az A, B, és C sorozatok közül melyiket nézi (akár többet is meg lehetett jelölni), vagy azt, hogy egyiket sem nézi. Az első felméréskor kapott 600 kérdőív jelöléseit összesítve megállapították, hogy az A sorozat összesen 90 jelölést kapott, a B sorozat összesen 290-et, a C sorozat pedig összesen 230-at. Érdekes módon olyan válaszadó nem volt, aki pontosan két sorozatot nézett volna, viszont 55-en mindhárom sorozatot bejelölték.

a) A válaszolók hány százaléka nézte az A sorozatot? (2 pont)

b) Hány válaszoló nem nézte egyik sorozatot sem? (5 pont)

A második felmérés során kiválogatták azokat a kérdőíveket, amelyeken valamelyik sorozat meg volt jelölve. Ezeken a három sorozat nézettségére összesen 576 jelölés érkezett. Az adatok feldolgozói minden jelölést megszámoltak, és a végeredményről az itt látható kördiagramot készítették.



c) Számítsa ki, hogy az egyes sorozatok nézettségére hány jelölés érkezett! (5 pont)

31) Egy család személyautóval Budapestről Keszthelyre utazott. Útközben lakott területen belül, országúton és autópályán is haladtak. Az utazással és az autóval kapcsolatos adatokat a következő táblázat tartalmazza:

	megtett út hossza (km)	átlagsebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$	átlagos benzinfogyasztás 100 km-en (liter)
lakott területen belül	45	40	8,3
országúton	35	70	5,1
autópályán	105	120	5,9

a) Mennyi ideig tartott az utazás? (4 pont)

b) Hány liter ezen az utazáson az autó 100 km-re eső átlagfogyasztása? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Útközben elfogyott az autóból a benzin. A legközelebbi benzinkútnál kétféle benzines kannát lehet kapni. A nagyobbra rá van írva, hogy 20 literes, a kisebbre nincs ráírva semmi. A két kanna (matematikai értelemben) hasonló, a nagyobb kanna magassága éppen kétszerese a kisebb kanna magasságának.

c) Hány literes a kisebb kanna? (4 pont)

32) Zsuzsa nagyszülei elhatározzák, hogy amikor unokájuk 18 éves lesz, akkor vásárlási utalványt adnak neki ajándékba. Ezért Zsuzsa 18. születésnapja előtt 18 hónapon keresztül minden hónapban félretesznek valamekkora összeget úgy, hogy Zsuzsa 18. születésnapján éppen 90 000 forintjuk legyen erre a célra. Úgy tervezik, hogy az első alkalom után mindig 200 forinttal többet tesznek félre, mint az előző hónapban.

a) Terveik szerint mennyi pénzt tesznek félre az első, és mennyit az utolsó alkalommal? (7 pont)

Zsuzsa egyik testvére hét évvel idősebb a másik testvérénél. A két testvér életkorának mértani közepe 12.

b) Hány éves Zsuzsa két testvére? (5 pont)

33) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előre jelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? (5 pont)

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

34) Egy webáruházba való belépés előzetes regisztrációhoz kötött, melynek során a regisztráló életkorát is meg kell adnia. Az adatok alapján a 25560 regisztráló közül 28 évesnél fiatalabb 7810 fő, 55 évesnél idősebb 4615 fő, a többiek 28 és 55 év közöttiek.

a) Készítsen a létszámadatok alapján kördiagramot, kiszámítva a három körcikkhez tartozó középponti szögeket is! (5 pont)

A webáruház üzemeltetői a vásárlói szokásokat szeretnék elemezni, ezért a regisztráltak közül véletlenszerűen kiválasztanak két személyt.

b) Adja meg annak a valószínűségét, hogy az egyik kiválasztott személy 28 évesnél fiatalabb, a másik 55 évesnél idősebb! (4 pont)

A regisztráltak egy része vásárol is a webáruházban. A vásárlók között a 28 év alattiak éppen kétszer annyian vannak, mint az 55 évesnél idősebbek. A 28 év alattiak az elmúlt időszakban összesen 19 325 700 Ft, az 55 év felettiek 17 543 550 Ft értékben vásároltak. Az 55 év felettiek átlagosan 2410 Ft-tal költöttek többet, mint a 28 év alattiak.

c) Számítsa ki, hány 55 év feletti vásárlója volt a webáruháznak, és adja meg, hogy ezek a vásárlók átlagosan mennyit költöttek! (8 pont)

35) A ruházati cikkek nettó árát 27%-kal növeli meg az áfa (általános forgalmi adó). A nettó ár és az áfa összege a bruttó ár, amelyet a vásárló fizet a termék megvásárlásakor. Egy nadrágért 6350 Ft-ot fizetünk. Hány forint áfát tartalmaz a nadrág ára? Megoldását részletezze! (3 pont)

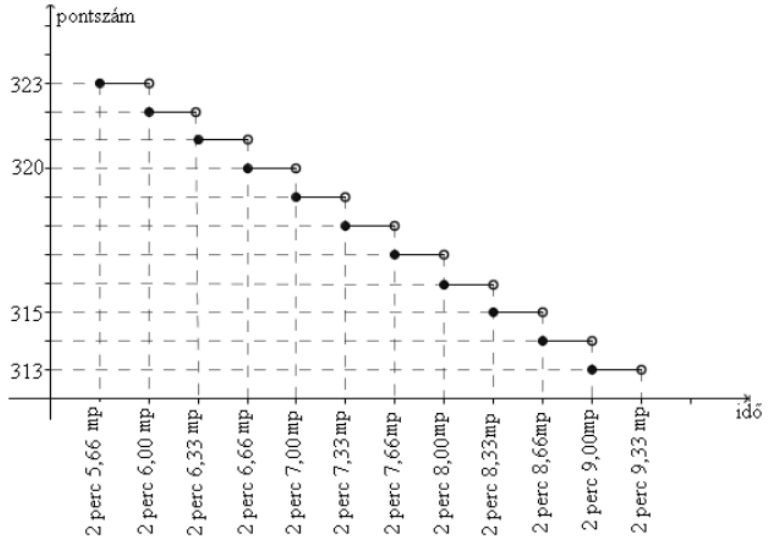
36) Az iskolai asztaliteniszbajnokságon heten indulnak. Mindenki mindenkivel egyszer játszik. Mostanáig Anita már mind a 6 mérkőzését lejátszotta, Zsuzsa 2, Gabi, Szilvi, Kati és Orsi pedig 1-1 mérkőzésen vannak túl. Hány mérkőzését játszotta le mostanáig a bajnokság hetedik résztvevője, Flóra?(2 pont)

37) Egy öttusaversenyen 31 résztvevő indult. A vívás az első szám, ahol mindenkivel egyszer mérkőzik meg. Aki 21 győzelmet arat, az 250 pontot kap. Aki ennél több győzelmet arat, az minden egyes további győzelemért 7 pontot kap a 250 ponton felül. Aki ennél kevesebbszer győz, attól annyiszor vonnak le 7 pontot a 250-ből, ahány győzelem hiányzik a 21-hez. (A mérkőzések nem végződhetnek döntetlenre.)

a) Hány pontot kapott a vívás során Péter, akinek 5 veresége volt? (3 pont)

b) Hány győzelme volt Bencének, aki 215 pontot szerzett? (3 pont)

Az öttusa úszás számában 200 métert kell úszni. Az elért időeredményeként járó pontszámot mutatja a grafikon.



c) Jelölje meg az alábbi két kérdés esetén a helyes választ!

Hány pontot kapott Robi, akinek az időeredménye 2 perc 6,28 másodperc? (2 pont)

A: 320
B: 321
C: 322
D: 323

Péter 317 pontot kapott. Az alábbiak közül válassza ki Péter időeredményét!

A: 2 perc 7,00 mp
B: 2 perc 7,60 mp
C: 2 perc 7,80 mp
D: 2 perc 8,00 mp

Az öttusa lovaglás számában egy akadálypályán tizenkét különböző akadályt kell a versenyzőnek átugrania. Egy akadály a nehézsége alapján három csoportba sorolható: A, B vagy C típusú. Ádám a verseny előtti bemelegítéskor először az öt darab A, majd a négy darab B, végül a három darab C típusú akadályokon ugrat át, mindegyiken pontosan egyszer. Bemelegítéskor az egyes akadálytípusokon belül a sorrend szabadon megválasztható.

d) Számítsa ki, hogy a bemelegítés során hányféle sorrendben ugrathatja át Ádám a tizenkét akadályt! (4 pont)

38) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0{,}854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)

(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

39) Ha 1 kg szalámi ára 2800 Ft, akkor hány forintba kerül 35 dkg szalámi? (2 pont)

40) A kereskedelemmel foglalkozó cégek között több olyan is van, amely állandóan emelkedő fizetéssel jutalmazza a dolgozók munkavégzését. Péter munkát keres, és két cég ajánlata közül választhat:

I. ajánlat: Az induló fizetés 200000 Ft, amit havonta 5000 Ft-tal emelnek négy éven át.

II. ajánlat: Az induló fizetés 200000 Ft, amit havonta 2%-kal emelnek négy éven át.

a) Melyik ajánlatot válassza Péter, ha tervei szerint négy évig a választott munkahelyen akar dolgozni, és azt az ajánlatot szeretné választani, amelyik a négy év alatt nagyobb összjövedelmet kínál? (7 pont)

A Péter szerződésében szereplő napi 8 óra munkaidő rugalmas, azaz lehetnek olyan napok, amikor 8 óránál többet, és olyanok is, amikor kevesebbet dolgozik. 6 óránál kevesebbet, illetve 10 óránál többet sosem dolgozik egy nap. Az alábbi táblázatban Péter januári munkaidő-kimutatásának néhány adata látható.

Napi munkaidő (óra)	6	7	8	9	10
Hány munkanapon dolgozott ennyi órát?	4	5			3

b) Számítsa ki a táblázatból hiányzó két adatot, ha tudjuk, hogy január hónap 22 munkanapján Péter átlagosan naponta 8 órát dolgozott! (6 pont)

41) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)

1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg: $f(x) = 51 \cdot 1{,}667^x$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózatból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

42) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.

a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására? (7 pont)

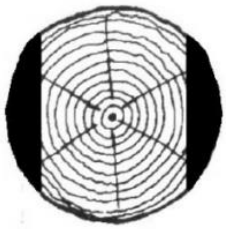
A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4 \cdot H - R + F$ képlettel történik, ahol H a helyes válaszok, R a rossz feladatok, F pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.

b) Hány helyes választ adott Vera? (5 pont)

Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.

c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem? (5 pont)

43) A Hód Kft. Faárutelephelyén rönkfából (henger alakú fatörzsekből) a következő módon készítenek gerendát. A keresztfűrészgép először két oldalt levág egy-egy – az ábra sötéttel jelölt – részt, majd a fa 90°-kal történő elfordítása után egy hasonló vágással végül egy négyzetes hasáb alakú gerendát készít. A gépet úgy állítják be, hogy a kapott hasáb alaplapja a lehető legnagyobb legyen. Most egy forgáshenger alakú, 60 cm átmérőjű, 5 méter hosszú rönkfát fűrészel így a gép.



a) Igaz-e, hogy a kapott négyzetes hasáb alakú fagerenda térfogata kisebb 1 köbméternél? (6 pont)

A Hód Kft. Deszkaárut is gyárt, ehhez a faanyagot 30000 $\mathrm{Ft/m^3}$-es beszerzési áron vásárolja meg a termelőtől. A gyártás közben a megvásárolt fa kb. 40%-ából hulladékfa lesz. A késztermék 1 köbméterét 90000 forintért adja el a cég, de az eladási ár 35%-át a költségekre kell fordítania (feldolgozás, telephely fenntartása stb.).

b) Mennyi haszna keletkezik a Hód Kft.-nek 1 köbméter deszkaáru eladásakor? (5 pont)

A fakitermelő cég telephelyéről hat teherautó indul el egymás után. Négy teherautó fenyőfát, kettő pedig tölgyfát szállít.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a két, tölgyfát szállító teherautó közvetlenül egymás után gördül ki a telephelyről, ha az autók indulási sorrendje véletlenszerű! (6 pont)

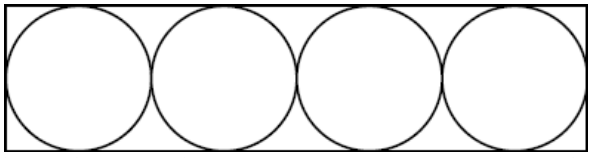
Térgeometria

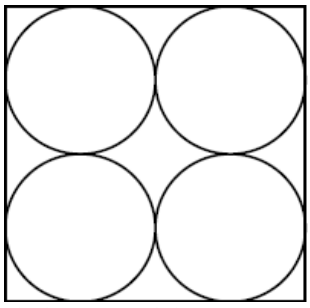
1) Egy gömb alakú labda belső sugara 13 cm. Hány liter levegő van benne? Válaszát indokolja! (3 pont)

2) Egy forgáskúp alapkörének átmérője egyenlő a kúp alkotójával. A kúp magasságának hossza $5\sqrt{3}$ cm. Készítsen vázlatot!
   a) Mekkora a kúp felszíne? (9 pont)
   b) Mekkora a kúp térfogata? (2 pont)
   c) Mekkora a kúp kiterített palástjának középponti szöge? (6 pont)

3) Egy vállalkozás reklám-ajándéka szabályos hatszög alapú egyenes gúla, amit fából készítenek el. A gúla alapélei 4,2 cm hosszúak, magassága 25 mm.
   a) Hány cm^3 faanyag van egy elkészült gúlában? (4 pont)
   b) A gúla oldallapjait színesre festik. Hány cm^2 felületet festenek be egy gúla oldallapjainak a színezésekor? (8 pont)
   c) A gúla oldallapjait hat különböző színnel festik be úgy, hogy 1-1 laphoz egy színt használnak. Hányféle lehet ez a színezés? (Két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha forgatással nem vihetők át egymásba.)(3 pont)
   d) A cég bejáratánál az előbbi tárgy tízszeresére nagyított változatát helyezték el. Hányszor annyi fát tartalmaz ez, mint egy ajándéktárgy? (2 pont)

4) 4 cm átmérőjű fagolyókat négyesével kis (téglatest alakú) dobozokba csomagolunk úgy, hogy azok ne lötyögjenek a dobozokban. A két szóba jövő elrendezést felülnézetből lerajzoltuk:





A dobozokat átlátszó műanyag fóliával fedjük le, a doboz többi része kartonpapírból készül. A ragasztáshoz, hegesztéshez hozzászámoltuk a doboz méreteiből adódó anyagszükséglet 10%-át.
   a) Mennyi az anyagszükséglet egy-egy dobozfajtánál a két felhasznált anyagból külön-külön? (8 pont)
   b) A négyzet alapú dobozban a fagolyók közötti teret állagmegóvási célból tömítő anyaggal töltik ki. A doboz térfogatának hány százalékát teszi ki a tömítő anyag térfogata? (4 pont)

5) Egy téglatest alakú akvárium belső méretei (egy csúcsból kiinduló éleinek hossza): 42 cm, 25 cm és 3 dm. Megtelik-e az akvárium, ha beletöltünk 20 liter vizet? Válaszát indokolja! (3 pont)

6) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle 8 cm hosszú, palástjának területe (az oldallapok területösszege) hatszorosa az egyik alaplap területének. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata? (12 pont)

7) Egy négyzetes oszlop egy csúcsból kiinduló három élének hossza: a, a és b. Fejezze ki ezekkel az adatokkal az ebből a csúcsból kiinduló testátló hosszát! (3 pont)

8) Egy gyertyagyárban sokféle színű, formájú, és méretű gyertyát készítenek. A folyékony, felhevített viaszt különféle formákba öntik. Az öntőhelyek egyikén négyzet alapú egyenes gúlát öntenek, melynek alapéle 5 cm, oldaléle 8 cm hosszú.
   a) Számítsa ki ennek a gúla alakú gyertyának a térfogatát! (Az eredményt cm^3-ben, egészre kerekítve adja meg!) (4 pont)

   Ezen az öntőhelyen az egyik műszakban 130 darab ilyen gyertyát gyártanak.
   b) Hány liter viaszra van szükség, ha tudjuk, hogy a felhasznált anyag 6 %-a veszteség? (Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

   A gúla alakú gyertyákat egyenként díszdobozba csomagolják.
   c) Hány cm^2 papír szükséges 40 darab díszdoboz elkészítéséhez, ha egy doboz papírszükséglete a gúla felszínének 136%-a? (4 pont)

9) Egy facölöp egyik végét csonka kúp alakúra, másik végét forgáskúp alakúra formálták. (Így egy forgástestet kaptunk.) A középső, forgáshenger alakú rész hossza 60 cm és átmérője 12 cm. A csonka kúp alakú rész magassága 4 cm, a csonka kúp fedőlapja pedig 8 cm átmérőjű. Az elkészült cölöp teljes hossza 80 cm.
   a) Hány m^3 fára volt szükség 5000 darab cölöp gyártásához, ha a gyártáskor a felhasznált alapanyag 18%-a a hulladék?
   (Válaszát egész m^3-re kerekítve adja meg!) (8 pont)

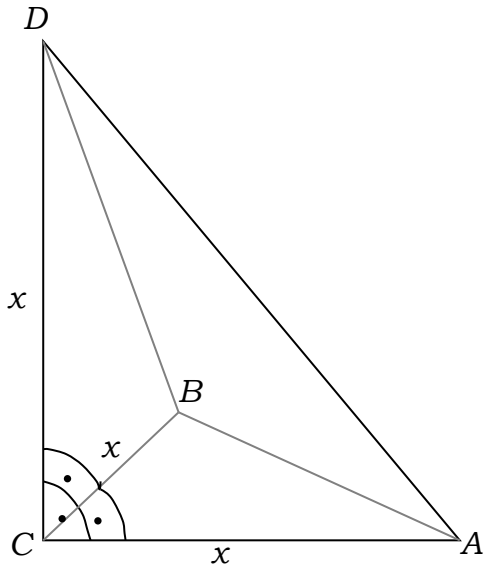
   Az elkészült cölöpök felületét vékony lakkréteggel vonják be.
   b) Hány m^2 felületet kell belakkozni, ha 5000 cölöpöt gyártottak?
   (Válaszát egész m^2-re kerekítve adja meg!) (9 pont)

10) Egy fa építőjáték-készlet négyféle, különböző méretű téglatestfajtából áll. A készletben a különböző méretű elemek mindegyikéből 10 db van. Az egyik téglatest, nevezzük alapelemnek, egy csúcsából induló éleinek hossza: 8 cm, 4 cm, 2 cm. A többi elem méreteit úgy kapjuk, hogy az alapelem valamelyik 4 párhuzamos élének a hosszát megduplázzuk, a többi él hosszát pedig változatlanul hagyjuk.
   a) Mekkora az egyes elemek felszíne? (4 pont)
   b) Rajzolja le az alapelem kiterített hálózatának 1:2 arányú kicsinyített képét! (4 pont)
   c) Elférhet-e a játékkészlet egy olyan kocka alakú dobozban, amelynek belső éle 16 cm? (4 pont)
   d) A teljes készletből öt elemet kiveszünk. (A kiválasztás során minden elemet azonos valószínűséggel választunk.) Mekkora valószínűséggel lesz mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop? (A valószínűség értékét három tizedesjegy pontossággal adja meg!) (5 pont)

11) Egy gömb alakú gáztároló térfogata 5000 m^3. Hány méter a gömb sugara? A választ egy tizedesre kerekítve adja meg! Írja le a számítás menetét! (4 pont)

12) Belefér-e egy 1600 cm^2 felszínű (gömb alakú) vasgolyó egy 20 cm élű kocka alakú dobozba? Válaszát indokolja! (3 pont)

13) Az iskolatejet gúla alakú, impregnált papírból készült dobozba csomagolják. (Lásd az alábbi ábrát, ahol $CA = CB = CD$.
A dobozba 2,88 dl tej fér.



a) Számítsa ki a gúla éleinek hosszát! Válaszát egész cm-ben adja meg! (8 pont)

b) Mekkora a papírdoboz felszíne? Válaszát cm^2-ben, egészre kerekítve adja meg! (4 pont)

14) Hányszorosára nő egy kocka térfogata, ha minden élét háromszorosára növeljük? (2 pont)

15) Egy 12 cm oldalhosszúságú négyzetet megforgatunk az egyik oldalával párhuzamos szimmetriatengelye körül.

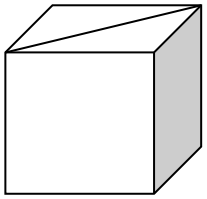
a) Mekkora az így keletkező forgástest térfogata és felszíne? (6 pont)
A felszínt egész cm^2-re, a térfogatot egész cm^3-re kerekítve adja meg!

Ugyanezt a négyzetet forgassuk meg az egyik átlóját tartalmazó forgástengely körül!

b) Mekkora az így keletkező forgástest térfogata és felszíne? (9 pont)
A felszínt egész cm^2-re, a térfogatot egész cm^3-re kerekítve adja meg!

c) A forgástestek közül az utóbbinak a felszíne hány százaléka az első forgatással kapott forgástest felszínének? (2 pont)

16) Az ábrán látható kockának berajzoltuk az egyik lapátlóját. Rajzoljon ebbe az ábrába egy olyan másik lapátlót, amelynek van közös végpontja a berajzolt lapátlóval!
Hány fokos szöget zár be ez a két lapátló?
Válaszát indokolja! (3 pont)



17) Egy csonkakúp alakú tejfölös doboz méretei a következők: az alaplap átmérője 6 cm, a fedőlap átmérője 11 cm és az alkotója 8,5 cm.

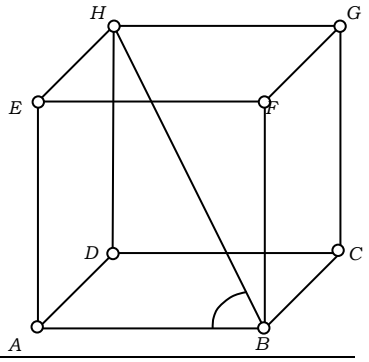
a) Hány cm^3 tejföl kerül a dobozba, ha a gyárban a kisebbik körlapján álló dobozt magasságának 86%-áig töltik meg?
Válaszát tíz cm^3-re kerekítve adja meg! (11 pont)

b) A gyártás során a dobozok 3%-a megsérül, selejtes lesz. Az ellenőr a gyártott dobozok közül visszatevéssel 10 dobozt kiválaszt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 doboz között lesz legalább egy selejtes?
Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

18)

a) Számítsa ki annak a szabályos négyoldalú gúlának a térfogatát, melynek minden éle 10 cm hosszú! (6 pont)

Térgeometriai feladatok megoldásában segíthet egy olyan készlet, melynek elemeiből (kilyuggatott kisméretű gömbökből és különböző hosszúságú műanyag pálcikákból) matematikai és kémiai modellek építhetők. Az ábrán egy kocka modellje látható.



b) Számítsa ki az *ABH* szög nagyságát! (A test csúcsait tekintse pontoknak, az éleket pedig szakaszoknak!) (4 pont)

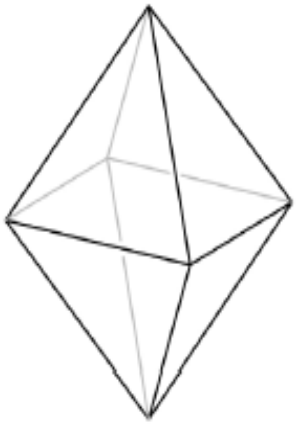
Anna egy molekulát modellezett a készlet segítségével, ehhez 7 gömböt és néhány pálcikát használt fel. Minden pálcika két gömböt kötött össze, és bármely két gömböt legfeljebb egy pálcika kötött össze. A modell elkészítése után feljegyezte, hogy hány pálcikát szúrt bele az egyes gömbökbe. A feljegyzett adatok: 6, 5, 3, 2, 2, 1, 1.

c) Mutassa meg, hogy Anna hibát követett el az adatok felírásában! (4 pont)

Anna is rájött, hogy hibázott. A helyes adatok: 6, 5, 3, 3, 2, 2, 1.

d) Hány pálcikát használt fel Anna a modell elkészítéséhez? (3 pont)

19) Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm-esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.



a) Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm^2-ben) és a térfogatát (cm^3-ben)! Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A test lapjait 1-től 8-ig megszámozzuk, így egy „dobó-oktaédert" kapunk, amely minden oldallapjára egyforma valószínűséggel esik. Egy ilyen test esetében is van egy felső lap, az ezen lévő számot tekintjük a dobás kimenetelének. (Az ábrán látható „dobó-oktaéderrel" 8-ast dobtunk.)



b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezzel a „dobó-oktaéderrel" egymás után négyszer dobva, legalább három esetben 5-nél nagyobb számot dobunk! (8 pont)

20) Egy szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúla alapéle 12 cm, oldallapjai 60°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Számítsa ki a gúla felszínét (cm^2-ben) és térfogatát (cm^3-ben)! Válaszait egészre kerekítve adja meg! (7 pont)

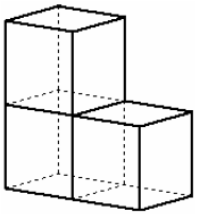
A gúlát két részre osztjuk egy az alaplappal párhuzamos síkkal, amely a gúla magasságát a csúcstól távolabbi harmadoló pontban metszi.

b) Mekkora a keletkező gúla és csonkagúla térfogatának aránya? Válaszát egész számok hányadosaként adja meg! (5 pont)

c) Számítsa ki a keletkező csonkagúla felszínét cm^2-ben! (5 pont)

21) Egy henger alakú bögre belsejének magassága 12 cm, belső alapkörének átmérője 8 cm. Belefér-e egyszerre $\frac{1}{2}$ liter kakaó? Válaszát indokolja! (4 pont)

22) Három tömör játékkockát az ábrának megfelelően rakunk össze. Mindegyik kocka éle 3 cm.



Mekkora a keletkező test

a) felszíne, (3 pont)

b) térfogata? (1 pont)

Számítását írja le!

23) Egy téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hossza 15 cm, 12 cm és 8 cm. Számítsa ki a téglatest felszínét! Írja le a számítás menetét! (3 pont)

24) Egy henger alakú fazék belsejének magassága 14 cm, belső alapkörének átmérője 20 cm. Meg lehet-e főzni benne egyszerre 5 liter levest? Válaszát indokolja! Belefér 5 liter leves? (4 pont)

25) A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer $\left(2\cdot10^{-6}\text{m}\right)$, átmérője 0,5 mikrométer $\left(5\cdot10^{-7}\text{m}\right)$.

a) Számítsa ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításainak eredményét m^3-ben, illetve m^2-ben, normálalakban adja meg! (5 pont)

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.

b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? (4 pont)

A baktériumok számát a tápoldatban t perc elteltével a $B(t)=3000000\cdot2^{\frac{t}{15}}$ összefüggés adja meg.

c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

26) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben $1{,}5\ \text{m}^2$-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a $27\ \text{m}^2$-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

27) Egy család személyautóval Budapestről Keszthelyre utazott. Útközben lakott területen belül, országúton és autópályán is haladtak. Az utazással és az autóval kapcsolatos adatokat a következő táblázat tartalmazza:

	megtett út hossza (km)	átlagsebesség $\left(\frac{\text{km}}{\text{óra}}\right)$	átlagos benzinfogyasztás 100 km-en (liter)
lakott területen belül	45	40	8,3
országúton	35	70	5,1
autópályán	105	120	5,9

a) Mennyi ideig tartott az utazás? (4 pont)

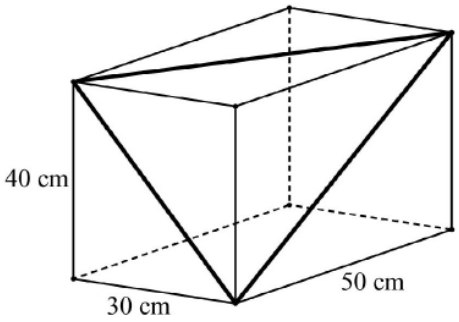
b) Hány liter ezen az utazáson az autó 100 km-re eső átlagfogyasztása? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Útközben elfogyott az autóból a benzin. A legközelebbi benzinkútnál kétféle benzines kannát lehet kapni. A nagyobbra rá van írva, hogy 20 literes, a kisebbre nincs ráírva semmi. A két kanna (matematikai értelemben) hasonló, a nagyobb kanna magassága éppen kétszerese a kisebb kanna magasságának.

c) Hány literes a kisebb kanna? (4 pont)

28) Egy téglatest alakú akvárium egy csúcsból kiinduló élei 30 cm, 40 cm, illetve 50 cm hosszúak.

a) Hány literes ez az akvárium? (A számolás során tekintsen el az oldallapok vastagságától!) (3 pont)



Tekintsük azt a háromszöget, amelynek oldalait az ábrán látható téglatest három különböző hosszúságú lapátlója alkotja.

b) Mekkora ennek a háromszögnek a legkisebb szöge? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

29) A biliárdjáték megkezdésekor az asztalon 15 darab azonos méretű, színezésű biliárdgolyót helyezünk el háromszög alakban úgy, hogy az első sorban 5 golyó legyen, a másodikban 4, a következőkben pedig 3, 2, illetve 1 golyó. (A golyók elhelyezésére vonatkozó egyéb szabályoktól tekintsünk el.)

a) Hányféleképpen lehet kiválasztani a 15-ből azt az 5 golyót, amelyet majd az első sorban helyezünk el? (Az 5 golyó sorrendjét nem vesszük figyelembe.) (3 pont)

b) Hányféle különböző módon lehet az első két sort kirakni, ha a 9 golyó sorrendjét is figyelembe vesszük? (3 pont)

Egy biliárdasztal játékterülete téglalap alakú, mérete 194 cm × 97 cm. A játékterület középpontja felett 85 cm-rel egy olyan (pontszerűnek tekinthető) lámpa van, amely fénykúpjának a nyílásszöge 100°.

c) Számítással állapítsa meg, hogy a lámpa megvilágítja-e a játékterület minden pontját! (11 pont)

30) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus négyszög.

b) A kocka testátlója 45°-os szöget zár be az alaplappal.

c) A szabályos tizenhétszögben az egyik csúcsból kiinduló összes átló a tizenhétszöget 15 háromszögre bontja. (2 pont)

31) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előre jelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a? (5 pont)

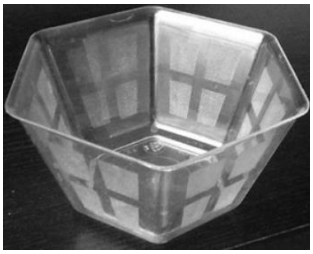
Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

32) Egy műanyag terméket gyártó üzemben szabályos hatoldalú csonkagúla alakú, felül nyitott virágtartó dobozokat készítenek egy kertészet számára (lásd az ábrát). A csonkagúla alaplapja 13 cm oldalú szabályos hatszög, fedőlapja 7 cm oldalú szabályos hatszög, az oldalélei 8 cm hosszúak.



a) Egy műanyagöntő gép 1 kg alapanyagból (a virágtartó doboz falának megfelelő anyagvastagság mellett) $0{,}93\ \text{m}^2$ felületet képes készíteni. Számítsa ki, hány virágtartó doboz készíthető 1 kg alapanyagból! (11 pont)

A kertészetben a sok virághagymának csak egy része hajt ki: 0,91 annak a valószínűsége, hogy egy elültetett virághagyma kihajt.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy 10 darab elültetett virághagyma közül legalább 8 kihajt! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

33) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle 6 cm, oldaléle 5 cm hosszúságú. Egy szaküzletben 11 cmoldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy 11 cm oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

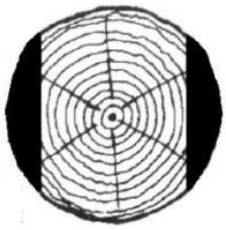
Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot” használ. Mindegyik fajta „varázskanóc” fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

34) Egy forgáskúp alapkörének sugara 5 cm, magassága 9 cm hosszú. Számítsa ki a kúp térfogatát! (2 pont)

35) A Bocitej Kft. 1 literes tejesdobozának alakja négyzet alapú egyenes hasáb. A dobozt színültig töltik tejjel. Hány cm magas a doboz, ha az alapnégyzet oldala 7 cm? Megoldását részletezze! (3 pont)

36) A Hód Kft. Faárutelephelyén rönkfából (henger alakú fatörzsekből) a következő módon készítenek gerendát. A keresztfűrészgép először két oldalt levág egy-egy – az ábra sötéttel jelölt – részt, majd a fa 90°-kal történő elfordítása után egy hasonló vágással végül egy négyzetes hasáb alakú gerendát készít. A gépet úgy állítják be, hogy a kapott hasáb alaplapja a lehető legnagyobb legyen. Most egy forgáshenger alakú, 60 cm átmérőjű, 5 méter hosszú rönkfát fűrészel így a gép.



a) Igaz-e, hogy a kapott négyzetes hasáb alakú fagerenda térfogata kisebb 1 köbméternél? (6 pont)

A Hód Kft. Deszkaárut is gyárt, ehhez a faanyagot 30000 $\mathrm{Ft/m^3}$-es beszerzési áron vásárolja meg a termelőtől. A gyártás közben a megvásárolt fa kb. 40%-ából hulladékfa lesz. A késztermék 1 köbméterét 90000 forintért adja el a cég, de az eladási ár 35%-át a költségekre kell fordítania (feldolgozás, telephely fenntartása stb.).

b) Mennyi haszna keletkezik a Hód Kft.-nek 1 köbméter deszkaáru eladásakor? (5 pont)

A fakitermelő cég telephelyéről hat teherautó indul el egymás után. Négy teherautó fenyőfát, kettő pedig tölgyfát szállít.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a két, tölgyfát szállító teherautó közvetlenül egymás után gördül ki a telephelyről, ha az autók indulási sorrendje véletlenszerű! (6 pont)

Trigonometria

1) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!
$\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$ (12 pont)

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!
a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2$, ahol x valós szám és $x > -1$ (6 pont)
b) $2\cos^2 x = 4 - 5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl (11 pont)

3) Oldja meg a következő egyenleteket:
a) $9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0$ (6 pont)
b) $\sin^2 x = 2\sin x + 3$ (6 pont)

4) Mely valós számokra teljesül a $[0;2\pi]$ intervallumon a $\sin x = \frac{1}{2}$ egyenlőség? (2 pont)

5) Adja meg az összes olyan forgásszöget fokokban mérve, amelyre a $k(x) = \frac{5}{\cos x}$ kifejezés nem értelmezhető! Indokolja a válaszát! (3 pont)

6) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!
a) $(\log_2 x - 3)\cdot(\log_2 x^2 + 6) = 0$ (7 pont)
b) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ (10 pont)

7) Döntse el az alábbi két állítás mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis! (2 pont)
a) Az $x \mapsto \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény periódusa 2π.
b) Az $x \mapsto \sin(2x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény periódusa 2π.

8) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sin x = 0$ egyenletet, ha $-2\pi \le x \le 2\pi$ (3 pont)

9) Döntse el az alábbi négy állításról, hogy melyik igaz, illetve hamis!
A: Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik hegyesszög szinusza $\frac{1}{2}$ (1 pont)
B: Ha egy háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{1}{2}$, akkor a háromszög derékszögű. (1 pont)
C: A derékszögű háromszögnek van olyan szöge, amelynek nincs tangense. (1 pont)
D: A derékszögű háromszögek bármelyik szögének értelmezzük a koszinuszát. (1 pont)

10) Melyik szám nagyobb?
$A = \lg\frac{1}{10}$ vagy $B = \cos 8\pi$ (2 pont)

11) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!
a) $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$ (6 pont)
b) $\sin^2 x = 1 + 2\cos x$ (6 pont)

12) Határozza meg a radiánban megadott $\alpha = \frac{\pi}{4}$ szög nagyságát fokban! (2 pont)

13)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi;\pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

14) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség!

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$ (2 pont)

15) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség! (2 pont)

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

16) Oldja meg a $[-\pi;\pi]$ zárt intervallumon a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletet! (2 pont)

17)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \ (x \in \mathbb{R}).$$ (6 pont)

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

III) A $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

18) Adja meg a következő egyenlet $[0;2\pi]$ intervallumba eső megoldásának pontos értékét! (2 pont)

$$\sin x = -1$$

19) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1 + \cos x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

20) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 1 + \sin x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

21) Oldja meg a $\sin x = 1$ egyenletet a valós számok halmazán! (2 pont)

22) Mely x-ekhez rendel a $[0;2\pi]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto \cos x$ függvény $\frac{1}{2}$-et? (2 pont)

23) Oldja meg az alábbi egyenletet a $[0;2\pi]$ intervallumon! (2 pont)

$$\cos x = 0,5$$

Valószínűségszámítás

1) Egy rendezvényen 150 tombolajegyet adtak el. Ági 21-et vásárolt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Ági nyer, ha egy nyereményt sorsolnak ki? (A jegyek nyerési esélye egyenlő.) (2 pont)

2) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.
Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.
   a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)

Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

   b) A feladat szövege alapján töltse ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)
   c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)
   d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

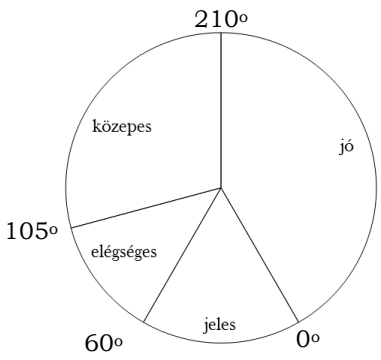
3) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai szakosztály közül legalább az egyikben. Az atlétika szakosztályban 36 tanuló sportol rendszeresen, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda szakosztály munkájában is részt vesz.
   a) Készítsen halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak feltüntetésével! (4 pont)
   b) Hányan sportolnak a kosárlabda szakosztályban? (4 pont)
   c) Egy másik iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is? (4 pont)

4) Egy öttagú társaság egymás után lép be egy ajtón. Mekkora a valószínűsége, hogy Anna, a társaság egyik tagja, elsőnek lép be az ajtón? (2 pont)

5) Egy szellemi vetélkedő döntőjébe 20 versenyzőt hívnak be. A zsűri az első három helyezettet és két további különdíjast fog rangsorolni. A rangsorolt versenyzők oklevelet és jutalmat kapnak.
   a) Az öt rangsorolt versenyző mindegyike ugyanarra a színházi előadásra kap egy-egy jutalomjegyet. Hányféle kimenetele lehet ekkor a versenyen a jutalmazásnak? (4 pont)
   b) A dobogósok három különböző értékű könyvutalványt, a különdíjasok egyike egy színházjegyet, a másik egy hangversenyjegyet kap. Hányféle módon alakulhat ekkor a jutalmazás? (4 pont)
   c) Ha már eldőlt, kik a rangsorolt versenyzők, hányféle módon oszthatnak ki nekik jutalmul öt különböző verseskötetet? (3 pont)
   d) Kis Anna a döntő egyik résztvevője. Ha feltesszük, hogy a résztvevők egyenlő eséllyel versenyeznek, mekkora a valószínűsége, hogy Kis Anna eléri a három, dobogós hely egyikét, illetve, hogy az öt rangsorolt személy egyike lesz? (6 pont)

6) Egy televíziós játékban 5 kérdést tehet fel a játékvezető. A játék során a versenyző, ha az első kérdésre jól válaszol, 40 000 forintot nyer. Minden további kérdés esetén döntenie kell, hogy a játékban addig megszerzett pénzének 50, 75 vagy 100 százalékát teszi-e fel. Ha jól válaszol, feltett pénzének kétszeresét kapja vissza, ha hibázik, abba kell hagynia a játékot, és a fel nem tett pénzét viheti haza.
   a) Mennyi pénzt visz haza az a játékos, aki mind az öt feltett kérdésre jól válaszol, s bátran kockáztatva mindig a legnagyobb tétet teszi meg?(4 pont)
   b) Az a játékos, aki mindig helyesen válaszol, de óvatos, és a négy utolsó fordulóban pénzének csak 50%-át teszi fel, hány forintot visz haza?(4 pont)
   c) A vetélkedő során az egyik versenyző az első négy kérdésre jól válaszolt. A második kérdésnél a pénzének 100 %-át, a 3., 4. és 5. kérdés esetén pénzének 75 %-át tette fel. Az 5. kérdésre sajnos rosszul válaszolt. Hány forintot vihetett haza ez a játékos? (5 pont)
   d) Egy versenyző mind az 5 fordulóban jól válaszol, és közben minden fordulóban azonos eséllyel teszi meg a játékban megengedett lehetőségek valamelyikét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elnyerhető maximális pénzt viheti haza? (4 pont)

7) A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.
   a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották? (3 pont)
   b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:
   Adja meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket! Válaszát foglalja táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltesse oszlopdiagramon is! (6 pont)



   c) Az összes megírt dolgozatból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy jeles vagy jó dolgozatot veszünk a kezünkbe? (3 pont)

8) Egy kétforintos érmét kétszer egymás után feldobunk, és feljegyezzük az eredményt. Háromféle esemény következhet be:
   A esemény: két fejet dobunk.
   B esemény: az egyik dobás fej, a másik írás.
   C esemény: két írást dobunk.
   Mekkora a *B* esemény bekövetkezésének valószínűsége? (2 pont)

9) A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

10) Egy dobozban húsz golyó van, aminek 45 százaléka kék, a többi piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha találomra egy golyót kihúzunk, akkor az piros lesz? (3 pont)

11) Egy tanulmányi verseny döntőjében 8 tanuló vett részt. Három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladat maximálisan elérhető pontszáma 40, a másodiké 50, a harmadiké 60. A nyolc versenyző feladatonkénti eredményeit tartalmazza az alábbi táblázat:

Versenyző sorszáma	I.	II.	III.	Összpontszám	Százalékos teljesítmény
1.	28	16	40		
2.	31	35	44		
3.	32	28	56		
4.	40	42	49		
5.	35	48	52		
6.	12	30	28		
7.	29	32	45		
8.	40	48	41		

a) Töltse ki a táblázat hiányzó adatait! A százalékos teljesítményt egészre kerekítve adja meg!
Melyik sorszámú versenyző nyerte meg a versenyt, ki lett a második, és ki a harmadik helyezett? (5 pont)

b) A nyolc versenyző dolgozata közül véletlenszerűen kiveszünk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 75 %-osnál jobb teljesítményű dolgozat került a kezünkbe? (2 pont)

c) Egy tanuló betegség miatt nem tudott megjelenni a döntőn. Másnap megkapta, és megoldotta a feladatokat. Eredményét később összehasonlította a nyolc döntős versenyző eredményével. Észrevette, hogy az első feladatot a versenyzők I. feladatra kapott pontszámainak a mediánjára teljesítette (egészre kerekítve), a második feladatot pedig a nyolc versenyző II. feladata pontszámainak a számtani közepére (szintén egészre kerekítve). A III. feladatot 90 %-ra teljesítette.
Mennyi lett ennek a tanulónak az összpontszáma? Ezzel hányadik helyen végzett volna? (5 pont)

12) Egy gimnáziumban 50 diák tanulja emelt szinten a biológiát. Közülük 30-an tizenegyedikesek és 20-an tizenkettedikesek. Egy felmérés alkalmával a tanulóktól azt kérdezték, hogy hetente átlagosan hány órát töltenek a biológia házi feladatok megoldásával. A táblázat a válaszok összesített eloszlását mutatja.

A biológia házi feladatok megoldásával hetente eltöltött órák száma*	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
Tanulók száma	3	11	17	15	4

* A tartományokhoz az alsó határ hozzátartozik, a felső nem.

a) Ábrázolja oszlopdiagramon a táblázat adatait! (3 pont)

b) Átlagosan hány órát tölt a biológia házi feladatok megoldásával hetente ez az 50 tanuló? Az egyes időintervallumok esetében a középértékekkel (1, 3, 5, 7 és 9 órával) számoljon! (3 pont)

Egy újságíró két tanulóval szeretne interjút készíteni. Ezért a biológiát emelt szinten tanuló 50 diák névsorából véletlenszerűen kiválaszt két nevet.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik kiválasztott tanuló tizenegyedikes, a másik pedig tizenkettedikes? (6 pont)

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét kiválasztott tanuló legalább 4 órát foglalkozik a biológia házi feladatok elkészítésével hetente? (5 pont)

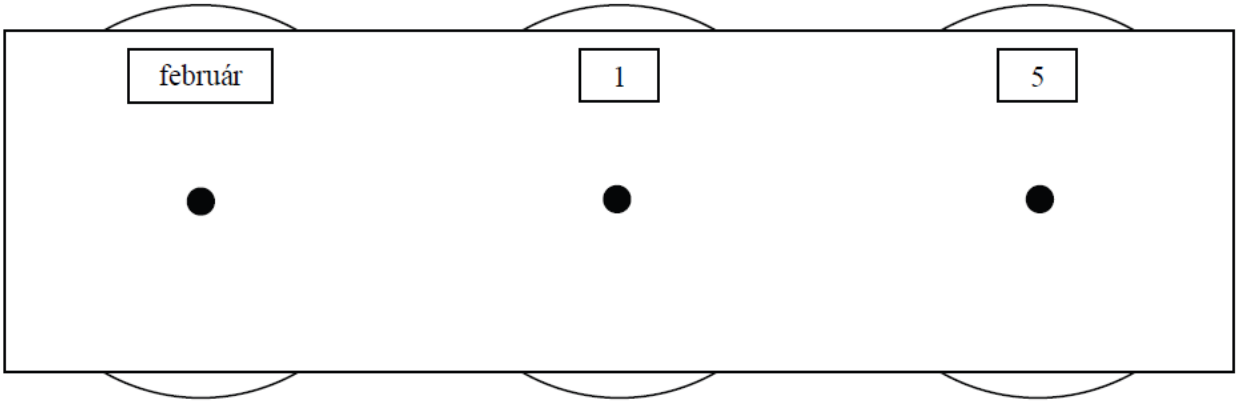
13) Az iskola rajztermében minden rajzasztalhoz két széket tettek, de így a legnagyobb létszámú osztályból nyolc tanulónak nem jutott ülőhely. Minden rajzasztalhoz betettek egy további széket, és így hét üres hely maradt, amikor ebből az osztályból mindenki leült.

a) Hány rajzasztal van a teremben? Hányan járnak az iskola legnagyobb létszámú osztályába? (6 pont)

A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3; a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3, ...8, 9 számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat".

b) Összesen hány „dátum" forgatható ki? (3 pont)

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen megforgatva olyan dátumot kapunk, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév. (3 pont)



14) Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3 pont)

b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3 pont)

Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon minden nap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.

c) Hány nap alatt készült el a 2 méter hosszúra tervezett sál? (11 pont)

15) Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A, a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl. ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez).

a) Töltse ki az első forduló táblázatának hiányzó adatait! (4 pont)

Első forduló eredményei	1. kérdés	2. kérdés	3. kérdés	4. kérdés
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	
Jó válaszok száma	7	10		8
Anikó elért pontszáma			5	0

b) Hány százalékkal növekedett volna Anikó összpontszáma az első fordulóban, ha a második kérdésre is jól válaszolt volna? (A többi játékos válaszát változatlannak képzeljük.) (3 pont)

c) Ha Anikó valamelyik másik fordulóban mind a négy kérdésre találomra válaszol, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden válasza helyes? (3 pont)

d) Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre kapott összpontszáma a lehető legtöbb legyen? (7 pont)

16) Péter egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számra gondolt. Ezen kívül azt is megmondta Pálnak, hogy a gondolt szám 20-szal osztható. Mekkora valószínűséggel találja ki Pál elsőre a gondolt számot, ha jól tudja a matematikát? (2 pont)

17) Egy szerencsejáték a következőképpen zajlik:
A játékos befizet 7 forintot, ezután a játékvezető feldob egy szabályos dobókockát. A dobás eredményének ismeretében a játékos abbahagyhatja a játékot; ez esetben annyi Ft-ot kap, amennyi a dobott szám volt.
Dönthet azonban úgy is, hogy nem kéri a dobott számnak megfelelő pénzt, hanem újabb 7 forintért még egy dobást kér. A játékvezető ekkor újra feldobja a kockát. A két dobás eredményének ismeretében annyi forintot fizet ki a játékosnak, amennyi az első és a második dobás eredményének szorzata. Ezzel a játék véget ér.
Zsófi úgy dönt, hogy ha 3-nál kisebb az első dobás eredménye, akkor abbahagyja, különben pedig folytatja a játékot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Zsófi tovább játszik? (4 pont)

b) Zsófi játékának megkezdése előtt számítsuk ki, mekkora valószínűséggel fizet majd neki a játékvezető pontosan 12 forintot? (6 pont)

Barnabás úgy dönt, hogy mindenképpen két dobást kér majd. Áttekinti a két dobás utáni lehetséges egyenlegeket: a neki kifizetett és az általa befizetett pénz különbségét.

c) Írja be a táblázat üres mezőibe a két dobás utáni egyenlegeket! (4 pont)

		második dobás eredménye					
		1	2	3	4	5	6
első dobás eredménye	1	-13					
	2						
	3						
	4						10
	5						
	6						

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Barnabás egy (két dobásból álló) játszmában nyer? (3 pont)

18) Az autókereskedés parkolójában 1–25-ig számozott hely van. Minden beérkező autó véletlenszerűen kap parkolóhely számot.

a) Az üres parkolóba elsőként beparkoló autó vezetőjének szerencseszáma a 7. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott parkolóhely számnak van hetes számjegye, vagy a szám hétnek többszöröse? (4 pont)

Május 10-én az üres parkolóba 25 kocsi érkezik: 12 ezüstszínű ötajtós, 4 piros négyajtós, 2 piros háromajtós és 7 zöld háromajtós.

b) Az üres parkolóba már beálltak a négy és ötajtós autók. Hányféleképpen állhatnak be az üresen maradt helyekre a háromajtósak? (Az azonos színű autókat nem különböztetjük meg egymástól.) (5 pont)

A május 10-re előjegyzett 25 vevő az autó színére is megfogalmazta előzetesen a kívánságait. Négyen zöld kocsit rendeltek, háromnak a piros szín kivételével mindegyik megfelel, öten akarnak piros vagy ezüst kocsit, tízen zöldet vagy pirosat. Három vevőnek mindegy, milyen színű kocsit vesz.

c) Színek szempontjából kielégíthető-e a május 10-re előjegyzett 25 vevő igénye az aznap reggel érkezett autókkal? (8 pont)

19) Egy vetélkedőn részt vevő versenyzők érkezéskor sorszámot húznak egy urnából. Az urnában 50 egyforma gömb van. Minden egyes gömbben egy-egy szám van, ezek különböző egész számok 1-től 50-ig.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az elsőnek érkező versenyző héttel osztható sorszámot húz? (3 pont)

A vetélkedő győztesei között jutalomként könyvutalványt szerettek volna szétosztani a szervezők. A javaslat szerint Anna, Bea, Csaba és Dani kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően $1:2:3:4$. Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalom ötödét szánták, önként lemond az utalványról. A zsűri úgy döntött, hogy a neki szánt 16000 forintos utalványt is szétosztják a másik három versenyző között úgy, hogy az ő jutalmaik közötti arány ne változzon.

b) Összesen hány forint értékű könyvutalványt akartak a szervezők szétosztani a versenyzők között, és ki mondott le a könyvutalványról? (6 pont)

c) Hány forint értékben kapott könyvutalványt a jutalmat kapott három versenyző külön-külön? (3 pont)

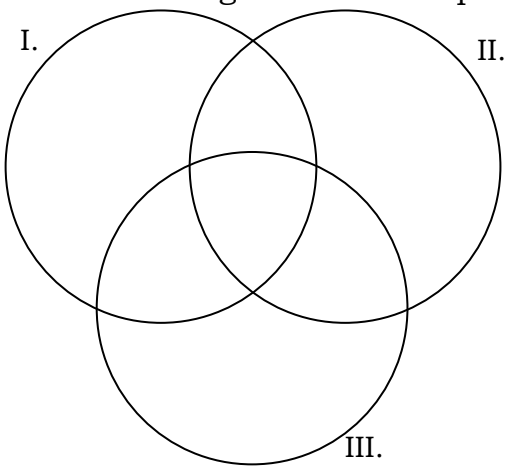
20) Egy zsákban nyolc fehér golyó van. Hány fekete golyót kell a zsákba tenni - hogy véletlenszerűen kiválasztva egy golyót -, fehér golyó kiválasztásának 0,4 legyen a valószínűsége, ha bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel választjuk? (2 pont)

21) Béla egy fekete és egy fehér színű szabályos dobókockával egyszerre dob. Feljegyzi azt a kétjegyű számot, amelyet úgy kap, hogy a tízes helyiértéken a fekete kockával dobott szám, az egyes helyiértéken pedig a fehér kockával dobott szám áll.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a feljegyzett kétjegyű szám
a) négyzetszám; (3 pont)
b) számjegyei megegyeznek; (3 pont)
c) számjegyeinek összege legfeljebb 9? (6 pont)

22) Az alábbi kilenc szám közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám nem negatív?
–3,5; –5; 6; 8,4; 0; –2,5; 4; 12; –11. (2 pont)

23) A héten az ötös lottón a következő számokat húzták ki: 10, 21, 22, 53 és 87. Kata elújságolta Sárának, hogy a héten egy két találatos szelvénye volt. Sára nem ismeri Kata szelvényét, és arra tippel, hogy Kata a 10-est és az 53-ast találta el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Sára tippje helyes? Válaszát indokolja! (3 pont)

24) Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg:
I. Diákok Hangja
II. Iskolaélet
III. Miénk a suli!
Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében.
A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a suli! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5%-a olvasta.

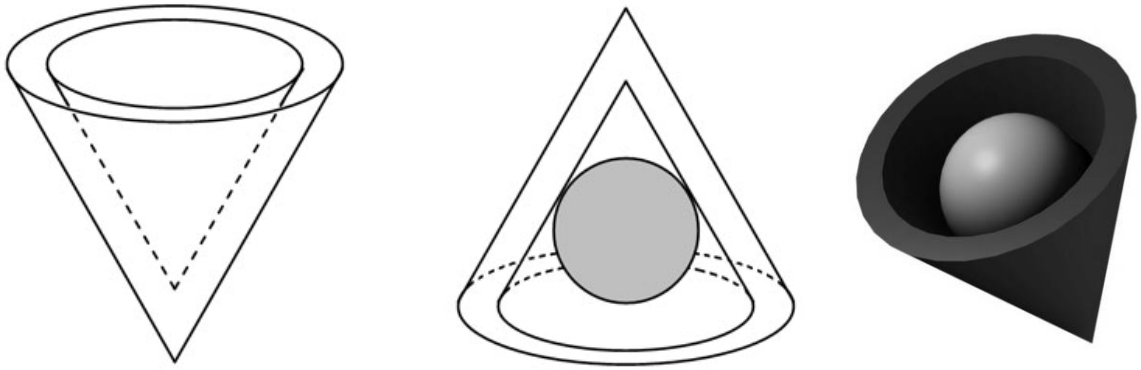


a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt? (2 pont)
b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát! (6 pont)
c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt? (2 pont)

Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélet című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.
d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az Iskolaéletet? (7 pont)

25) Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. A desszert csokoládéból készült váza olyan, mint egy tölcsér. (Lásd ábra.)

A külső és belső kúp hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{6}{5}$. A kisebb kúp adatai: alapkörének sugara 1 cm, magassága 2,5 cm hosszú.



a) Hány cm^3 csokoládét tartalmaz egy ilyen csokoládéváz? A választ tizedre kerekítve adja meg! (5 pont)

Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek, ezután egy csokoládéból készült vékony körlemezzel lezárják a kúpot.

b) Hány cm a sugara a lehető legnagyobb méretű ilyen marcipángömbnek? A választ tizedre kerekítve adja meg! (7 pont)

A marcipángömböket gyártó gép működése nem volt hibátlan. A mintavétellel végzett minőség-ellenőrzés kiderítette, hogy a legyártott gömbök 10%-ában a marcipángömb mérete nem felel meg az előírtnak.

c) A már legyártott nagy mennyiségű gömb közül 10-et kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között pontosan 4-nek a mérete nem felel meg az előírásnak?
(A kérdezett valószínűség kiszámításához használhatja a binomiális eloszlás képletét.) (5 pont)

26) Egy kockajátékban egy menet abból áll, hogy szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után. Egy dobás 1 pontot ér, ha négyest vagy ötöst dobunk, egyébként a dobásért nem jár pont. A menetet úgy pontozzák, hogy a két dobásért járó pontszámot összeadják.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy menetben 1 pontot szerzünk, és azt az első dobásért kapjuk? (5 pont)

b) Minek nagyobb a valószínűsége,
- annak, hogy egy menetben szerzünk pontot, vagy
- annak, hogy egy menetben nem szerzünk pontot? (7 pont)

27) Egy piros és egy sárga szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege pontosan 4 lesz? Válaszát indokolja! (3 pont)

28) András, Balázs, Cili, Dóra és Enikő elhatározták, hogy sorsolással döntenek arról, hogy közülük ki kinek készít ajándékot. Úgy tervezték, hogy a neveket ráírják egy-egy papír cetlire, majd a lefelé fordított öt cédulát összekeverik, végül egy sorban egymás mellé leteszik azokat az asztalra. Ezután, keresztnevük szerinti névsorban haladva egymás után vesznek el egy-egy cédulát úgy, hogy a soron következő mindig a bal szélső cédulát veszi el.

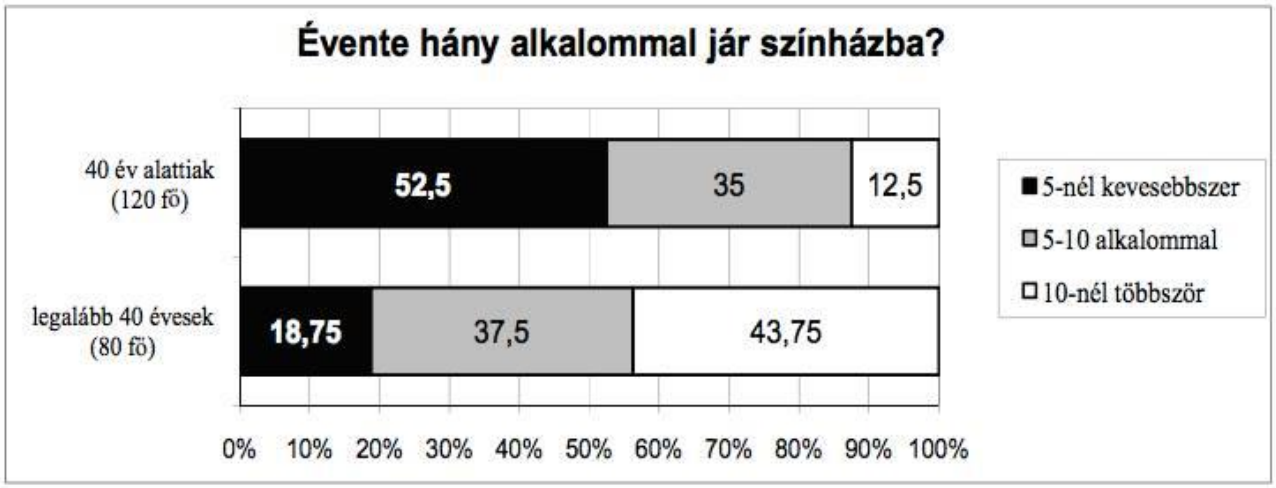
a) Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó Andrásnak a saját neve jut? (5 pont)

b) Írja be az alábbi táblázatba az összes olyan sorsolás eredményét, amelyben csak Enikőnek jut a saját neve! A táblázat egyes soraiban az asztalon lévő cédulák megfelelő sorrendjét adja meg! (A megadott táblázat sorainak a száma lehet több, kevesebb vagy ugyanannyi, mint a felsorolandó esetek száma. Ennek megfelelően hagyja üresen a felesleges mezőket, vagy egészítse ki újabb mezőkkel a táblázatot, ha szükséges!) (6 pont)

	A húzó neve				
A céduláknak megfelelő sorrendjei	A	B	C	D	E
					E
					E
					E
					E
					E
					E

c) Az ajándékok átadása után mind az öten moziba mentek, és a nézőtéren egymás mellett foglaltak helyet. Hány különböző módon kerülhetett erre sor, ha tudjuk, hogy a két fiú nem ült egymás mellett? (6 pont)

29) Egy felmérés során két korcsoportban összesen 200 embert kérdeztek meg arról, hogy évente hány alkalommal járnak színházba. Közülük 120-an 40 évesnél fiatalabbak, 80 válaszadó pedig 40 éves vagy annál idősebb volt. Az eredményeket (százalékos megoszlásban) az alábbi diagram szemlélteti.



a) Hány legalább 40 éves ember adta azt a választ, hogy 5-nél kevesebbszer volt színházban? (3 pont)

b) A megkérdezettek hány százaléka jár évente legalább 5, de legfeljebb 10 alkalommal színházba? (4 pont)

c) A 200 ember közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük legfeljebb az egyik fiatalabb 40 évesnél?

Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

30) Tekintsük a következő halmazokat:

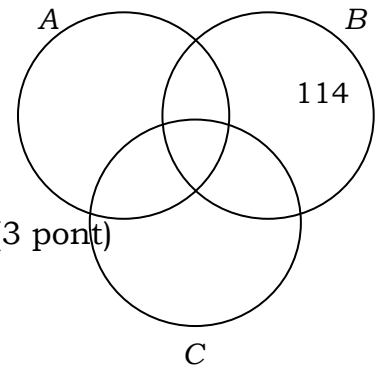
$A = \{$a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok$\}$

$B = \{$a 300-nál nem nagyobb, 3-al osztható pozitív egész számok$\}$

$C = \{$a 400-nál nem nagyobb, 4-el osztható pozitív egész számok$\}$

a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába! (8 pont)

	A halmaz	*B* halmaz	*C* halmaz
114	*nem eleme*	*eleme*	*nem eleme*
52			
78			
124			
216			



b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát! (3 pont)

c) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az *A* halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a *B*, sem a *C* halmaznak! (6 pont)

31) Adja meg annak valószínűségét, hogy a 7; 8; 9; 10; 11, 12; 13; 14 számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám prím! (2 pont)

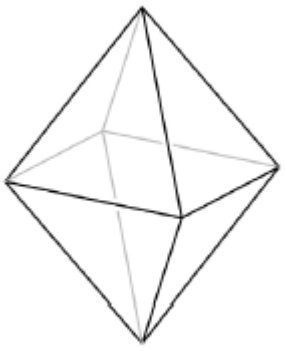
32) Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet.

a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját! (4 pont)

b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!) (6 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket! (7 pont)

33) Tekintsünk két egybevágó, szabályos négyoldalú (négyzet alapú) gúlát, melyek alapélei 2 cm hosszúak, oldalélei pedig 3 cm-esek. A két gúlát alaplapjuknál fogva összeragasztjuk (az alaplapok teljesen fedik egymást), így az ábrán látható testet kapjuk.



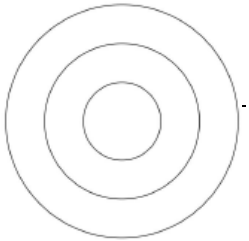
a) Számítsa ki ennek a testnek a felszínét (cm^2-ben) és a térfogatát (cm^3-ben)! Válaszait egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A test lapjait 1-től 8-ig megszámozzuk, így egy „dobó-oktaédert” kapunk, amely minden oldallapjára egyforma valószínűséggel esik. Egy ilyen test esetében is van egy felső lap, az ezen lévő számot tekintjük a dobás kimenetelének. (Az ábrán látható „dobó-oktaéderrel” 8-ast dobtunk.) (9 pont)



b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ezzel a „dobó-oktaéderrel” egymás után négyszer dobva, legalább három esetben 5-nél nagyobb számot dobunk! (8 pont)

34) Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi



vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható. A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is.

a) Hányféle háromszínű kitűzőt készíthet a kisiparos? (3 pont)
b) Hányféle kétszínű kitűző készíthető? (5 pont)

A kisiparos elkészíti az összes lehetséges különböző (egy-, két- és háromszínű) kitűzőt egy-egy példányban, és véletlenszerűen kiválaszt közülük egyet.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan kitűzőt választ, amelyen az egyik mező kék, egy másik sárga, a harmadik pedig zöld színű? (4 pont)

35) Az egyik világbajnokságon részt vevő magyar női vízilabdacsapat 13 tagjának életkor szerinti megoszlását mutatja az alábbi táblázat.

Életkor	17	18	19	21	22	23	24	25	26	31
Gyakoriság	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1

a) Számítsa ki a csapat átlagéletkorát! (2 pont)

Jelölje *A* azt az eseményt, hogy a csapatból 7 játékost véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztottak között legfeljebb egy olyan van, aki 20 évnél fiatalabb.

b) Számítsa ki az *A* esemény valószínűségét! (8 pont)

A világbajnokság egyik mérkőzésén a magyar kezdőcsapat 6 mezőnyjátékosáról a következőket tudjuk:

- a legidősebb és a legfiatalabb játékos életkorának különbsége 12 év,
- a játékosok életkorának egyetlen módusza 22 év,
- a hat játékos életkorának mediánja 23 év,
- a hat játékos életkorának átlaga 24 év.

c) Adja meg a kezdőcsapat hat mezőnyjátékosának életkorát! (7 pont)

36) Egy dobozban 50 darab golyó van, közülük 10 darab piros színű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kihúzva pirosat húzunk? (Az egyes golyók húzásának ugyanakkora a valószínűsége.) (2 pont)

37) Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a baloldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól.

a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre? (2 pont)
b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek? (3 pont)
c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna és Béla jegye egymás mellé szól, ha a fenti négy jegyet véletlenszerűen osztjuk ki közöttük? (4 pont)

A színház 1200 személyes. A szombati előadásra az összes jegy elkelt. Az eladott jegyek 40%-a 800 Ft-os, 25%-a 1000 Ft-os, 20%-a 1200 Ft-os, 15%-a 1500 Ft-os jegy volt.

d) Ábrázolja kördiagramon az eladott jegyek jegyárak szerinti százalékos megoszlását! (3 pont)
e) Számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe kerül egy színházjegy! (5 pont)

38) Egy teherautóval több zöldségboltba almát szállítottak. Az egyik üzletbe 60 kg jonatánt, 135 kg starkingot, 150 kg idaredet és 195 kg golden almát vittek. A jonatán és az idared alma kilóját egyaránt 120 Ft-ért, a starking és a golden kilóját 85 Ft-ért árulta a zöldséges.

a) Hány százalékkal volt drágább a jonatán alma kilója a goldenéhez képest? (2 pont)

b) Mennyi bevételhez jutott a zöldséges, ha a teljes mennyiséget eladta? (2 pont)

c) A zöldségeshez kiszállított árukészlet alapján számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe került nála 1 kg alma! (3 pont)

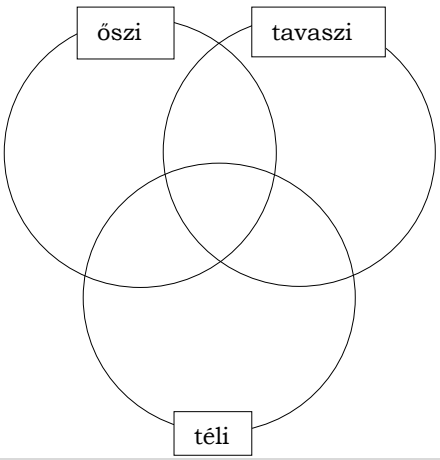
d) Ábrázolja kördiagramon a zöldségeshez érkezett alma mennyiségének fajták szerinti megoszlását! (6 pont)

A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.

e) A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz? (4 pont)

39) Egy zeneiskola minden tanulója szerepelt a tanév során szervezett három hangverseny, az őszi, a téli, a tavaszi koncert valamelyikén. 20-an voltak, akik az őszi és a téli koncerten is, 23-an, akik a télin és a tavaszin is, és 18-an, akik az őszi és a tavaszi hangversenyen is szerepeltek. 10 olyan növendék volt, aki mindhárom hangversenyen fellépett.

a) Írja be a halmazábrába a szövegben szereplő adatokat a megfelelő helyre! (4 pont)



A zeneiskolába 188 tanuló jár. Azok közül, akik csak egy hangversenyen léptek fel, kétszer annyian szerepeltek tavasszal, mint télen, de csak negyedannyian ősszel, mint tavasszal.

b) Számítsa ki, hogy hány olyan tanuló volt, aki csak télen szerepelt! (8 pont)

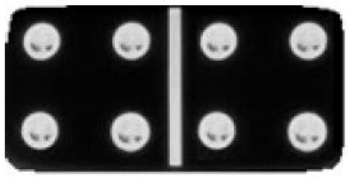
c) 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5-5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba? (5 pont)

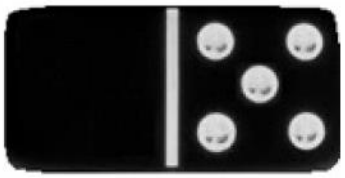
40) Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja! (3 pont)

41)

a) Egy memóriajáték 30 olyan egyforma méretű lapból áll, melyek egyik oldalán egy-egy egész szám áll az 1, 2, 3, … 14, 15 számok közül. Mindegyik szám pontosan két lapon szerepel. A lapok másik oldala (a hátoldala) teljesen azonos mintázatú. A 30 lapot összekeverjük. A játék kezdetén a lapokat az asztalra helyezzük egymás mellé, hátoldalukkal felfelé fordítva, így a számok nem látszanak. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játék kezdetén két lapot véletlenszerűen kiválasztva a lapokon álló számok megegyeznek! (5 pont)

b) Egy dominókészlet azonos méretű kövekből áll. Minden dominókő egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken elhelyezett pöttyök száma 0-tól 6-ig bármi lehet. Minden lehetséges párosításnak léteznie kell, de két egyforma kő nem lehet egy készletben. Az ábrán két kő látható: a 4-4-es és a 0-5-ös (vagy 5-0-ás). Hány kőből áll egy dominókészlet? (6 pont)





c) A „Ki nevet a végén?” nevű társasjátékban egy játékos akkor indulhat el a pályán, amikor egy szabályos dobókockával 6-ost dob. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy valaki pontosan a harmadik dobására indulhat el a pályán! (6 pont)

42) Egy kalapban 3 piros, 4 kék és 5 zöld golyó van. Találomra kihúzunk a kalapból egy golyót. Adja meg annak valószínűségét, hogy a kihúzott golyó nem piros! (2 pont)

43) András és Péter „számkártyázik” egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott lapot. (Például ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.



a) Hány kártya van Péter előtt az első mérkőzés után, ha András az 1, 2, 3, 4, 5, 6, Péter pedig a 2, 4, 5, 3, 1, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait? (2 pont)

A második mérkőzés során Péter az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben játszotta ki a lapjait, és így összesen két lapot vitt el.

b) Adjon meg egy lehetséges sorrendet, amelyben András kijátszhatta lapjait! (3 pont)

A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőt küldi csatába).

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg! (6 pont)

A negyedik mérkőzés előtt mindketten úgy döntöttek, hogy az egész mérkőzés során véletlenszerűen játsszák majd ki a lapjaikat. Az első három csata után Andrásnál a 3, 4, 6 számkártyák maradtak, Péternél pedig az 1, 5, 6 számkártyák.

d) Adja meg annak a valószínűségét, hogy András az utolsó három csatából pontosan kettőt nyer meg! (6 pont)

44) Az első 100 pozitív egész szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott szám osztható 5-tel! (2 pont)

45) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.

a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)

b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)

Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapítottuk meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.

c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)

Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

46) Két különböző színű szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok szorzata prímszám lesz! Megoldását részletezze! (4 pont)

47) Egy webáruházba való belépés előzetes regisztrációhoz kötött, melynek során a regisztráló életkorát is meg kell adnia. Az adatok alapján a 25560 regisztráló közül 28 évesnél fiatalabb 7810 fő, 55 évesnél idősebb 4615 fő, a többiek 28 és 55 év közöttiek.

a) Készítsen a létszámadatok alapján kördiagramot, kiszámítva a három körcikkhez tartozó középponti szögeket is! (5 pont)

A webáruház üzemeltetői a vásárlói szokásokat szeretnék elemezni, ezért a regisztráltak közül véletlenszerűen kiválasztanak két személyt.

b) Adja meg annak a valószínűségét, hogy az egyik kiválasztott személy 28 évesnél fiatalabb, a másik 55 évesnél idősebb! (4 pont)

A regisztráltak egy része vásárol is a webáruházban. A vásárlók között a 28 év alattiak éppen kétszer annyian vannak, mint az 55 évesnél idősebbek. A 28 év alattiak az elmúlt időszakban összesen 19 325 700 Ft, az 55 év felettiek 17 543 550 Ft értékben vásároltak. Az 55 év felettiek átlagosan 2410 Ft-al költöttek többet, mint a 28 év alattiak.

c) Számítsa ki, hány 55 év feletti vásárlója volt a webáruháznak, és adja meg, hogy ezek a vásárlók átlagosan mennyit költöttek! (8 pont)

48) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

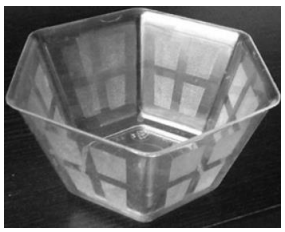
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

49) Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy néggyel osztható számot választunk? Válaszát indokolja! (3 pont)

50) Egy műanyag terméket gyártó üzemben szabályos hatoldalú csonkagúla alakú, felül nyitott virágtartó dobozokat készítenek egy kertészet számára (lásd az ábrát). A csonkagúla alaplapja 13 cm oldalú szabályos hatszög, fedőlapja 7cm oldalú szabályos hatszög, az oldalélei 8 cm hosszúak.

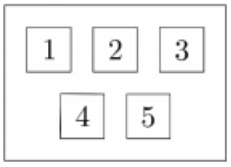


a) Egy műanyagöntő gép 1 kg alapanyagból (a virágtartó doboz falának megfelelő anyagvastagság mellett) $0{,}93\ \text{m}^2$ felületet képes készíteni. Számítsa ki, hány virágtartó doboz készíthető 1 kg alapanyagból! (11 pont)

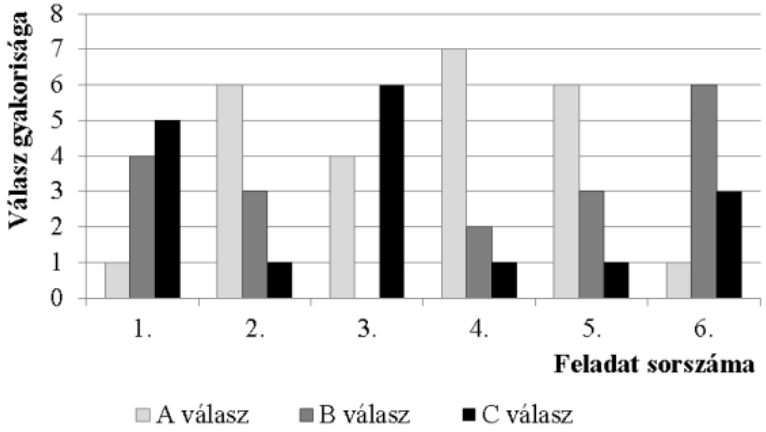
A kertészetben a sok virághagymának csak egy része hajt ki: $0{,}91$ annak a valószínűsége, hogy egy elültetett virághagyma kihajt.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy 10 darab elültetett virághagyma közül legalább 8 kihajt! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

51) Az osztály lottót szervez, melyben az 1, 2, 3, 4, 5, számok közül húznak ki hármat. Tamás a 2, 3, 5 számokat jelöli be a szelvényen. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Tamásnak telitalálata lesz! Számítását részletezze! (4 pont)



52) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott választok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)

b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)

Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.

d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben? (5 pont)

53) Zsófi gyertyákat szeretne önteni, hogy megajándékozhassa a barátait. Öntőformának egy négyzet alapú szabályos gúlát választ, melynek alapéle $6\ \text{cm}$, oldaléle 5 cm hosszúságú. Egy szaküzletben 11 cm oldalú, kocka alakú tömbökben árulják a gyertyának való viaszt. Ezt megolvasztva és az olvadt viaszt a formába öntve készülnek a gyertyák. (A számítások során tekintsen el az olvasztás és öntés során bekövetkező térfogatváltozástól.)

a) Legfeljebb hány gyertyát önthet Zsófi egy 11 cm oldalú, kocka alakú tömbből? (6 pont)

Zsófi az elkészült gúla alakú gyertyák lapjait szeretné kiszínezni. Mindegyik lapot (az alaplapot és az oldallapokat is) egy-egy színnek, kékkel vagy zölddel fogja színezni.

b) Hányféle különböző gyertyát tud Zsófi ilyen módon elkészíteni? (Két gyertyát különbözőnek tekintünk, ha forgással nem vihetők egymásba.) (6 pont)

Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot” használ. Mindegyik fajta „varázskanóc” fehér színű, de a meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég, Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg! (5 pont)

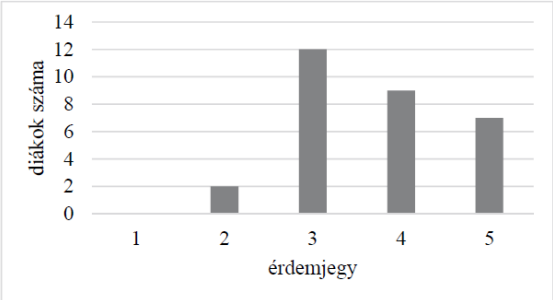
54) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Egy szabályos dobókockával egyszer dobva $\frac{2}{6}$ annak a valószínűsége, hogy négyzetszámot dobunk.

B: Két szabályos pénzérmét feldobva $\frac{1}{3}$ annak a valószínűsége, hogy mindkettővel írást dobunk.

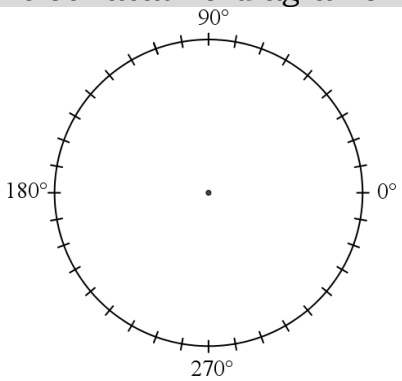
C: Az egyjegyű pozitív egész számok közül egyet véletlenszerűen választva $\frac{4}{9}$ annak a valószínűsége, hogy páros számot választunk. (2 pont)

55) Egy 30 fős osztály matematikaérettségi vizsgájának érdemjegyei olvashatók le az alábbi diagramról.



a) Adja meg az osztály matematikaérettségi érdemjegyeinek átlagát, mediánját és móduszát! (4 pont)

b) Ábrázolja az érdemjegyek eloszlását kördiagramon! (4 pont)

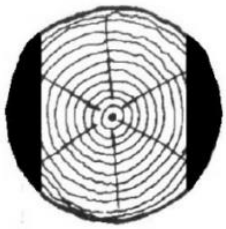


Az osztály tanulóinak matematikaérettségi dolgozatai közül az érettségi elnök véletlenszerűen kiválaszt és megvizsgál kettőt.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy mindkét kiválasztott dolgozat érdemjegye hármas! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

56) Egy kockával kétszer egymás után dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a két dobott szám összege 7 lesz! Válaszát indokolja! (4 pont)

57) A Hód Kft. Faárutelephelyén rönkfából (henger alakú fatörzsekből) a következő módon készítenek gerendát. A keresztfűrészgép először két oldalt levág egy-egy – az ábra sötéttel jelölt – részt, majd a fa 90°-kal történő elfordítása után egy hasonló vágással végül egy négyzetes hasáb alakú gerendát készít. A gépet úgy állítják be, hogy a kapott hasáb alaplapja a lehető legnagyobb legyen. Most egy forgáshenger alakú, 60 cm átmérőjű, 5 méter hosszú rönkfát fűrészel így a gép.



a) Igaz-e, hogy a kapott négyzetes hasáb alakú fagerenda térfogata kisebb 1 köbméternél? (6 pont)

A Hód Kft. Deszkaárut is gyárt, ehhez a faanyagot 30000 $\mathrm{Ft/m^3}$-es beszerzési áron vásárolja meg a termelőtől. A gyártás közben a megvásárolt fa kb. 40%-ából hulladékfa lesz. A késztermék 1 köbméterét 90000 forintért adja el a cég, de az eladási ár 35%-át a költségekre kell fordítania (feldolgozás, telephely fenntartása stb.).

b) Mennyi haszna keletkezik a Hód Kft.-nek 1 köbméter deszkaáru eladásakor? (5 pont)

A fakitermelő cég telephelyéről hat teherautó indul el egymás után. Négy teherautó fenyőfát, kettő pedig tölgyfát szállít.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a két, tölgyfát szállító teherautó közvetlenül egymás után gördül ki a telephelyről, ha az autók indulási sorrendje véletlenszerű! (6 pont)

58) Egy 20 fős társaság tagjait az április havi szabadidős tevékenységeikről kérdezték. Mindenki három eldöntendő kérdésre válaszolt (igennel vagy nemmel).

I. Volt-e moziban?
II. Olvasott-e szépirodalmi könyvet?
III. Volt-e koncerten?

A válaszokból kiderült, hogy tizenketten voltak moziban, kilencen olvastak szépirodalmi könyvet, és négy fő járt koncerten. Öten voltak, akik moziban jártak és szépirodalmi könyvet is olvastak, négyen pedig moziban és koncerten is jártak. Hárman mindhárom kérdésre igennel válaszoltak.

a) Hány olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt? (6 pont)

A társaság 20 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legalább egyikük volt moziban április folyamán! (5 pont)

Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2.

c) Adja meg ezt a kilenc számot! (6 pont)

59) Anna, Bence, Cili, Dénes véletlenszerűen leülnek egymás mellé egy padra. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy sem két fiú, sem két lány nem ül egymás mellé! Válaszát indokolja! (4 pont)